

2018 年上海市普陀区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1. (4 分) 下列函数中， y 关于 x 的二次函数是 ()

A. $y=ax^2+bx+c$

B. $y=x(x-1)$

C. $y=\frac{1}{x^2}$

D. $y=(x-1)^2-x^2$

2. (4 分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=2$ ，下列结论中，正确的是 ()

A. $AB=2\sin A$

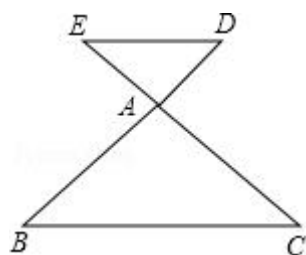
B. $AB=2\cos A$

C. $BC=2\tan A$

D. $BC=2\cot A$

3. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 的反向延长线上，

下面比例式中，不能判断 $ED \parallel BC$ 的是 ()



A. $\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CE}$

B. $\frac{EA}{EC} = \frac{DA}{DB}$

C. $\frac{ED}{BC} = \frac{EA}{AC}$

D. $\frac{EA}{AD} = \frac{AC}{AB}$

4. (4 分) 已知 $\vec{a}=5\vec{b}$ ，下列说法中，不正确的是 ()

A. $\vec{a}-5\vec{b}=\vec{0}$

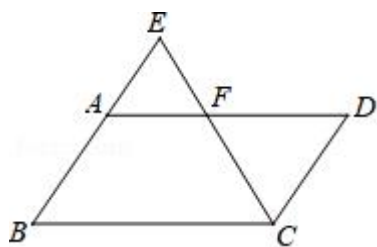
B. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

C. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. $|\vec{a}|=5|\vec{b}|$

5. (4 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， F 是边 AD 上的一点，射线 CF 和 BA

的延长线交于点 E ，如果 $\frac{C_{\triangle EAF}}{C_{\triangle CDF}} = \frac{1}{2}$ ，那么 $\frac{S_{\triangle EAF}}{S_{\triangle EBC}}$ 的值是 ()



A. $\frac{1}{2}$

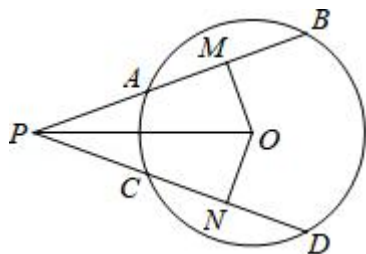
B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{9}$

6. (4分) 如图, 已知 AB 和 CD 是 $\odot O$ 的两条等弦. $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, 垂足分别为点 M 、 N , BA 、 DC 的延长线交于点 P , 联结 OP . 下列四个说法中:

① $\widehat{AB} = \widehat{CD}$; ② $OM = ON$; ③ $PA = PC$; ④ $\angle BPO = \angle DPO$, 正确的个数是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

二. 填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{b-a}{a+b} =$ _____.

8. (4分) 已知线段 $a=4$ 厘米, $b=9$ 厘米, 线段 c 是线段 a 和线段 b 的比例中项, 线段 c 的长度等于_____厘米.

9. (4分) 化简: $\vec{b} - 4(\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}) =$ _____.

10. (4分) 在直角坐标系平面内, 抛物线 $y=3x^2+2x$ 在对称轴的左侧部分是_____的 (填“上升”或“下降”)

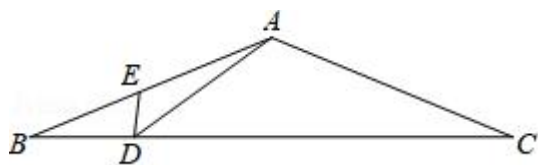
11. (4分) 二次函数 $y=(x-1)^2-3$ 的图象与 y 轴的交点坐标是_____.

12. (4分) 将抛物线 $y=2x^2$ 平移, 使顶点移动到点 $P(-3, 1)$ 的位置, 那么平移后所得新抛物线的表达式是_____.

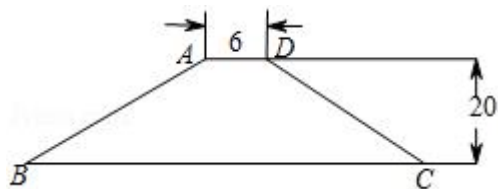
13. (4分) 在直角坐标平面内有一点 $A(3, 4)$, 点 A 与原点 O 的连线与 x 轴

的正半轴夹角为 α ，那么角 α 的余弦值是_____.

14. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点D、E分别在边BC、AB上，且 $\angle ADE=\angle B$ ，如果 $DE:AD=2:5$ ， $BD=3$ ，那么 $AC=_____$.

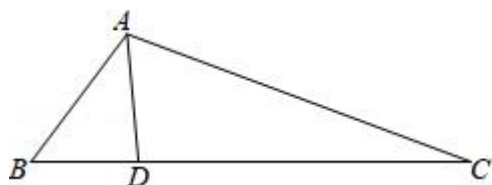


15. (4分) 如图，某水库大坝的横断面是梯形ABCD，坝顶宽 $AD=6$ 米，坝高是20米，背水坡AB的坡角为 30° ，迎水坡CD的坡度为1:2，那么坝底BC的长度等于_____米（结果保留根号）

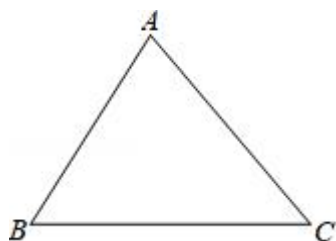


16. (4分) 已知 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=3$ ， $BC=\sqrt{7}$ ， $CD\perp AB$ ，垂足为点D，以点D为圆心作 $\odot D$ ，使得点A在 $\odot D$ 外，且点B在 $\odot D$ 内. 设 $\odot D$ 的半径为 r ，那么 r 的取值范围是_____.

17. (4分) 如图，点D在 $\triangle ABC$ 的边BC上，已知点E、点F分别为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的重心，如果 $BC=12$ ，那么两个三角形重心之间的距离EF的长等于_____.



18. (4分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=5$ ， $AC=6$ ，将 $\triangle ABC$ 翻折，使得点A落到边BC上的点A'处，折痕分别交边AB、AC于点E、点F，如果 $A'F\parallel AB$ ，那么 $BE=_____$.

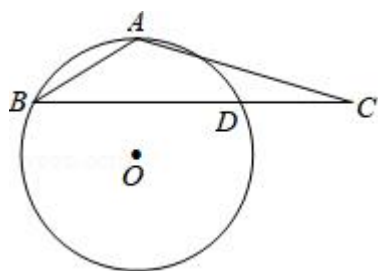


三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算: $\frac{1}{2\cos 30^\circ - \cot 45^\circ} - \tan 60^\circ \cdot \sin^2 45^\circ$.

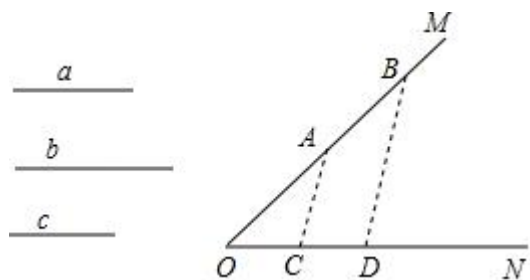
20. (10 分) 已知一个二次函数的图象经过 A (0, -3), B (1, 0), C (m, 2m+3), D (-1, -2) 四点, 求这个函数解析式以及点 C 的坐标.

21. (10 分) 如图, 已知 $\odot O$ 经过 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B, 交边 BC 于点 D, 点 A 恰为 $\widehat{BD}$ 的中点, 且 $BD=8$, $AC=9$, $\sin C = \frac{1}{3}$, 求 $\odot O$ 的半径.



22. (10 分) 下面是一位同学的一道作图题:

已知线段 a、b、c (如图), 求作线段 x, 使 $a:b=c:x$



他的作法如下:

- (1)、以点 O 为端点画射线 OM, ON.
- (2)、在 OM 上依次截取 $OA=a$, $AB=b$.
- (3)、在 ON 上截取 $OC=c$.

(4)、联结 AC，过点 B 作 $BD \parallel AC$ ，交 ON 于点 D.

所以：线段_____就是所求的线段 x.

①试将结论补完整

②这位同学作图的依据是_____

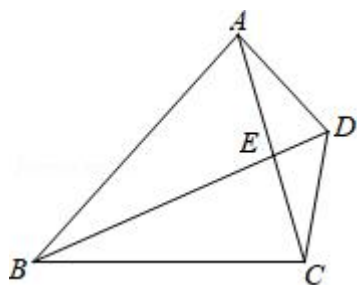
③如果 $OA=4$ ， $AB=5$ ， $\overrightarrow{AC}=\vec{\pi}$ ，试用向量 $\vec{\pi}$ 表示向量 $\overrightarrow{DB}$.

23. (12 分) 已知：如图，四边形 ABCD 的对角线 AC 和 BD 相交于点 E， $AD=DC$ ，

$DC^2=DE \cdot DB$ ，求证：

(1) $\triangle BCE \sim \triangle ADE$;

(2) $AB \cdot BC = BD \cdot BE$.



24. (12 分) 如图，已知在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y=ax^2+2ax+c$ (其中

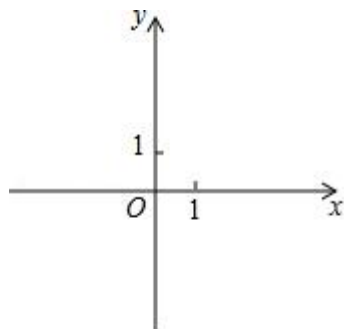
a, c 为常数，且 $a < 0$) 与 x 轴交于点 A，它的坐标是 $(-3, 0)$ ，与 y 轴交

于点 B，此抛物线顶点 C 到 x 轴的距离为 4

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 求 $\angle CAB$ 的正切值;

(3) 如果点 P 是抛物线上的一点，且 $\angle ABP = \angle CAO$ ，试直接写出点 P 的坐标.



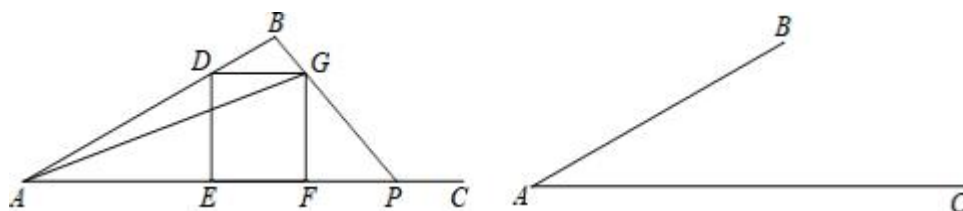
25. (14 分) 如图 1, $\angle BAC$ 的余切值为 2, $AB=2\sqrt{5}$, 点 D 是线段 AB 上的一动点 (点 D 不与点 A、B 重合), 以点 D 为顶点的正方形 DEFG 的另两个顶点 E、F 都在射线 AC 上, 且点 F 在点 E 的右侧, 联结 BG, 并延长 BG, 交射线 EC 于点 P.

(1) 点 D 在运动时, 下列的线段和角中, _____ 是始终保持不变的量 (填序号);

①AF; ②FP; ③BP; ④ $\angle BDG$; ⑤ $\angle GAC$; ⑥ $\angle BPA$;

(2) 设正方形的边长为 x, 线段 AP 的长为 y, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 如果 $\triangle PFG$ 与 $\triangle AFG$ 相似, 但面积不相等, 求此时正方形的边长.



2018 年上海市普陀区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分) [下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1. (4 分) 下列函数中， y 关于 x 的二次函数是 ()

A. $y=ax^2+bx+c$

B. $y=x(x-1)$

C. $y=\frac{1}{x^2}$

D. $y=(x-1)^2-x^2$

【考点】H1：二次函数的定义.

【专题】535：二次函数图象及其性质.

【分析】根据二次函数的定义，逐一分析四个选项即可得出结论.

【解答】解：A、当 $a=0$ 时， $y=bx+c$ 不是二次函数；

B、 $y=x(x-1)=x^2-x$ 是二次函数；

C、 $y=\frac{1}{x^2}$ 不是二次函数；

D、 $y=(x-1)^2-x^2=-2x+1$ 为一次函数.

故选：B.

【点评】本题考查了二次函数的定义，牢记二次函数的定义是解题的关键.

2. (4 分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=2$ ，下列结论中，正确的是 ()

A. $AB=2\sin A$

B. $AB=2\cos A$

C. $BC=2\tan A$

D. $BC=2\cot A$

【考点】T1：锐角三角函数的定义.

【专题】1：常规题型.

【分析】直接利用锐角三角函数关系分别计算得出答案.

【解答】解： $\because \angle C=90^\circ$ ， $AC=2$ ，

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{AB},$$

$$\text{故 } AB = \frac{2}{\cos A},$$

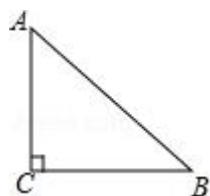
故选项 A, B 错误;

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{2},$$

则 $BC = 2 \tan A$, 故选项 C 正确;

则选项 D 错误.

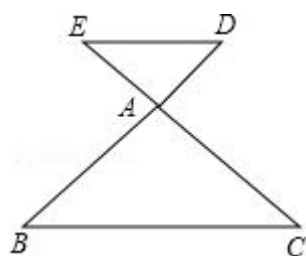
故选: C.



【点评】 此题主要考查了锐角三角函数关系, 正确将记忆锐角三角函数关系是解题关键.

3. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E 分别在边 AB、AC 的反向延长线上,

下面比例式中, 不能判断 $ED \parallel BC$ 的是 ()



A. $\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CE}$

B. $\frac{EA}{EC} = \frac{DA}{DB}$

C. $\frac{ED}{BC} = \frac{EA}{AC}$

D. $\frac{EA}{AD} = \frac{AC}{AB}$

【考点】 S4: 平行线分线段成比例.

【专题】 55D: 图形的相似.

【分析】 根据平行线分线段成比例定理, 对各选项进行逐一判断即可.

【解答】 解: A. 当 $\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CE}$ 时, 能判断 $ED \parallel BC$;

B. 当 $\frac{EA}{EC} = \frac{DA}{DB}$ 时, 能判断 $ED \parallel BC$;

C. 当 $\frac{ED}{BC} = \frac{EA}{AC}$ 时, 不能判断 $ED \parallel BC$;

D. 当 $\frac{EA}{AD} = \frac{AC}{AB}$ 时, 能判断 $ED \parallel BC$;

故选: C.

【点评】本题考查的是平行线分线段成比例定理, 如果一条直线截三角形的两边 (或两边的延长线) 所得的对应线段成比例, 那么这条直线平行于三角形的第三边.

4. (4 分) 已知 $\vec{a} = 5\vec{b}$, 下列说法中, 不正确的是 ()

A. $\vec{a} - 5\vec{b} = \vec{0}$

B. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

C. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. $|\vec{a}| = 5|\vec{b}|$

【考点】JA: 平行线的性质; LM: *平面向量.

【专题】5: 特定专题.

【分析】根据平行向量以及模的定义的知识求解即可求得答案, 注意掌握排除法在选择题中的应用.

【解答】解: A、错误. 应该是 $\vec{a} - 5\vec{b} = \vec{0}$;

B、正确. 因为 $\vec{a} = 5\vec{b}$, 所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同;

C、正确. 因为 $\vec{a} = 5\vec{b}$, 所以 $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

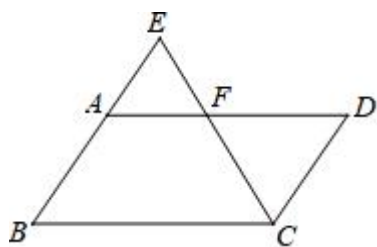
D、正确. 因为 $\vec{a} = 5\vec{b}$, 所以 $|\vec{a}| = 5|\vec{b}|$;

故选: A.

【点评】本题考查了平面向量, 注意, 平面向量既有大小, 又有方向, 平行向量, 也叫共线向量, 是指方向相同或相反的非零向量. 零向量和任何向量平行.

5. (4 分) 如图, 在平行四边形 ABCD 中, F 是边 AD 上的一点, 射线 CF 和 BA

的延长线交于点 E, 如果 $\frac{C_{\triangle EAF}}{C_{\triangle CDF}} = \frac{1}{2}$, 那么 $\frac{S_{\triangle EAF}}{S_{\triangle EBC}}$ 的值是 ()



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{9}$

【考点】L5: 平行四边形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】55: 几何图形.

【分析】根据相似三角形的性质进行解答即可.

【解答】解: $\because$ 在平行四边形 ABCD 中,

$$\therefore AE \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle EAF \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \frac{C_{\triangle EAF}}{C_{\triangle CDF}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AF}{BC} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AF \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle EAF \sim \triangle EBC,$$

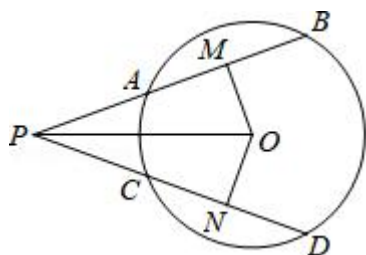
$$\therefore \frac{S_{\triangle EAF}}{S_{\triangle EBC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

故选: D.

【点评】此题考查相似三角形的判定和性质, 综合运用了平行四边形的性质和相似三角形的性质是解题关键.

6. (4 分) 如图, 已知 AB 和 CD 是 $\odot O$ 的两条等弦. $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, 垂足分别为点 M、N, BA、DC 的延长线交于点 P, 联结 OP. 下列四个说法中:

① $\widehat{AB} = \widehat{CD}$; ② $OM = ON$; ③ $PA = PC$; ④ $\angle BPO = \angle DPO$, 正确的个数是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

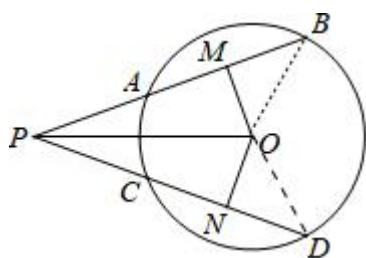
【考点】M2: 垂径定理; M4: 圆心角、弧、弦的关系.

【专题】14: 证明题.

【分析】如图连接 OB、OD, 只要证明 $\text{Rt}\triangle OMB \cong \text{Rt}\triangle OND$, $\text{Rt}\triangle OPM \cong \text{Rt}$

$\triangle OPN$ 即可解决问题.

【解答】解: 如图连接 OB、OD;



$$\because AB=CD,$$

$$\therefore \widehat{AB}=\widehat{CD}, \text{ 故①正确}$$

$$\because OM \perp AB, \quad ON \perp CD,$$

$$\therefore AM=MB, \quad CN=ND,$$

$$\therefore BM=DN,$$

$$\because OB=OD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OMB \cong \text{Rt}\triangle OND,$$

$$\therefore OM=ON, \text{ 故②正确},$$

$$\because OP=OP,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OPM \cong \text{Rt}\triangle OPN,$$

$$\therefore PM=PN, \angle OPB=\angle OPD, \text{故④正确},$$

$$\therefore AM=CN,$$

$$\therefore PA=PC, \text{故③正确},$$

故选：D.

【点评】 本题考查垂径定理、圆心角、弧、弦的关系、全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线构造全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

二. 填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{b-a}{a+b} = \frac{1}{5}$.

【考点】 S1: 比例的性质.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 利用比例的性质由 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ 得到 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$, 则可设 $a=2t$, $b=3t$, 然后把 $a=2t$, $b=3t$ 代入 $\frac{b-a}{a+b}$ 中进行分式的运算即可.

【解答】 解: $\because \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \frac{a}{2} = \frac{b}{3},$$

设 $a=2t$, $b=3t$,

$$\therefore \frac{b-a}{a+b} = \frac{3t-2t}{2t+3t} = \frac{1}{5}.$$

故答案为 $\frac{1}{5}$.

【点评】 本题考查了比例的性质: 常用的性质有: 内项之积等于外项之积; 合比性质; 分比性质; 合分比性质; 等比性质.

8. (4 分) 已知线段 $a=4$ 厘米, $b=9$ 厘米, 线段 c 是线段 a 和线段 b 的比例中项, 线段 c 的长度等于 6 厘米.

【考点】S2: 比例线段.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据比例中项的定义，列出比例式即可得出中项，注意线段不能为负.

【解答】解：根据比例中项的概念结合比例的基本性质，得：比例中项的平方等于两条线段的乘积.

所以 $c^2=4 \times 9$ ，解得 $c=\pm 6$ （线段是正数，负值舍去），

$\therefore c=6\text{cm}$,

故答案为：6.

【点评】本题考查比例线段、比例中项等知识，解题的关键是熟练掌握基本概念，属于中考常考题型.

9. (4分) 化简： $\vec{b}-4(\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b})=\underline{-4\vec{a}+7\vec{b}}$.

【考点】LM: *平面向量.

【专题】5: 特定专题.

【分析】根据屏幕绚丽的加法法则计算即可

【解答】解： $\vec{b}-4(\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b})=\vec{b}-4\vec{a}+6\vec{b}=-4\vec{a}+7\vec{b}$,

故答案为 $-4\vec{a}+7\vec{b}$;

【点评】本题考查平面向量的加减法则，解题的关键是熟练掌握平面向量的加减法则，注意平面向量的加减适合加法交换律以及结合律，适合去括号法则.

10. (4分) 在直角坐标系平面内，抛物线 $y=3x^2+2x$ 在对称轴的左侧部分是下降的（填“上升”或“下降”）

【考点】H3: 二次函数的性质.

【专题】1: 常规题型; 535: 二次函数图象及其性质.

【分析】由抛物线解析式可求得其开口方向，再结合二次函数的增减性则可求得答案.

【解答】解：

∴在 $y=3x^2+2x$ 中, $a=3>0$,

∴抛物线开口向上,

∴在对称轴左侧部分 y 随 x 的增大而减小, 即图象是下降的,

故答案为: 下降.

【点评】 本题主要考查二次函数的性质, 利用二次函数的解析式求得抛物线的开口方向是解题的关键.

11. (4 分) 二次函数 $y=(x-1)^2-3$ 的图象与 y 轴的交点坐标是 $(0, -2)$.

【考点】 H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 求自变量为 0 时的函数值即可得到二次函数的图象与 y 轴的交点坐标.

【解答】 解: 把 $x=0$ 代入 $y=(x-1)^2-3$ 得 $y=1-3=-2$,

所以该二次函数的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, -2)$,

故答案为 $(0, -2)$.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征, 在 y 轴上的点的横坐标为 0.

12. (4 分) 将抛物线 $y=2x^2$ 平移, 使顶点移动到点 $P(-3, 1)$ 的位置, 那么平移后所得新抛物线的表达式是 $y=2(x+3)^2+1$.

【考点】 H3: 二次函数的性质; H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】 33: 函数思想.

【分析】 由于抛物线平移前后二次项系数不变, 然后根据顶点式写出新抛物线解析式.

【解答】 解: 抛物线 $y=2x^2$ 平移, 使顶点移到点 $P(-3, 1)$ 的位置, 所得新抛物线的表达式为 $y=2(x+3)^2+1$.

故答案为: $y=2(x+3)^2+1$.

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换: 由于抛物线平移后的形状不变,

故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式.

13. (4 分) 在直角坐标平面内有一点 $A(3, 4)$ ，点 A 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴夹角为 α ，那么角 α 的余弦值是 $\frac{3}{5}$.

【考点】D5: 坐标与图形性质; T7: 解直角三角形.

【专题】554: 等腰三角形与直角三角形.

【分析】利用锐角三角函数的定义、坐标与图形性质以及勾股定理的知识求解.

【解答】解: $\because$ 在直角坐标平面内有一点 $A(3, 4)$,

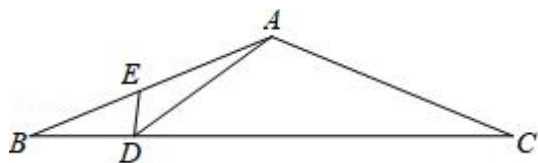
$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

故答案为: $\frac{3}{5}$.

【点评】本题考查了解直角三角形、锐角三角函数的定义、坐标与图形性质以及勾股定理的知识，此题比较简单，易于掌握.

14. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上，且 $\angle ADE = \angle B$ ，如果 $DE:AD=2:5$ ， $BD=3$ ，那么 $AC = \frac{15}{2}$.



【考点】KH: 等腰三角形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】55: 几何图形.

【分析】根据 $\angle ADE = \angle B$ ， $\angle EAD = \angle DAB$ ，得出 $\triangle AED \sim \triangle ABD$ ，利用相似三角形的性质解答即可.

【解答】解: $\because \angle ADE = \angle B$,

$\therefore \angle EAD = \angle DAB$,

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{BD}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{3}{AB} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore AB = \frac{15}{2},$$

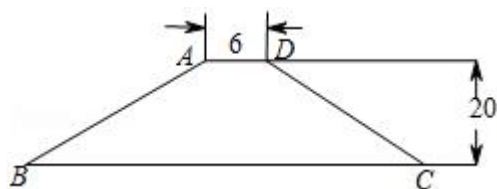
$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore AC = \frac{15}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{15}{2},$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质. 关键是要懂得找相似三角形, 利用相似三角形的性质求解.

15. (4 分) 如图, 某水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$, 坝顶宽 $AD=6$ 米, 坝高是 20 米, 背水坡 AB 的坡角为 30° , 迎水坡 CD 的坡度为 1: 2, 那么坝底 BC 的长度等于 $(46+20\sqrt{3})$ 米 (结果保留根号)

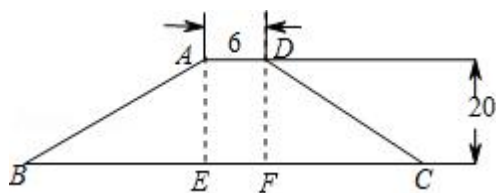


【考点】 T9: 解直角三角形的应用 – 坡度坡角问题.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 过梯形上底的两个顶点向下底引垂线 AE 、 DF , 得到两个直角三角形和一个矩形, 分别解 $Rt\triangle ABE$ 、 $Rt\triangle DCF$ 求得线段 BE 、 CF 的长, 然后与 EF 相加即可求得 BC 的长.

【解答】 解: 如图, 作 $AE \perp BC$, $DF \perp BC$, 垂足分别为点 E , F , 则四边形 $ADFE$ 是矩形.



由题意得， $EF=AD=6$ 米， $AE=DF=20$ 米， $\angle B=30^\circ$ ，斜坡 CD 的坡度为 $1:2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $\because \angle B=30^\circ$ ，

$$\therefore BE=\sqrt{3}AE=20\sqrt{3}\text{米}.$$

在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中， $\because \frac{DF}{CF}=\frac{1}{2}$ ，

$$\therefore CF=2DF=40\text{米},$$

$$\therefore BC=BE+EF+FC=20\sqrt{3}+6+40=46+20\sqrt{3}\text{ (米)}.$$

所以坝底 BC 的长度等于 $(46+20\sqrt{3})$ 米.

故答案为 $(46+20\sqrt{3})$.

【点评】此题考查了解直角三角形的应用－坡度坡角问题，难度适中，解答本题的关键是构造直角三角形和矩形，注意理解坡度与坡角的定义.

16. (4 分) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=3$ ， $BC=\sqrt{7}$ ， $CD\perp AB$ ，垂足为点 D ，以点 D 为圆心作 $\odot D$ ，使得点 A 在 $\odot D$ 外，且点 B 在 $\odot D$ 内. 设 $\odot D$ 的半径为 r ，那么 r 的取值范围是 $\frac{7}{4}<r<\frac{9}{4}$.

【考点】M8: 点与圆的位置关系.

【专题】55C: 与圆有关的计算.

【分析】先根据勾股定理求出 AB 的长，进而得出 CD 的长，由点与圆的位置关系即可得出结论.

【解答】解： $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=3$ ， $BC=\sqrt{7}$ ，

$$\therefore AB=\sqrt{3^2+(\sqrt{7})^2}=4.$$

$\because CD\perp AB$,

$$\therefore CD = \frac{3\sqrt{7}}{4}.$$

$$\therefore AD \cdot BD = CD^2,$$

设 $AD = x$, $BD = 4 - x$.

$$\text{解得 } x = \frac{9}{4}$$

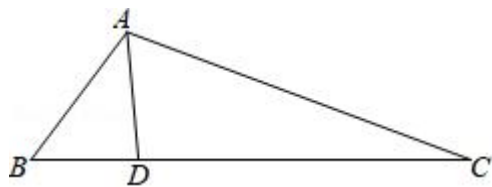
$\therefore$ 点 A 在圆外, 点 B 在圆内,

$$r \text{ 的范围是 } \frac{7}{4} < r < \frac{9}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{4} < r < \frac{9}{4}.$$

【点评】 本题考查的是点与圆的位置关系, 熟知点与圆的三种位置关系是解答此题的关键.

17. (4 分) 如图, 点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 已知点 E、点 F 分别为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的重心, 如果 $BC = 12$, 那么两个三角形重心之间的距离 EF 的长等于 4.



【考点】 K5: 三角形的重心.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 连接 AE 并延长交 BD 于 G, 连接 AF 并延长交 CD 于 H, 根据三角形的重心的概念、相似三角形的性质解答.

【解答】 解: 如图, 连接 AE 并延长交 BD 于 G, 连接 AF 并延长交 CD 于 H,

$\therefore$ 点 E、F 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的重心,

$$\therefore DG = \frac{1}{2}BD, DH = \frac{1}{2}CD, AE = 2GE, AF = 2HF,$$

$$\therefore BC = 12,$$

$$\therefore GH = DG + DH = \frac{1}{2} (BD + CD) = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 12 = 6,$$

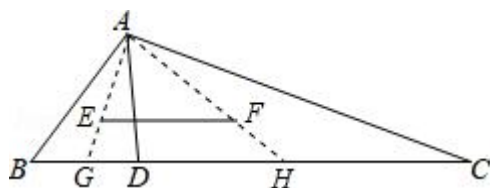
$$\therefore AE = 2GE, AF = 2HF, \angle EAF = \angle GAH,$$

$$\therefore \triangle EAF \sim \triangle GAH,$$

$$\therefore \frac{EF}{GH} = \frac{AE}{AG} = \frac{2}{3},$$

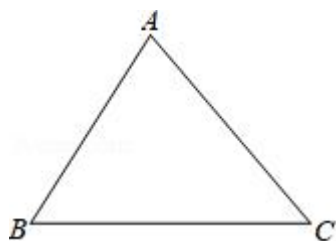
$$\therefore EF = 4,$$

故答案为：4.



【点评】 本题考查了三角形重心的概念和性质，三角形的重心是三角形中线的交点，三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的 2 倍.

18. (4 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=5$ ， $AC=6$ ，将 $\triangle ABC$ 翻折，使得点 A 落到边 BC 上的点 A' 处，折痕分别交边 AB、AC 于点 E，点 F，如果 $A'F \parallel AB$ ，那么 $BE = \frac{25}{11}$.



【考点】 JA: 平行线的性质; PB: 翻折变换 (折叠问题).

【专题】 55D: 图形的相似.

【分析】 设 $BE=x$ ，则 $AE=5-x=AF=A'F$ ， $CF=6-(5-x)=1+x$ ，依据 $\triangle A'CF \sim \triangle BCA$ ，可得 $\frac{CF}{CA} = \frac{A'F}{BA}$ ，即 $\frac{1+x}{6} = \frac{5-x}{5}$ ，进而得到 $BE = \frac{25}{11}$.

【解答】 解：如图，由折叠可得， $\angle AFE = \angle A'FE$,

$$\therefore A'F \parallel AB,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle A'FE,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE,$$

$$\therefore AE = AF,$$

由折叠可得, $AF = A'F$,

设 $BE = x$, 则 $AE = 5 - x = AF = A'F$, $CF = 6 - (5 - x) = 1 + x$,

$$\therefore A'F \parallel AB,$$

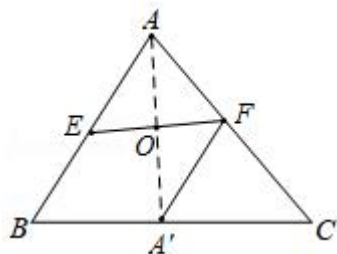
$$\therefore \triangle A'CF \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{CF}{CA} = \frac{A'F}{BA}, \text{ 即 } \frac{1+x}{6} = \frac{5-x}{5},$$

$$\text{解得 } x = \frac{25}{11},$$

$$\therefore BE = \frac{25}{11},$$

故答案为: $\frac{25}{11}$.



【点评】 本题主要考查了折叠问题以及相似三角形的判定与性质的运用, 折叠是一种对称变换, 它属于轴对称, 折叠前后图形的形状和大小不变, 对应边和对应角相等.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\frac{1}{2\cos 30^\circ - \cot 45^\circ} - \tan 60^\circ \cdot \sin^2 45^\circ$.

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值进而代入化简得出答案.

【解答】解：原式 $=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1}-\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$
 $=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $=\frac{1}{2}.$

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键.

20. (10 分) 已知一个二次函数的图象经过 A (0, -3), B (1, 0), C (m, 2m+3), D (-1, -2) 四点, 求这个函数解析式以及点 C 的坐标.

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征; H8: 待定系数法求二次函数解析式.

【专题】11: 计算题.

【分析】设一般式 $y=ax^2+bx+c$, 把 A、B、D 点的坐标代入得 $\begin{cases} c=-3 \\ a+b+c=0 \\ a-b+c=-2 \end{cases}$, 然后

解法组即可得到抛物线的解析式, 再把 C (m, 2m+3) 代入解析式得到关于 m 的方程, 解关于 m 的方程可确定 C 点坐标.

【解答】解: 设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$,

把 A (0, -3), B (1, 0), D (-1, -2) 代入得 $\begin{cases} c=-3 \\ a+b+c=0 \\ a-b+c=-2 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=2x^2+x-3$,

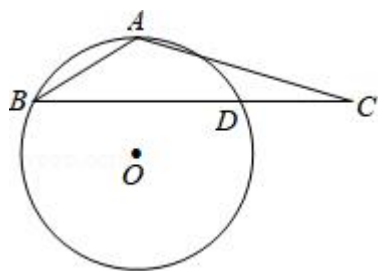
把 C (m, 2m+3) 代入得 $2m^2+m-3=2m+3$, 解得 $m_1=-\frac{3}{2}$, $m_2=2$,

$\therefore$ C 点坐标为 $(-\frac{3}{2}, 0)$ 或 $(2, 7)$.

【点评】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式: 在利用待定系数法求二次函数关系式时, 要根据题目给定的条件, 选择恰当的方法设出关系式, 从而代入数值求解. 一般地, 当已知抛物线上三点时, 常选择一般式, 用待定系

数法列三元一次方程组来求解；当已知抛物线的顶点或对称轴时，常设其解析式为顶点式来求解；当已知抛物线与 x 轴有两个交点时，可选择设其解析式为交点式来求解。

21. (10 分) 如图，已知 $\odot O$ 经过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B ，交边 BC 于点 D ，点 A 恰为 $\widehat{BD}$ 的中点，且 $BD=8$ ， $AC=9$ ， $\sin C = \frac{1}{3}$ ，求 $\odot O$ 的半径。



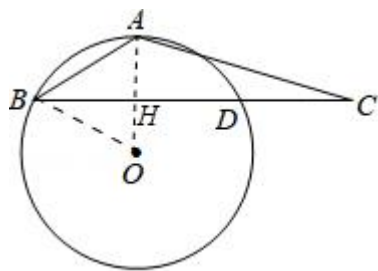
【考点】 M4: 圆心角、弧、弦的关系.

【专题】 559: 圆的有关概念及性质.

【分析】 如图，连接 OA ，交 BC 于 H 。首先证明 $OA \perp BC$ ，在 $Rt\triangle ACH$ 中，

求出 AH ，设 $\odot O$ 的半径为 r ，在 $Rt\triangle BOH$ 中，根据 $BH^2 + OH^2 = OB^2$ ，构建方程即可解决问题；

【解答】 解：如图，连接 OA ，交 BC 于 H 。



$\therefore$ 点 A 为 $\widehat{BD}$ 的中点，

$\therefore OA \perp BD$ ， $BH=DH=4$ ，

$\therefore \angle AHC = \angle BHO = 90^\circ$ ，

$\therefore \sin C = \frac{1}{3} = \frac{AH}{AC}$ ， $AC=9$ ，

$\therefore AH=3$ ，

设 $\odot O$ 的半径为 r ,

在 $Rt\triangle BOH$ 中, $\therefore BH^2 + OH^2 = OB^2$,

$$\therefore 4^2 + (r - 3)^2 = r^2,$$

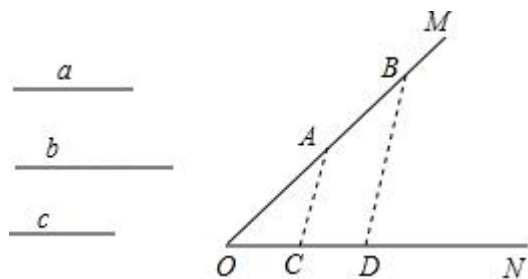
$$\therefore r = \frac{25}{6},$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } \frac{25}{6}.$$

【点评】 本题考查圆心角、弧、弦的关系、垂径定理、勾股定理、锐角三角函数等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造直角三角形解决问题.

22. (10分) 下面是一位同学的一道作图题:

已知线段 a 、 b 、 c (如图), 求作线段 x , 使 $a:b=c:x$



他的作法如下:

- (1)、以点 O 为端点画射线 OM , ON .
- (2)、在 OM 上依次截取 $OA=a$, $AB=b$.
- (3)、在 ON 上截取 $OC=c$.
- (4)、联结 AC , 过点 B 作 $BD \parallel AC$, 交 ON 于点 D .

所以: 线段 CD 就是所求的线段 x .

①试将结论补完整

②这位同学作图的依据是平行于三角形一边的直线截其它两边(或两边的延长线), 所得对应线段成比例

③如果 $OA=4$, $AB=5$, $\overrightarrow{AC}=\vec{\pi}$, 试用向量 $\vec{\pi}$ 表示向量 $\overrightarrow{DB}$.

【考点】 LM: *平面向量; N3: 作图—复杂作图; S4: 平行线分线段成比例.

【专题】13：作图题；55D：图形的相似.

【分析】①根据作图依据平行线分线段成比例定理求解可得；

②根据“平行于三角形一边的直线截其它两边（或两边的延长线），所得对应线段成比例”可得；

③先证 $\triangle OAC \sim \triangle OBD$ 得 $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$ ，即 $BD = \frac{9}{4}AC$ ，从而知 $\overrightarrow{DB} = \frac{9}{4}\overrightarrow{CA} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{9}{4}\pi$.

【解答】解：①根据作图知，线段 CD 就是所求的线段 x，

故答案为：CD；

②这位同学作图的依据是：平行于三角形一边的直线截其它两边（或两边的延长线），所得对应线段成比例；

故答案为：平行于三角形一边的直线截其它两边（或两边的延长线），所得对应线段成比例；

③ $\because OA=4, AB=5$ ，且 $BD \parallel AC$ ，

$\therefore \triangle OAC \sim \triangle OBD$ ，

$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$ ，即 $\frac{4}{9} = \frac{AC}{BD}$ ，

$\therefore BD = \frac{9}{4}AC$ ，

$\therefore \overrightarrow{DB} = \frac{9}{4}\overrightarrow{CA} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{9}{4}\pi$.

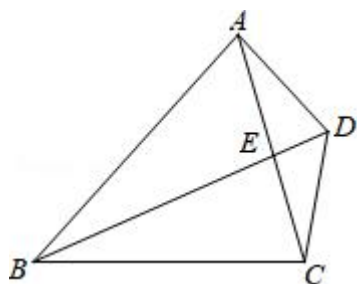
【点评】本题主要考查作图—复杂作图，解题的关键是熟练掌握平行线分线段成比例定理及向量的计算.

23. (12 分) 已知：如图，四边形 ABCD 的对角线 AC 和 BD 相交于点 E， $AD=DC$ ，

$DC^2=DE \cdot DB$ ，求证：

(1) $\triangle BCE \sim \triangle ADE$ ；

(2) $AB \cdot BC = BD \cdot BE$.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】55: 几何图形.

【分析】(1) 由 $\angle DAC = \angle DCA$, 对顶角 $\angle AED = \angle BEC$, 可证 $\triangle BCE \sim \triangle ADE$.

(2) 根据相似三角形判定得出 $\triangle ADE \sim \triangle BDA$, 进而得出 $\triangle BCE \sim \triangle BDA$, 利用相似三角形的性质解答即可.

【解答】证明: (1) $\because AD = DC$,

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\therefore DC^2 = DE \cdot DB,$$

$$\therefore \frac{DC}{ED} = \frac{DB}{DC}, \quad \because \angle CDE = \angle BDC,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle EBC,$$

$$\because \angle AED = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ADE,$$

$$(2) \because DC^2 = DE \cdot DB, \quad AD = DC$$

$$\therefore AD^2 = DE \cdot DB,$$

同法可得 $\triangle ADE \sim \triangle BDA$,

$$\therefore \angle DAE = \angle ABD = \angle EBC,$$

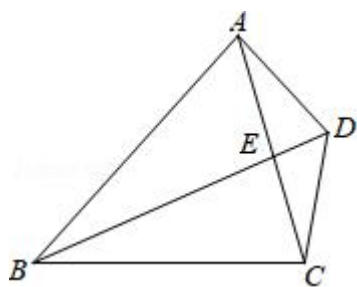
$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BCE,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BE}{AB},$$

$$\therefore AB \cdot BC = BD \cdot BE.$$



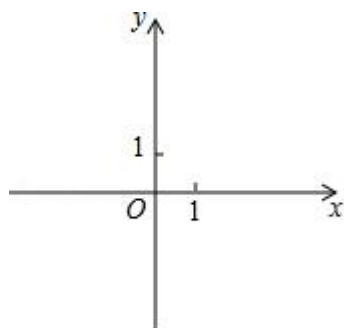
【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质. 关键是要懂得找相似三角形, 利用相似三角形的性质求解.

24. (12 分) 如图, 已知在平面直角坐标系中, 已知抛物线 $y = ax^2 + 2ax + c$ (其中 a 、 c 为常数, 且 $a < 0$) 与 x 轴交于点 A, 它的坐标是 $(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 B, 此抛物线顶点 C 到 x 轴的距离为 4

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 求 $\angle CAB$ 的正切值;

(3) 如果点 P 是抛物线上的一点, 且 $\angle ABP = \angle CAO$, 试直接写出点 P 的坐标.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【专题】 15: 综合题.

【分析】 (1) 先求得抛物线的对称轴方程, 然后再求得点 C 的坐标, 设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)^2+4$, 将点 $(-3, 0)$ 代入求得 a 的值即可;

(2) 先求得 A、B、C 的坐标, 然后依据两点间的距离公式可得到 BC、AB、AC 的长, 然后依据勾股定理的逆定理可证明 $\angle ABC=90^\circ$, 最后, 依据锐角三角函数的定义求解即可;

(3) 记抛物线与 x 轴的另一个交点为 D. 先求得 D $(1, 0)$, 然后再证明 $\angle DBO=\angle CAB$, 从而可证明 $\angle CAO=ABD$, 故此当点 P 与点 D 重合时, $\angle ABP=\angle CAO$; 当点 P 在 AB 的上时. 过点 P 作 $PE\parallel AO$, 过点 B 作 $BF\parallel AO$, 则 $PE\parallel BF$. 先证明 $\angle EPB=\angle CAB$, 则 $\tan\angle EPB=\frac{1}{3}$, 设 $BE=t$, 则 $PE=3t$, P $(-3t, 3+t)$, 将 P $(-3t, 3+t)$ 代入抛物线的解析式可求得 t 的值, 从而可得到点 P 的坐标.

【解答】 解: (1) 抛物线的对称轴为 $x=-\frac{2a}{2a}=-1$.

$\because a < 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向下.

又 $\because$ 抛物线与 x 轴有交点,

$\therefore$ C 在 x 轴的上方,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(-1, 4)$.

设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)^2+4$, 将点 $(-3, 0)$ 代入得: $4a+4=0$, 解得:

$a=-1$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+3$.

(2) 将 $x=0$ 代入抛物线的解析式得: $y=3$,

$\therefore$ B $(0, 3)$.

$\therefore$ C $(-1, 4)$ 、B $(0, 3)$ 、A $(-3, 0)$,

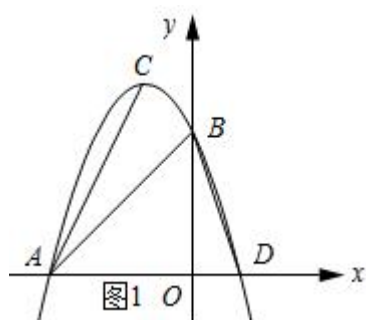
$$\therefore BC=\sqrt{2}, AB=3\sqrt{2}, AC=2\sqrt{5},$$

$$\therefore BC^2+AB^2=AC^2,$$

$$\therefore \angle ABC=90^\circ.$$

$$\therefore \tan \angle CAB=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{3}.$$

(3) 如图 1 所示：记抛物线与 x 轴的另一个交点为 D .



$\therefore$ 点 D 与点 A 关于 $x=-1$ 对称,

$$\therefore D(1, 0).$$

$$\therefore \tan \angle DBO=\frac{1}{3}.$$

又 $\therefore$ 由 (2) 可知: $\tan \angle CAB=\frac{1}{3}.$

$$\therefore \angle DBO=\angle CAB.$$

又 $\therefore OB=OA=3,$

$$\therefore \angle BAO=\angle ABO.$$

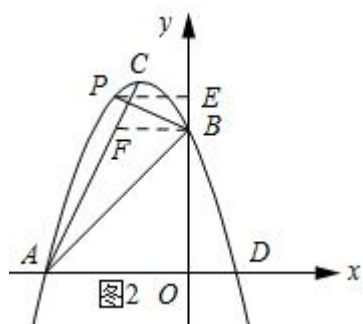
$$\therefore \angle CAO=\angle ABD.$$

$\therefore$ 当点 P 与点 D 重合时, $\angle ABP=\angle CAO,$

$$\therefore P(1, 0).$$

如图 2 所示：当点 P 在 AB 的上时. 过点 P 作 $PE \parallel AO$, 过点 B 作 $BF \parallel AO$,

则 $PE \parallel BF.$



$\therefore BF \parallel AO$,

$\therefore \angle BAO = \angle FBA$.

又 $\because \angle CAO = \angle ABP$,

$\therefore \angle PBF = \angle CAB$.

又 $\because PE \parallel BF$,

$\therefore \angle EPB = \angle PBF$,

$\therefore \angle EPB = \angle CAB$.

$\therefore \tan \angle EPB = \frac{1}{3}$.

设 $BE = t$, 则 $PE = 3t$, $P(-3t, 3+t)$.

将 $P(-3t, 3+t)$ 代入抛物线的解析式得: $y = -x^2 - 2x + 3$ 得: $-9t^2 + 6t + 3 = 3 + t$,

解得 $t = 0$ (舍去) 或 $t = \frac{5}{9}$.

$\therefore P(-\frac{5}{3}, \frac{32}{9})$.

综上所述, 点 P 的坐标为 $P(1, 0)$ 或 $P(-\frac{5}{3}, \frac{32}{9})$.

【点评】 本题主要考查的是二次函数的综合应用, 解答本题主要应用了待定系数法求二次函数的解析式、勾股定理的逆定理、等腰直角三角形的性质、锐角三角函数的定义, 用含 t 的式子表示点 P 的坐标是解题的关键.

25. (14 分) 如图 1, $\angle BAC$ 的余切值为 2, $AB = 2\sqrt{5}$, 点 D 是线段 AB 上的一动点 (点 D 不与点 A 、 B 重合), 以点 D 为顶点的正方形 $DEFG$ 的另两个顶点 E 、 F 都在射线 AC 上, 且点 F 在点 E 的右侧, 联结 BG , 并延长 BG , 交

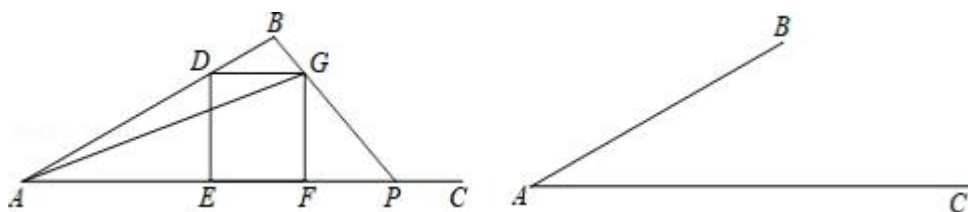
射线 EC 于点 P.

(1) 点 D 在运动时, 下列的线段和角中, ④⑤ 是始终保持不变的量 (填序号);

① AF; ② FP; ③ BP; ④ $\angle BDG$; ⑤ $\angle GAC$; ⑥ $\angle BPA$;

(2) 设正方形的边长为 x , 线段 AP 的长为 y , 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 如果 $\triangle PFG$ 与 $\triangle AFG$ 相似, 但面积不相等, 求此时正方形的边长.



【考点】 SO: 相似形综合题.

【专题】 15: 综合题.

【分析】 (1) 作 $BM \perp AC$ 于 M, 交 DG 于 N, 如图, 利用三角函数的定义得到 $\frac{AM}{BM} = 2$,

设 $BM = t$, 则 $AM = 2t$, 利用勾股定理得 $(2t)^2 + t^2 = (2\sqrt{5})^2$, 解得 $t = 2$, 即

$BM = 2$, $AM = 4$, 设正方形的边长为 x , 则 $AE = 2x$, $AF = 3x$, 由于 $\tan \angle$

$GAF = \frac{GF}{AF} = \frac{1}{3}$, 则可判断 $\angle GAF$ 为定值; 再利用 $DG \parallel AP$ 得到 $\angle BDG = \angle BAC$,

则可判断 $\angle BDG$ 为定值; 在 $Rt\triangle BMP$ 中, 利用勾股定理和三角函数可判断

PB 在变化, $\angle BPM$ 在变化, PF 在变化;

(2) 易得四边形 DEMN 为矩形, 则 $NM = DE = x$, 证明 $\triangle BDG \sim \triangle BAP$, 利用相似比可得到 y 与 x 的关系式;

(3) 由于 $\angle AFG = \angle PFG = 90^\circ$, $\triangle PFG$ 与 $\triangle AFG$ 相似, 且面积不相等, 利用相

似比得到 $PF = \frac{1}{3}x$, 讨论: 当点 P 在点 F 点右侧时, 则 $AP = \frac{10}{3}x$, 所以 $\frac{2x}{2-x} = \frac{10}{3}x$,

当点 P 在点 F 点左侧时, 则 $AP = \frac{8}{3}x$, 所以 $\frac{2x}{2-x} = \frac{8}{3}x$, 然后分别解方程即可得

到正方形的边长.

【解答】解: (1) 作 $BM \perp AC$ 于 M , 交 DG 于 N , 如图,

在 $Rt\triangle ABM$ 中, $\because \cot \angle BAC = \frac{AM}{BM} = 2$,

设 $BM=t$, 则 $AM=2t$,

$$\therefore AM^2 + BM^2 = AB^2,$$

$$\therefore (2t)^2 + t^2 = (2\sqrt{5})^2, \text{ 解得 } t=2,$$

$$\therefore BM=2, AM=4,$$

设正方形的边长为 x ,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $\because \cot \angle DAE = \frac{AE}{DE} = 2$,

$$\therefore AE=2x,$$

$$\therefore AF=3x,$$

在 $Rt\triangle GAF$ 中, $\tan \angle GAF = \frac{GF}{AF} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$,

$\therefore \angle GAF$ 为定值;

$\therefore DG \parallel AP$,

$$\therefore \angle BDG = \angle BAC,$$

$\therefore \angle BDG$ 为定值;

在 $Rt\triangle BMP$ 中, $PB = \sqrt{2^2 + PM^2}$,

而 PM 在变化,

$\therefore PB$ 在变化, $\angle BPM$ 在变化,

$\therefore PF$ 在变化,

所以 $\angle BDG$ 和 $\angle GAC$ 是始终保持不变的量;

故答案为④⑤;

(2) 易得四边形 $DEMN$ 为矩形, 则 $NM=DE=x$,

$$\therefore DG \parallel AP,$$

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BAP,$$

$$\therefore \frac{DG}{AP} = \frac{BN}{BM},$$

$$\text{即 } \frac{x}{y} = \frac{2-x}{2},$$

$$\therefore y = \frac{2x}{2-x} \quad (1 \leq x < 2)$$

(3) $\because \angle AFG = \angle PFG = 90^\circ$, $\triangle PFG$ 与 $\triangle AFG$ 相似, 且面积不相等,

$$\therefore \frac{GF}{AF} = \frac{PF}{GF}, \text{ 即 } \frac{x}{3x} = \frac{PF}{x},$$

$$\therefore PF = \frac{1}{3}x,$$

当点 P 在点 F 点右侧时, $AP = \frac{10}{3}x$,

$$\therefore \frac{2x}{2-x} = \frac{10}{3}x,$$

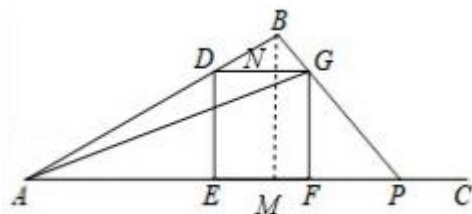
$$\text{解得 } x = \frac{7}{5},$$

当点 P 在点 F 点左侧时, $AP = AF - PF = 3x - \frac{1}{3}x = \frac{8}{3}x$,

$$\therefore \frac{2x}{2-x} = \frac{8}{3}x,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{4},$$

综上所述, 正方形的边长为 $\frac{7}{5}$ 或 $\frac{5}{4}$.



【点评】 本题考查了相似形综合题: 熟练掌握锐角三角函数的定义、正方形的性质和相似三角形的判定与性质.