

2018 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ ，那么下列等式中，不成立的是 ()
- A. $\frac{x}{x+y} = \frac{3}{7}$ B. $\frac{x-y}{y} = \frac{1}{4}$ C. $\frac{x+3}{y+4} = \frac{3}{4}$ D. $4x=3y$
2. (4 分) 在比例尺是 1: 40000 的地图上，若某条道路长约为 5cm，则它的实际长度约为 ()
- A. 0.2km B. 2km C. 20km D. 200km
3. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，如果 $AD=1$ ， $BD=3$ ，那么由下列条件能够判断 $DE \parallel BC$ 的是 ()
- A. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$ B. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{4}$ C. $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$
4. (4 分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，a、b、c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边，下列等式中，正确的是 ()
- A. $\sin A = \frac{b}{c}$ B. $\cos B = \frac{c}{a}$ C. $\tan A = \frac{a}{b}$ D. $\cot B = \frac{b}{a}$
5. (4 分) 下列关于向量的说法中，不正确的是 ()
- A. $3(\vec{a}-\vec{b})=3\vec{a}-3\vec{b}$ B. 若 $|\vec{a}|=3|\vec{b}|$ ，则 $\vec{a}=3\vec{b}$ 或 $\vec{a}=-3\vec{b}$
- C. $3|\vec{a}|=|3\vec{a}|$ D. $m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$
6. (4 分) 对于抛物线 $y=-(x+2)^2+3$ ，下列结论中正确结论的个数为 ()
- ①抛物线的开口向下； ②对称轴是直线 $x=-2$ ；
- ③图象不经过第一象限； ④当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小。
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答

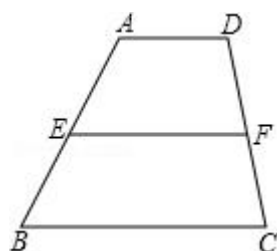
【题纸的相应位置上】

7. (4分) 如果线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项, 且 $a=2$, $c=8$, 则 $b=$ _____.

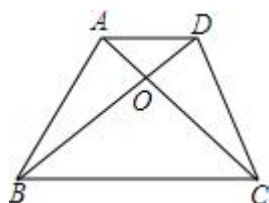
8. (4分) 计算: $3(2\vec{a}-4\vec{b})-5(\vec{a}-\vec{b})=$ _____.

9. (4分) 若点 P 是线段 AB 的黄金分割点, $AB=10\text{cm}$, 则较长线段 AP 的长是_____ cm .

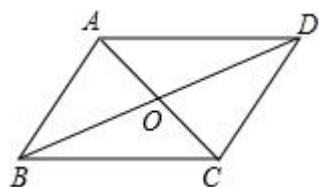
10. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, E 、 F 分别为 AB 、 DC 上的点, 若 $CF=4$, 且 $EF\parallel AD$, $AE:BE=2:3$, 则 CD 的长等于_____.



11. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $AD=2$, $BC=6$, 若 $\triangle AOB$ 的面积等于 6, 则 $\triangle AOD$ 的面积等于_____.



12. (4分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O , 若 $\vec{AB}=\vec{a}$, $\vec{BC}=\vec{b}$, 则 $\vec{OD}$ 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 可表示为_____.

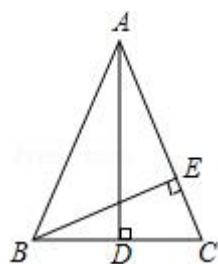


13. (4分) 已知抛物线 C 的顶点坐标为 $(1, 3)$, 如果平移后能与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$ 重合, 那么抛物线 C 的表达式是_____.

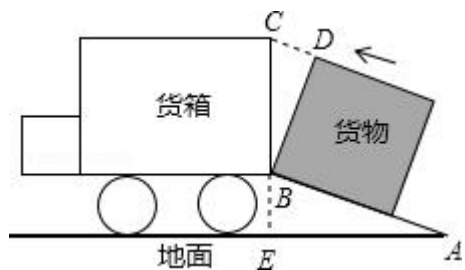
14. (4分) $\sin 60^\circ \cdot \tan 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cot 30^\circ =$ _____.

15. (4分) 如果抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ 与 x 轴的一个交点为 $(5, 0)$, 那么与 x 轴的另一个交点的坐标是_____.

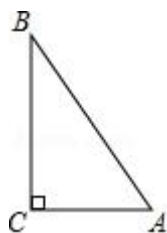
16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, BE 、 AD 分别是边 AC 、 BC 上的高, $CD=2$, $AC=6$, 那么 $CE=$ _____.



17. (4分) 如图, 是将一正方体货物沿坡面 AB 装进汽车货厢的平面示意图, 已知长方体货厢的高度 BC 为 2.6 米, 斜坡 AB 的坡比为 1: 2.4, 现把图中的货物继续向前平移, 当货物顶点 D 与 C 重合时, 仍可把货物放平装进货厢, 则货物的高度 BD 不能超过_____米.



18. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=3$, $BC=4$ (如图), 将 $\triangle ACB$ 绕点 A 顺时针方向旋转得 $\triangle ADE$ (点 C 、 B 的对应点分别为 D 、 E), 点 D 恰好落在直线 BE 上和直线 AC 交于点 F , 则线段 AF 的长为_____.

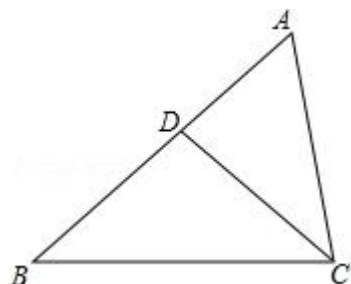


三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACD = \angle B$, $AD = 4$, $DB = 5$.

(1) 求 AC 的长;

(2) 若设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{CD}$.

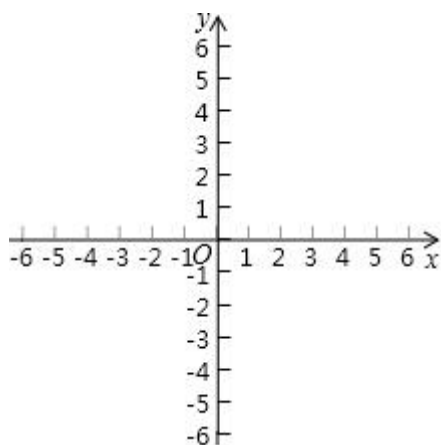


20. (10 分) 已知一个二次函数的图象经过 $A(0, -6)$ 、 $B(4, -6)$ 、 $C(6,$

$0)$ 三点.

(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 分别联结 AC 、 BC , 求 $\tan \angle ACB$.



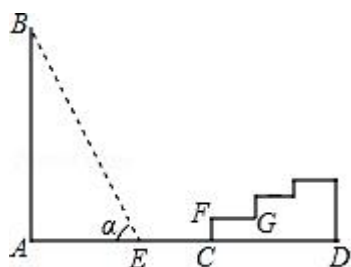
21. (10 分) 如图所示, 巨型广告牌 AB 背后有一看台 CD , 台阶每层高 0.3 米,

且 $AC = 17$ 米, 现有一只小狗睡在台阶的 FG 这层上晒太阳, 设太阳光线与

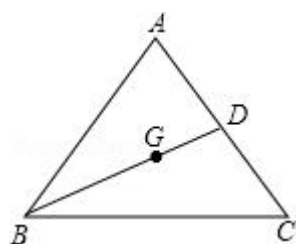
水平地面的夹角为 α , 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, 测得广告牌 AB 在地面上的影长 $AE = 10$ 米,

过了一会, 当 $\alpha = 45^\circ$, 问小狗在 FG 这层是否还能晒到太阳? 请说明理由 ($\sqrt{3}$

取 1.73).



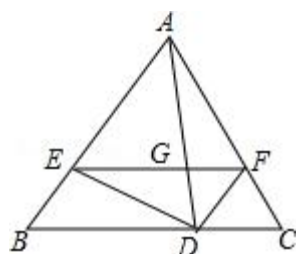
22. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BC=12$, $\sin C=\frac{4}{5}$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 线段 BG 的延长线交边 AC 于点 D , 求 $\angle CBD$ 的余弦值.



23. (12 分) 如图在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 D 、 E 、 F 分别在边 BC 、 AB 、 AC 上, 且 $\angle ADE=\angle B$, $\angle ADF=\angle C$, 线段 EF 交线段 AD 于点 G .

(1) 求证: $AE=AF$;

(2) 若 $\frac{DF}{DE}=\frac{CF}{AE}$, 求证: 四边形 $EBDF$ 是平行四边形.

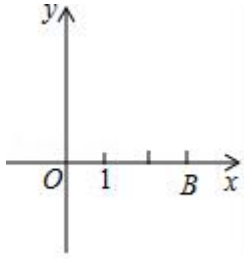


24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=kx$ ($k \neq 0$) 沿着 y 轴向上平移 3 个单位长度后, 与 x 轴交于点 B ($3, 0$), 与 y 轴交于点 C , 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 过点 B 、 C 且与 x 轴的另一个交点为 A .

(1) 求直线 BC 及该抛物线的表达式;

(2) 设该抛物线的顶点为 D , 求 $\triangle DBC$ 的面积;

(3) 如果点 F 在 y 轴上, 且 $\angle CDF=45^\circ$, 求点 F 的坐标.



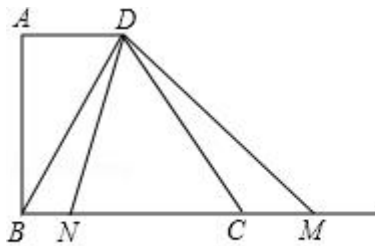
25. (14 分) 已知, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $AD = 2$, $AB = 4$, $BC = 5$,

在射线 BC 任取一点 M , 联结 DM , 作 $\angle MDN = \angle BDC$, $\angle MDN$ 的另一边 DN 交直线 BC 于点 N (点 N 在点 M 的左侧).

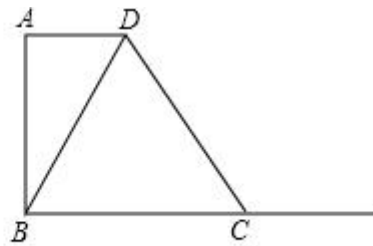
(1) 当 BM 的长为 10 时, 求证: $BD \perp DM$;

(2) 如图 (1), 当点 N 在线段 BC 上时, 设 $BN = x$, $BM = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出它的定义域;

(3) 如果 $\triangle DMN$ 是等腰三角形, 求 BN 的长.



图(1)



(备用图)

2018 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，请选择正确选项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ ，那么下列等式中，不成立的是 ()

A. $\frac{x}{x+y} = \frac{3}{7}$ B. $\frac{x-y}{y} = \frac{1}{4}$ C. $\frac{x+3}{y+4} = \frac{3}{4}$ D. $4x=3y$

【考点】S1：比例的性质.

【专题】1：常规题型.

【分析】直接利用比例的性质将原式变形进而得出答案.

【解答】解：A、 $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$,

$\therefore \frac{x}{x+y} = \frac{3}{7}$, 此选项正确，不合题意；

B、 $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$,

$\therefore \frac{x-y}{y} = -\frac{1}{4}$, 此选项错误，符合题意；

C、 $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$,

$\therefore \frac{x+3}{y+4} = \frac{3}{4}$, 此选项正确，不合题意；

D、 $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$,

$\therefore 4x=3y$, 此选项正确，不合题意；

故选：B.

【点评】此题主要考查了比例的性质，正确将比例式变形是解题关键.

2. (4 分) 在比例尺是 1: 40000 的地图上，若某条道路长约为 5cm，则它的实际长度约为 ()

A. 0.2km B. 2km C. 20km D. 200km

【考点】S2：比例线段.

【专题】11：计算题.

【分析】根据比例尺=图上距离：实际距离，依题意列比例式直接求解即可.

【解答】解：设这条道路的实际长度为 x ，则：
$$\frac{1}{40000} = \frac{5}{x},$$

解得 $x=200000\text{cm}=2\text{km}$.

$\therefore$ 这条道路的实际长度为 2km .

故选：B.

【点评】本题考查比例线段问题，解题的关键是能够根据比例尺的定义构建方程，注意单位的转换.

3. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中，点D、E分别在边AB、AC上，如果 $AD=1$ ， $BD=3$ ，

那么由下列条件能够判断 $DE \parallel BC$ 的是 ()

A. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$ B. $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{4}$ C. $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$

【考点】S4：平行线分线段成比例.

【专题】55D：图形的相似.

【分析】先求出比例式，再根据相似三角形的判定得出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，根据相似推出 $\angle ADE = \angle B$ ，根据平行线的判定得出即可.

【解答】解： $\because AD=1$ ， $BD=3$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4},$$

$$\text{当 } \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4} \text{ 时, } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC,$$

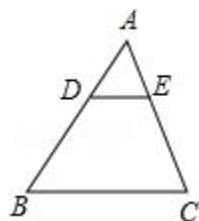
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

根据选项 A、B、C 的条件都不能推出 $DE \parallel BC$,

故选: D.



【点评】本题考查了平行线分线段成比例定理, 相似三角形的性质和判定的应用, 能灵活运用定理进行推理是解此题的关键.

4. (4 分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, a 、 b 、 c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边, 下列等式中, 正确的是 ()

A. $\sin A = \frac{b}{c}$ B. $\cos B = \frac{c}{a}$ C. $\tan A = \frac{a}{b}$ D. $\cot B = \frac{b}{a}$

【考点】T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】先根据题意画出图形, 再根据三角函数的定义解答即可.

【解答】解: 根据三角函数的定义:

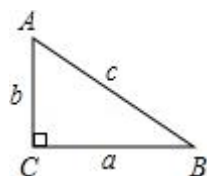
A、 $\sin A = \frac{a}{c}$, 错误;

B、 $\cos B = \frac{a}{c}$, 错误;

C、 $\tan A = \frac{a}{b}$, 正确;

D、 $\cot B = \frac{a}{b}$, 错误.

故选: C.



【点评】要注意, 在三角形中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所有对的边为 a 、 b 、 c .

5. (4 分) 下列关于向量的说法中, 不正确的是 ()

A. $3(\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a} - 3\vec{b}$

B. 若 $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = 3\vec{b}$ 或 $\vec{a} = -3\vec{b}$

C. $3|\vec{a}|=|3\vec{a}|$

D. $m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$

【考点】LM: *平面向量.

【专题】5: 特定专题.

【分析】根据平面向量、模、数乘向量等知识一一判断即可;

【解答】解: A、正确. 根据去括号法则可得结论;

B、错误. 因为 $|\vec{a}|=3|\vec{b}|$, 模相等, 平面向量不一定共线, 故结论错误;

C、正确. 根据模的性质即可判断;

D、正确. 根据数乘向量的性质即可判断;

故选: B.

【点评】本题考查平面向量、模、数乘向量等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考基础题.

6. (4 分) 对于抛物线 $y=-(x+2)^2+3$, 下列结论中正确结论的个数为 ()

- ①抛物线的开口向下; ②对称轴是直线 $x=-2$;
③图象不经过第一象限; ④当 $x>2$ 时, y 随 x 的增大而减小.

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【考点】H3: 二次函数的性质.

【专题】1: 常规题型; 535: 二次函数图象及其性质.

【分析】根据抛物线的解析式可求得其开口方向、对称轴, 则可判断①、②, 由解析式可求得抛物线的顶点坐标及与 x 轴的交点坐标, 则可判断③; 利用抛物线的对称轴及开口方向可判断④; 则可求得答案.

【解答】解:

$$\because y=-(x+2)^2+3,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下、对称轴为直线 $x=-2$, 顶点坐标为 $(-2, 3)$, 故①、②都正确;

在 $y = -(x+2)^2 + 3$ 中, 令 $y=0$ 可求得 $x = -2 + \sqrt{3} < 0$, 或 $x = -2 - \sqrt{3} < 0$,

$\therefore$ 抛物线图象不经过第一象限, 故③正确;

$\therefore$ 抛物线开口向下, 对称轴为 $x = -2$,

$\therefore$ 当 $x > -2$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $x > 2$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故④正确;

综上可知正确的结论有 4 个,

故选: A.

【点评】 本题主要考查二次函数的性质, 掌握二次函数的顶点式是解题的关键,

即在 $y = a(x-h)^2 + k$ 中, 对称轴为 $x=h$, 顶点坐标为 (h, k) .

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) **【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】**

7. (4 分) 如果线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项, 且 $a=2$, $c=8$, 则 $b = \underline{4}$.

【考点】 S2: 比例线段.

【分析】 根据比例中项的概念, 可得 $a:b=b:c$, 可得 $b^2=ac=16$, 故 b 的值可求, 注意线段的长为正数.

【解答】 解: $\because$ 线段 b 是 a 、 c 的比例中项,

$$\therefore b^2 = ac = 16,$$

解得 $b = \pm 4$,

又 $\because$ 线段是正数,

$$\therefore b = 4.$$

故答案为 4.

【点评】 本题考查了比例中项的概念, 注意: 求两个数的比例中项的时候, 应开平方. 求两条线段的比例中项的时候, 负数应舍去.

8. (4 分) 计算: $3(2\vec{a}-4\vec{b})-5(\vec{a}-\vec{b}) = \underline{\vec{a}-7\vec{b}}$.

【考点】LM: *平面向量.

【专题】5: 特定专题.

【分析】根据平面向量的加法法则计算即可.

【解答】解: $3(2\vec{a}-4\vec{b})-5(\vec{a}-\vec{b})=6\vec{a}-12\vec{b}-5\vec{a}+5\vec{b}=\vec{a}-7\vec{b}$.

故答案为 $\vec{a}-7\vec{b}$;

【点评】本题考查平面向量的加减法则, 解题的关键是熟练掌握平面向量的加减法则, 注意平面向量的加减适合加法交换律以及结合律, 适合去括号法则.

9. (4 分) 若点 P 是线段 AB 的黄金分割点, $AB=10\text{cm}$, 则较长线段 AP 的长是

$5\sqrt{5}-5$ cm.

【考点】S3: 黄金分割.

【专题】55: 几何图形.

【分析】根据黄金分割的概念得到 $AP=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$, 把 $AB=10\text{cm}$ 代入计算即可.

【解答】解: $\because P$ 是线段 AB 的黄金分割点, $AP > BP$,

$$\therefore AP=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB,$$

而 $AB=10\text{cm}$,

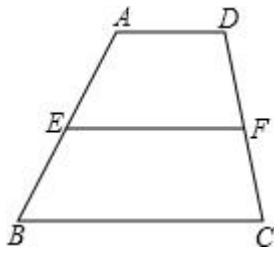
$$\therefore AP=10 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}=5\sqrt{5}-5;$$

故答案为: $5\sqrt{5}-5$.

【点评】本题考查了黄金分割的概念: 如果一个点把一条线段分成两条线段, 并且较长线段是较短线段和整个线段的比例中项, 那么就说这个点把这条线段黄金分割, 这个点叫这条线段的黄金分割点; 较长线段是整个线段的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍.

10. (4 分) 如图, 在梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, E、F 分别为 AB、DC 上的点,

若 $CF=4$, 且 $EF \parallel AD$, $AE: BE=2: 3$, 则 CD 的长等于 $\frac{20}{3}$.



【考点】LH：梯形；S4：平行线分线段成比例.

【专题】1：常规题型.

【分析】由在梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $EF \parallel AD$ ，可得 $AD \parallel EF \parallel BC$ ，然后由平行线分线段成比例定理，证得 $\frac{CF}{DC} = \frac{3}{5}$

，继而求得答案.

【解答】解：∵在梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $EF \parallel AD$ ，

∴ $AD \parallel EF \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{AE}{BE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{CF}{DC} = \frac{3}{5}$$

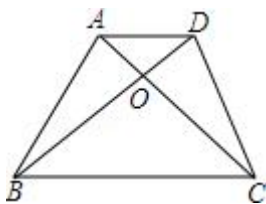
$$\therefore CF=4,$$

$$\therefore DC=4 \div \frac{3}{5} = \frac{20}{3}.$$

故答案为： $\frac{20}{3}$.

【点评】此题考查了梯形的性质以及平行线分线段成比例定理. 此题难度不大，注意掌握数形结合思想的应用.

11. (4 分) 如图，在梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $AD=2$ ， $BC=6$ ，若 $\triangle AOB$ 的面积等于 6，则 $\triangle AOD$ 的面积等于 2.



【考点】LH：梯形；S9：相似三角形的判定与性质.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 由 $AD \parallel BC$, $AD=2$, $BC=6$, 可得 $\frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{3}$, 推出 $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOB}$,

即可解决问题;

【解答】 解: $\because AD \parallel BC$, $AD=2$, $BC=6$,

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle CBO,$$

$$\therefore \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{3},$$

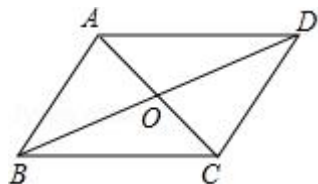
$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOB} = 2.$$

故答案为 2.

【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质、平行线的性质等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

12. (4 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 相交于点 O , 若

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{OD}$ 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 可表示为 $-\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.



【考点】 L5: 平行四边形的性质; LM: *平面向量.

【专题】 5: 特定专题.

【分析】 根据三角形法则求出 $\overrightarrow{BD}$ 再根据 $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$ 即可解决问题;

【解答】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}, \quad OB = OD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}.$$

故答案为 $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$;

【点评】本题考查平面向量的加减法则，解题的关键是熟练掌握平面向量的加减法则，注意平面向量的加减适合加法交换律以及结合律，适合去括号法则.

13. (4 分) 已知抛物线 C 的顶点坐标为 (1, 3)，如果平移后能与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ 重合，那么抛物线 C 的表达式是 $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$.

【考点】H3: 二次函数的性质; H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】33: 函数思想.

【分析】先设原抛物线的解析式为 $y = a(x-h)^2 + k$ ，再根据经过平移后能与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ 重合可知 $a = \frac{1}{2}$ ，再由二次函数的顶点坐标为 (1, 3) 即可得出结论.

【解答】解：先设原抛物线的解析式为 $y = a(x-h)^2 + k$,

$\therefore$ 经过平移后能与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ 重合,

$\therefore a = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 二次函数的顶点坐标为 (1, 3),

$\therefore$ 这个二次函数的解析式是 $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$.

故答案为: $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3$.

【点评】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知图形平移不变性的性质是解答此题的关键.

14. (4 分) $\sin 60^\circ \cdot \tan 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cot 30^\circ =$ 0.

【考点】T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】1: 常规题型.

【分析】直接将特殊角的三角函数值代入求出答案.

【解答】解：原式 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = 0$.

故答案为: 0.

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键.

15. (4 分) 如果抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ 与 x 轴的一个交点为 $(5, 0)$ ，那么与 x 轴的另一个交点的坐标是 $(-3, 0)$.

【考点】HA: 抛物线与 x 轴的交点.

【专题】17: 推理填空题; 535: 二次函数图象及其性质.

【分析】根据二次函数的解析式结合二次函数的性质可找出抛物线的对称轴，再利用对称性即可找出抛物线与 x 轴的另一交点坐标，此题得解.

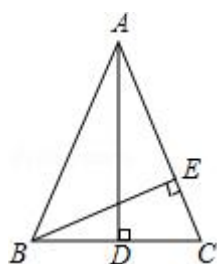
【解答】解: $\because$ 抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x=1$ ，且抛物线与 x 轴的一个交点为 $(5, 0)$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一交点坐标为 $(1 \times 2 - 5, 0)$ ，即 $(-3, 0)$.

故答案为: $(-3, 0)$.

【点评】本题考查了抛物线与 x 轴的交点以及二次函数的性质，利用二次函数的性质找出抛物线的对称轴是解题的关键.

16. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， BE 、 AD 分别是边 AC 、 BC 上的高， $CD=2$ ， $AC=6$ ，那么 $CE=\frac{4}{3}$.



【考点】K3: 三角形的面积; KQ: 勾股定理; S7: 相似三角形的性质.

【专题】552: 三角形.

【分析】只要证明 $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ ，可得 $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CE}$ ，由此即可解决问题.

【解答】解: $\because AB=AC$ ， $AD \perp BC$,

$$\therefore BD=CD=2,$$

$\therefore BE$ 、 AD 分别是边 AC 、 BC 上的高,

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{CE},$$

$$\therefore \frac{6}{4} = \frac{2}{CE},$$

$$\therefore CE = \frac{4}{3},$$

故答案为 $\frac{4}{3}$;

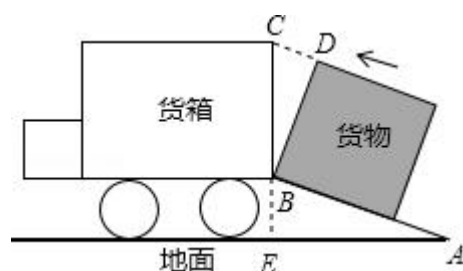
【点评】 本题考查等腰三角形的性质、相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会正确寻找相似三角形解决问题，属于中考常考题型.

17. (4 分) 如图，是将一正方体货物沿坡面 AB 装进汽车货厢的平面示意图，

已知长方体货厢的高度 BC 为 2.6 米，斜坡 AB 的坡比为 1: 2.4，现把图中

的货物继续向前平移，当货物顶点 D 与 C 重合时，仍可把货物放平装进货厢，

则货物的高度 BD 不能超过 2.4 米.



【考点】 Q2: 平移的性质; T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 点 D 与点 C 重合时， $B'C=BD$ ， $\angle B'CB = \angle CBD = \angle A$ ，利用 $\tan A = \frac{1}{2.4}$

得到 $\tan \angle BCB' = \frac{BB'}{B'C} = \frac{1}{2.4}$ ，然后设 $B'B=x$ 米，则 $B'C=2.4x$ 米，在 $Rt\triangle B'CB$

中，利用勾股定理求得答案即可.

【解答】解：如图，点 D 与点 C 重合时， $B'C=BD$ ， $\angle B'CB=\angle CBD=\angle A$ ，

$$\therefore \tan A = \frac{1}{2.4},$$

$$\therefore \tan \angle BCB' = \frac{BB'}{B'C} = \frac{1}{2.4},$$

∴ 设 $B'B = x$ 米, 则 $B'C = 2.4x$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle B'CB$ 中, $\because \angle B'=90^\circ$,

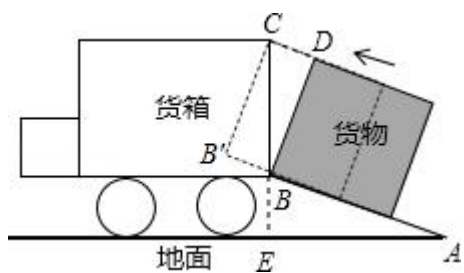
$$\therefore B'B^2 + B'C^2 = BC^2,$$

即: $x^2 + (2.4x)^2 = 2.6^2$,

解得 $x=1$ (负值舍去),

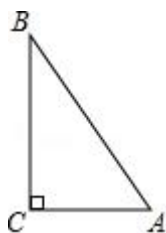
$$\therefore BD = B'C = 2.4 \text{ 米}.$$

故 BD 的长为 2.4 米.



【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题, 平移的性质, 勾股定理, 解题的关键是能够从实际问题中整理出直角三角形, 难度适中.

18. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=3$, $BC=4$ (如图), 将 $\triangle ACB$ 绕点A顺时针方向旋转得 $\triangle ADE$ (点C、B的对应点分别为D、E), 点D恰好落在直线BE上和直线AC交于点F, 则线段AF的长为 $\frac{75}{7}$.



【考点】R2: 旋转的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】利用题意画出图形, 根据旋转的性质得到 $AD=AC=3$, $DE=CB=4$,

$AB=AE$, $\angle ADF=\angle C=90^\circ$, 则利用等腰三角形的性质得 $BD=DE=4$, 设 $DF=x$,

$AF=y$, 接着证明 $\triangle FDA \sim \triangle FCB$, 利用相似比得到 $\frac{x}{3+y} = \frac{y}{4+x} = \frac{3}{4}$, 则

$4y=3x+12$, $4x=3y+9$, 然后解关于 x 、 y 的方程组即可.

【解答】解: 如图, $\because \triangle ACB$ 绕点 A 顺时针方向旋转得 $\triangle ADE$ (点 C 、 B 的对应点分别为 D 、 E),

$\therefore AD=AC=3$, $DE=CB=4$, $AB=AE$, $\angle ADF=\angle C=90^\circ$,

$\therefore BD=DE=4$,

设 $DF=x$, $AF=y$,

$\therefore \angle AFD=\angle BFC$,

$\therefore \triangle FDA \sim \triangle FCB$,

$$\therefore \frac{x}{3+y} = \frac{y}{4+x} = \frac{3}{4},$$

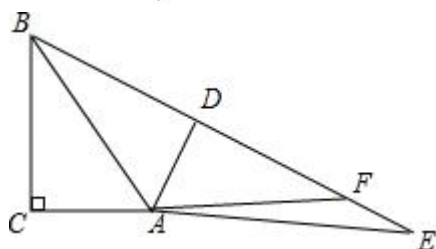
$\therefore 4y=3x+12$, $4x=3y+9$,

$$\therefore 4y=3 \cdot \frac{3y+9}{4} + 12,$$

$$\therefore y = \frac{75}{7},$$

即线段 AF 的长为 $\frac{75}{7}$.

故答案为 $\frac{75}{7}$.



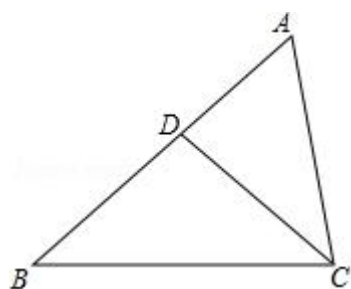
【点评】 本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了相似三角形的判定与性质．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. （10 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACD = \angle B$ ， $AD = 4$ ， $DB = 5$ ．

(1) 求 AC 的长；

(2) 若设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ，试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的线性组合表示向量 $\overrightarrow{CD}$ ．



【考点】 LM：*平面向量；S9：相似三角形的判定与性质．

【专题】 55：几何图形．

【分析】 (1) 由 $\angle ACD = \angle B$ ，公共角 $\angle CAD = \angle BAC$ ，可证 $\triangle CAD \sim \triangle BAC$ ，利用相似比求 AC ．

(2) 由 $AD : BD = 4 : 5$ ，可得 $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{9} \overrightarrow{AB}$ ，又由 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{4}{9} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{a} + \frac{4}{9} (-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{5}{9} \vec{a} + \frac{4}{9} \vec{b}$ ，即可求得答案

【解答】 解：(1) $\because \angle ACD = \angle B$ ， $\angle CAD = \angle BAC$ ，

$\therefore \triangle CAD \sim \triangle BAC$ ，

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ ，即 $\frac{4}{AC} = \frac{AC}{4+5}$ ，解得 $AC^2 = 36$ ，

即 $AC = 6$ （舍去负值），

故 $AC = 6$ ；

(2) $\because AD : BD = 4 : 5$ ，

$$\therefore AD: AB=4: 9,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB},$$

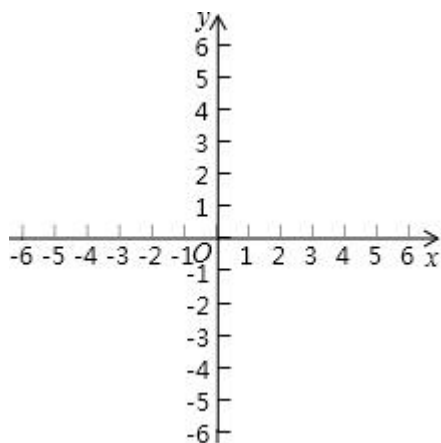
$$\therefore \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{4}{9}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{a}+\frac{4}{9}(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\frac{5}{9}\overrightarrow{a}+\frac{4}{9}\overrightarrow{b},$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质. 关键是要懂得找相似三角形, 利用相似三角形的性质求解.

20. (10 分) 已知一个二次函数的图象经过 A (0, -6)、B (4, -6)、C (6, 0) 三点.

(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 分别联结 AC、BC, 求 $\tan \angle ACB$.



【考点】 H5: 二次函数图象上点的坐标特征; H8: 待定系数法求二次函数解析式; T7: 解直角三角形.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 (1) 设一般式 $y=ax^2+bx+c$, 然后把 A、B、C 点坐标代入得到关于 a、b、c 的方程组, 再解方程组即可;

(2) 作 $BH \perp AC$ 于 H, 如图, 先判断 $\triangle OAC$ 为等腰直角三角形得到 $\angle OAC=45^\circ$,

$AC=\sqrt{2}OA=6\sqrt{2}$, 再利用点 A、B 的坐标特征得到 $AB \parallel x$ 轴, $AB=4$, 则 $\triangle$

ABH 为等腰直角三角形, 所以 $AH=BH=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2\sqrt{2}$, $CH=4\sqrt{2}$, 然后在 Rt

△BCH 中利用正切的定义求解.

【解答】解: (1) 设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$,

$$\text{根据题意得} \begin{cases} c=-6 \\ 16a+4b+c=-6, \\ 36a+6b+c=0 \end{cases}$$

$$\text{即得} \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-2, \\ c=-6 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y=\frac{1}{2}x^2-2x-6;$$

(2) 作 $BH \perp AC$ 于 H, 如图,

$$\therefore OA=OC,$$

$\therefore \triangle OAC$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle OAC=45^\circ, AC=\sqrt{2}OA=6\sqrt{2},$$

$$\therefore A(0, -6), B(4, -6),$$

$$\therefore AB \parallel x \text{ 轴}, AB=4,$$

$$\therefore \angle BAC=45^\circ,$$

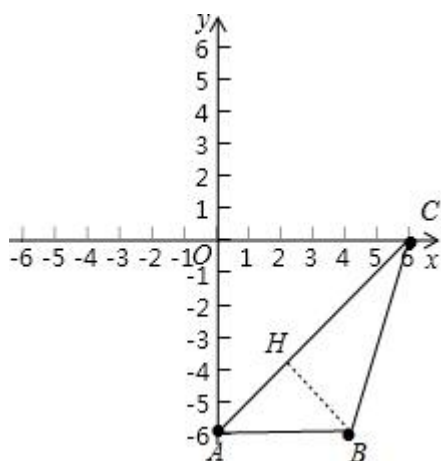
$\therefore \triangle ABH$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AH=BH=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2\sqrt{2},$$

$$\therefore CH=4\sqrt{2},$$

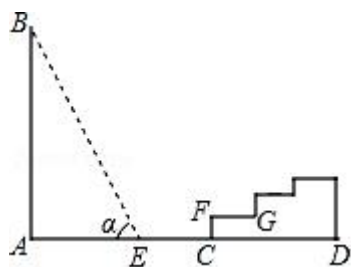
$$\text{在 Rt}\triangle BCH \text{ 中}, \tan \angle HCB=\frac{BH}{CH}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \tan \angle ACB=\frac{1}{2}.$$



【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数的解析式：在利用待定系数法求二次函数关系式时，要根据题目给定的条件，选择恰当的方法设出关系式，从而代入数值求解．一般地，当已知抛物线上三点时，常选择一般式，用待定系数法列三元一次方程组来求解；当已知抛物线的顶点或对称轴时，常设其解析式为顶点式来求解；当已知抛物线与 x 轴有两个交点时，可选择设其解析式为交点式来求解．

21. (10 分) 如图所示，巨型广告牌 AB 背后有一看台 CD ，台阶每层高 0.3 米，且 $AC=17$ 米，现有一只小狗睡在台阶的 FG 这层上晒太阳，设太阳光线与水平地面的夹角为 α ，当 $\alpha=60^\circ$ 时，测得广告牌 AB 在地面上的影长 $AE=10$ 米，过了一会，当 $\alpha=45^\circ$ ，问小狗在 FG 这层是否还能晒到太阳？请说明理由 ($\sqrt{3}$ 取 1.73)．



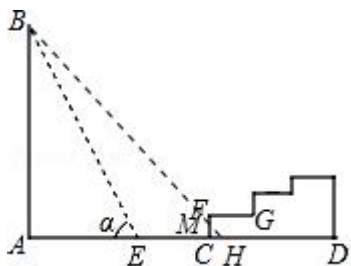
【考点】 T8：解直角三角形的应用；U5：平行投影．

【专题】 55：几何图形．

【分析】 假设没有台阶，当 $\alpha=45^\circ$ 时，从点 B 射下的光线与地面 AD 的交点为点

H, 与 FC 的交点为点 M. 由 $\angle BFA=45^\circ$, 可得 $AH=AB=17.3$ 米, 那么 $CH=AH-AC=0.3$ 米, $CM=CH=0.3$ 米, 所以大楼的影子落在台阶 FC 这个侧面上, 故小狗可以晒到太阳.

【解答】 解: 当 $\alpha=45^\circ$ 时, 小狗仍可以晒到太阳. 理由如下:



假设没有台阶, 当 $\alpha=45^\circ$ 时, 从点 B 射下的光线与地面 AD 的交点为点 H, 与 FC 的交点为点 M.

当 $\alpha=60^\circ$ 时, 在 $Rt\triangle ABE$ 中,

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{10},$$

$$\therefore AB = 10 \cdot \tan 60^\circ = 10\sqrt{3} \approx 10 \times 1.73 = 17.3 \text{ (米)}.$$

$$\therefore \angle BHA = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan 45^\circ = \frac{AB}{AH} = 1,$$

此时的影长 $AH=AB=17.3$ 米,

$$\therefore CH = AH - AC = 17.3 - 17 = 0.3 \text{ 米},$$

$$\therefore CM = CH = 0.3 \text{ 米},$$

$\therefore$ 大楼的影子落在台阶 FC 这个侧面上,

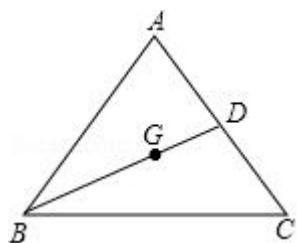
$\therefore$ 小狗能晒到太阳.

故答案为: 能晒到太阳;

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用, 锐角三角函数定义, 理解题意, 将实际问题转化为数学问题是解题的关键.

22. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $BC=12$, $\sin C = \frac{4}{5}$, 点 G 是 $\triangle ABC$

的重心，线段 BG 的延长线交边 AC 于点 D，求 $\angle CBD$ 的余弦值.

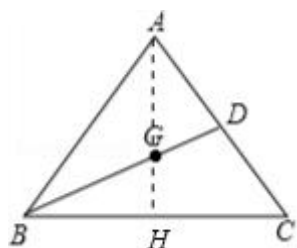


【考点】K5：三角形的重心；KH：等腰三角形的性质；T7：解直角三角形.

【专题】11：计算题；552：三角形.

【分析】如图连接 AG 延长 AG 交 BC 于 H. 想办法求出 BG、BH 的值即可解决问题.

【解答】解：如图连接 AG 延长 AG 交 BC 于 H.



$\because G$ 是重心,

$\therefore BH=CH=6, AG=2GH,$

$\because AB=AC,$

$\therefore AH \perp BC,$

$\because \sin \angle C = \frac{4}{5} = \frac{AH}{AC},$ 设 $AH=4k, AC=5k,$

在 $Rt\triangle AHC$ 中, $\therefore AH^2 + CH^2 = AC^2,$

$\therefore (4k)^2 + 6^2 = (5k)^2,$

解得 $k=2,$

$\therefore AH=8, AC=10,$

$\therefore GH = \frac{1}{3}AH = \frac{8}{3},$

在 $\text{Rt}\triangle BGH$ 中, $BG = \sqrt{6^2 + (\frac{8}{3})^2} = \frac{2}{3}\sqrt{97}$

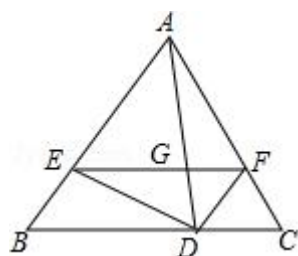
$$\therefore \cos \angle CBD = \frac{BH}{BG} = \frac{9\sqrt{97}}{97};$$

【点评】 此题考查了相似形的综合, 用到的知识点是重心、特殊角的三角函数, 关键是做出辅助线, 构造直角三角形是本题的关键.

23. (12 分) 如图在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 D 、 E 、 F 分别在边 BC 、 AB 、 AC 上, 且 $\angle ADE = \angle B$, $\angle ADF = \angle C$, 线段 EF 交线段 AD 于点 G .

(1) 求证: $AE=AF$;

(2) 若 $\frac{DF}{DE} = \frac{CF}{AE}$, 求证: 四边形 $EBDF$ 是平行四边形.



【考点】 KH: 等腰三角形的性质; L6: 平行四边形的判定; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 14: 证明题.

【分析】 (1) 只要证明 $\triangle BAD \sim \triangle DAE$, 可得 $\frac{AB}{DA} = \frac{AD}{AE}$ 推出 $AD^2 = AE \cdot AB$, 同法可

证: $AD^2 = AF \cdot AC$, 由此即可解决问题;

(2) 分别证明 $DF \parallel BE$, $EF \parallel BC$ 即可;

【解答】 证明: (1) $\because \angle ADE = \angle B$, $\angle BAD = \angle EAD$,

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle DAE,$$

$$\therefore \frac{AB}{DA} = \frac{AD}{AE},$$

$$\therefore AD^2 = AE \cdot AB,$$

同法可证: $AD^2 = AF \cdot AC$,

$$\therefore AE \cdot AB = AF \cdot AC, \quad \because AB = AC,$$

$$\therefore AE = AF.$$

$$(2) \quad \because \triangle BAD \sim \triangle DAE,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ADB = \angle DAC + \angle C,$$

$$\because \angle DFC = \angle DAC + \angle ADF, \quad \angle ADF = \angle C,$$

$$\therefore \angle AED = \angle DFC,$$

$$\therefore \frac{DF}{DE} = \frac{CF}{AE},$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle CFD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDF = \angle B,$$

$$\therefore DF \parallel BE,$$

$$\because AE = AF, \quad AB = AC,$$

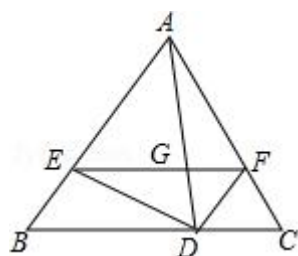
$$\therefore \angle AEF = \angle AFE, \quad \angle B = \angle C,$$

$$\because 2\angle AEF + \angle BAC = 180^\circ, \quad 2\angle B + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle B,$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 EBD F 是平行四边形.

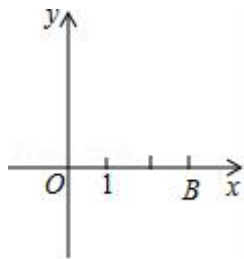


【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质、平行四边形的判定、等腰三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题，属于中考

常考题型.

24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y=kx$ ($k \neq 0$) 沿着 y 轴向上平移 3 个单位长度后, 与 x 轴交于点 B (3, 0), 与 y 轴交于点 C , 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 过点 B 、 C 且与 x 轴的另一个交点为 A .

- (1) 求直线 BC 及该抛物线的表达式;
- (2) 设该抛物线的顶点为 D , 求 $\triangle DBC$ 的面积;
- (3) 如果点 F 在 y 轴上, 且 $\angle CDF=45^\circ$, 求点 F 的坐标.



【考点】HF: 二次函数综合题.

【专题】15: 综合题.

【分析】(1) 直线 $y=kx$ ($k \neq 0$) 平移后的解析式为 $y=kx+3$, 将点 B (3, 0) 代入可求得 k 的值, 从而可得到直线 BC 的解析式; 然后, 求得 C 的坐标, 将点 B 、 C 的坐标代入抛物线的解析式可求得 b 、 c 的值, 从而可得到抛物线的解析式;

(2) 过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴, 过点 B 作 $EF \parallel y$ 轴, 过点 D 作 $DF \parallel x$ 轴. 先求得点 D 的坐标, 然后依据 $S_{\triangle DBC} = S_{\text{四边形 } CEFG} - S_{\triangle CDG} - S_{\triangle BFD} - S_{\triangle BCE}$ 求解即可;

(3) 过点 F 作 $FG \perp CD$, 垂足为 G . 先求得 CD 的长, 然后依据 $\tan \angle OCD = \tan \angle GCF = \frac{1}{2}$, 可得到 $CD = 3FG$, 从而可求得 FG 的长, 然后依据勾股定理可求得 CF 的长, 从而可求得点 F 的坐标.

【解答】解: (1) 将直线 $y=kx$ ($k \neq 0$) 沿着 y 轴向上平移 3 个单位长度, 所得

直线的解析式为 $y=kx+3$,

将点 B (3, 0) 代入得: $3k+3=0$, 解得 $k=-1$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$.

令 $x=0$ 得: $y=3$,

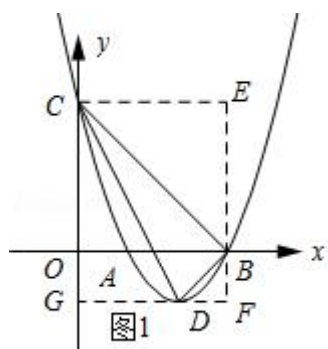
$\therefore C(0, 3)$.

将 B (3, 0), C (0, 3) 代入抛物线的解析式得: $\begin{cases} 9+3b+c=0 \\ c=0 \end{cases}$, 解得: $b=-4$,

$c=3$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+3$.

(2) 如图 1 所示: 过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴, 过点 B 作 $EF \parallel y$ 轴, 过点 D 作 $DF \parallel x$ 轴.

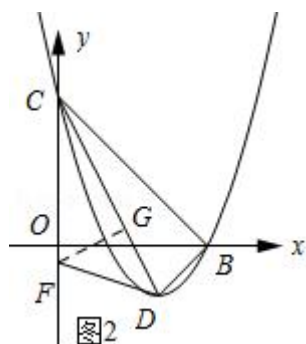


$$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1.$$

$\therefore D(2, -1)$.

$$\therefore S_{\triangle DBC} = S_{\text{四边形} CEFG} - S_{\triangle CDG} - S_{\triangle BFD} - S_{\triangle BCE} = 12 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 3.$$

(3) 如图 2 所示: 过点 F 作 $FG \perp CD$, 垂足为 G.



$$\therefore C(0, 3), D(2, -1),$$

$$\therefore CD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore \tan \angle OCD = \tan \angle GCF = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CG = 2FG.$$

$$\text{又} \because \angle GCF = 45^\circ, \angle FGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle FGD \text{ 为等腰直角三角形,}$$

$$\therefore FG = GD.$$

$$\therefore CD = 3FG,$$

$$\therefore FG = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

$$\therefore CG = 2FG = \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CFG \text{ 中, 依据勾股定理可知: } CF = \frac{10}{3}.$$

$$\therefore OF = CF - OC = \frac{1}{3}.$$

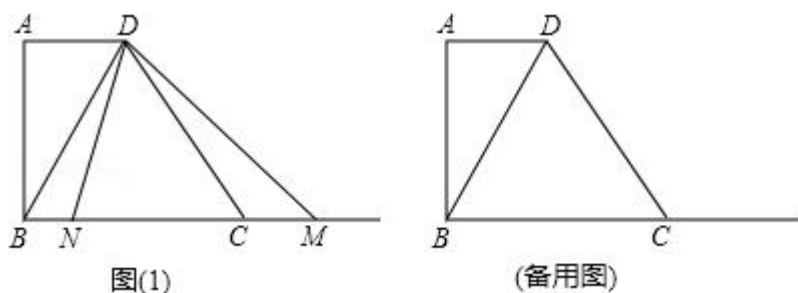
$$\therefore F(0, -\frac{1}{3}).$$

【点评】 本题主要考查的是二次函数的综合应用，解答本题主要应用了待定系数法求一次函数、二次函数的解析式、等腰直角三角形的性质、勾股定理的应用、锐角三角函数的定义，掌握本题的辅助线的作法是解答问题（2）的关键；得到 FG 与 CD 的数量关系是解答问题（3）的关键。

25. (14 分) 已知，在梯形 ABCD 中，AD//BC， $\angle A = 90^\circ$ ，AD=2，AB=4，BC=5，

在射线 BC 任取一点 M ，联结 DM ，作 $\angle MDN = \angle BDC$ ， $\angle MDN$ 的另一边 DN 交直线 BC 于点 N （点 N 在点 M 的左侧）.

- (1) 当 BM 的长为 10 时，求证： $BD \perp DM$ ；
- (2) 如图 (1)，当点 N 在线段 BC 上时，设 $BN=x$ ， $BM=y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出它的定义域；
- (3) 如果 $\triangle DMN$ 是等腰三角形，求 BN 的长.



【考点】LO：四边形综合题.

【专题】15：综合题.

【分析】(1) 先求出 $BG=2$ ， $DG=4$ ，再用勾股定理求出 $CD=5=BC$ ，即可判断出 $\triangle BDM$ 是直角三角形，即可得出结论；

(2) 先判断出 $\angle DBC = \angle MDN$ ，得出 $\triangle MDN \sim \triangle MBD$ ，得出 $DM^2 = BM \times MN$ ，再用勾股定理得 $DM^2 = 16 + (y - 2)^2$ ，代入即可得出结论；

(3) 分三种情况讨论计算即可得出结论.

【解答】解：(1) 如图 1，

过点 D 作 $DG \perp BC$ 于 G ，

$\therefore$ 易知，四边形 $ABGD$ 是矩形， $BG=AD=2$ ， $DG=AB=4$ ，

$\therefore BC=5$ ，

$\therefore CG=BC - BG=3$ ，

在 $Rt\triangle CDG$ 中，根据勾股定理得， $CD=5$ ，

$$\therefore BM=10,$$

$$\therefore CM=BM-BC=5=BC=CD,$$

$\therefore \triangle BDM$ 是直角三角形,

$$\therefore BD \perp DM;$$

(2) 由 (1) 知, $CD=5=BC$,

$$\therefore \angle BDC = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle MDN = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle MDN,$$

$$\therefore \angle BMD = \angle DMN,$$

$$\therefore \triangle MDN \sim \triangle MBD,$$

$$\therefore \frac{DM}{BM} = \frac{MN}{DM},$$

$$\therefore DM^2 = BM \times MN$$

在 $Rt\triangle DMG$ 中, 根据勾股定理得, $DM^2 = DG^2 + MG^2 = 16 + (y-2)^2$,

$$\therefore MN = BM - BN = y - x,$$

$$\therefore 16 + (y-2)^2 = y(y-x),$$

$$\therefore y = \frac{20}{4-x},$$

$$\therefore \angle MDN = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle BDN = \angle CDM,$$

$$\therefore \tan \angle ADB = \tan \angle BDG = \frac{BG}{DG} = \frac{1}{2}, \quad \tan \angle CDG = \frac{CG}{DG} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \angle CDG > \angle BDG = \angle ADB.$$

$$\therefore \angle ADG = \angle ADB + \angle BDG = 90^\circ,$$

当点 N 到点 G 时, $\angle CDG + \angle CDM > \angle ADB + \angle BDN > 90^\circ$,

$\therefore$ 点 M 在 BC 上,

$\therefore x < 4$,

$\therefore 0 \leq x < 4$,

(3) $\because \triangle DMN$ 是等腰三角形,

I、当 $DN=DM$ 时, 此时点 N 在 CB 的延长线上,

同 (2) 的方法得, $y = \frac{20}{x+4}$ ①

$\because DG \perp BC$, $DM=DN$,

$\therefore NG=GM$,

$\because NG=x+2$, $GM=y-2$,

$\therefore y-x=4$ ②,

联立①②得, $x = -4 - 2\sqrt{5}$ (舍) 或 $x = -4 + 2\sqrt{5}$,

$\therefore x = 2\sqrt{5} - 4$;

II、当 $DM=MN$ 时,

$\therefore \angle MDN = \angle DNM$,

$\because \angle CBD = \angle MDN$,

$\therefore \angle CBD = \angle DNM$,

$\therefore$ 点 N 与点 B 重合,

$\therefore BN=0$,

III、当 $MN=DN$ 时,

$\therefore \angle MDN = \angle DMN$,

$$\therefore \angle DBC = \angle MDN,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DMN,$$

$$\therefore DM = BD,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 根据勾股定理得, $BD^2 = AD^2 + AB^2 = 20$,

$$\therefore DM^2 = 16 + (BM - 2)^2,$$

$$\therefore 20 = 16 + (BM - 2)^2,$$

$$\therefore BM = 0 \text{ (舍去)} \text{ 或 } BM = 4,$$

$\therefore$ 如图 2,

点 M 在线段 BC 上,

同 (2) 的方法得, $16 + (BM - 2)^2 = BM(BM - BN)$ ③,

$$\therefore MN = BN + BM \text{ ④},$$

联立③④解得, $BN = 1$.

即: $BN = 0$ 或 1 或 $2\sqrt{5} - 4$.

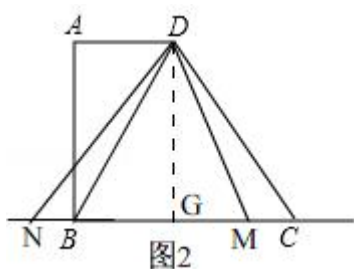


图2

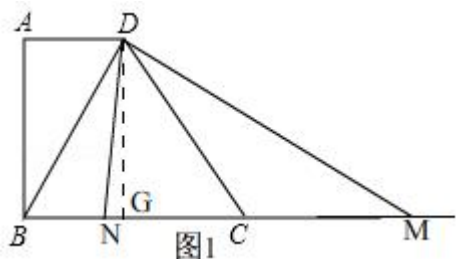
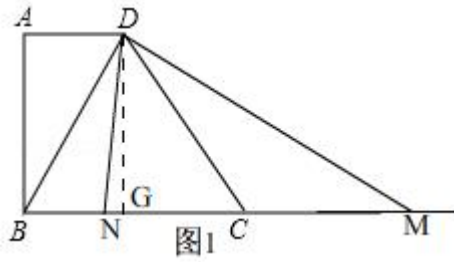


图1



【点评】此题是四边形综合题，主要考查了矩形的判定和性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，解（1）的关键是判断出 $CD=BC=CM$ ，解（2）的关键是判断出 $\triangle MDN \sim \triangle MBD$ ，解（3）的关键是分三种情况讨论．