

2018 年上海市崇明县中考数学一模试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $BC=3$ ，则 $\tan A$ 的值是 ()

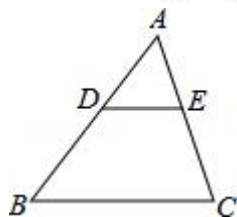
- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

2. (4 分) 抛物线 $y=2(x+3)^2-4$ 的顶点坐标是 ()

- A. (3, 4) B. (3, -4) C. (-3, 4) D. (-3, -4)

3. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在边 AB, AC 上， $DE\parallel BC$ ，已知

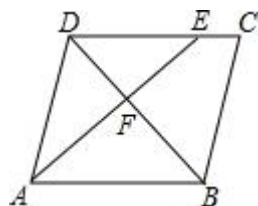
$AE=6$ ， $\frac{AD}{BD}=\frac{3}{4}$ ，则 EC 的长是 ()



- A. 4.5 B. 8 C. 10.5 D. 14

4. (4 分) 如图，在平行四边形 ABCD 中，点 E 在边 DC 上， $DE:EC=3:1$ ，

连接 AE 交 BD 于点 F，则 $\triangle DEF$ 的面积与 $\triangle BAF$ 的面积之比为 ()



- A. 3: 4 B. 9: 16 C. 9: 1 D. 3: 1

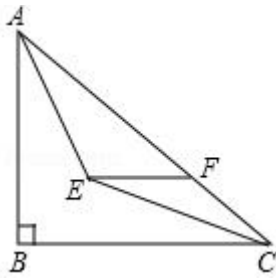
5. (4 分) 已知两圆的半径分别为 2、5，且圆心距等于 3，则两圆位置关系是 ()

- A. 外离 B. 外切 C. 相交 D. 内切

6. (4 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $AB=6$ ， $AC=10$ ， $\angle BAC$ 和 $\angle$

ACB 的平分线相交于点 E，过点 E 作 $EF\parallel BC$ 交 AC 于点 F，那么 EF 的长为

()



A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{10}{3}$

D. $\frac{15}{4}$

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. (4 分) 已知 $2x=3y$ ($y \neq 0$), 那么 $\frac{x+y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (4 分) 计算: $(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) - (\frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. (4 分) 如果一幅地图的比例尺为 1: 50000, 那么实际距离是 3km 的两地在地图上的图距是 $\underline{\hspace{2cm}}$ cm.

10. (4 分) 如果抛物线 $y = (a+1)x^2 - 4$ 有最高点, 那么 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. (4 分) 抛物线 $y = 2x^2 + 4$ 向左平移 2 个单位长度, 得到新抛物线的表达式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

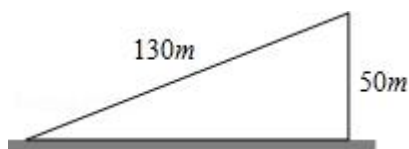
12. (4 分) 已知点 A (x_1 , y_1) 和 B (x_2 , y_2) 是抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + 5$ 上的两点, 如果 $x_1 > x_2 > 4$, 那么 $y_1 \underline{\hspace{1cm}} y_2$. (填“>”、“=”或“<”)

13. (4 分) 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$, 垂足为点 D, 如果 $AC = 6$, $AB = 8$, 那么 AD 的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

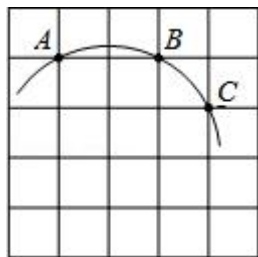
14. (4 分) 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 边长为 3, G 是三角形的重心, 那么 GA 的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. (4 分) 正八边形的中心角等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 度.

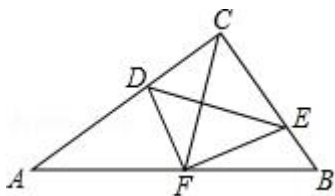
16. (4 分) 如图, 一个斜坡长 130m, 坡顶离水平地面的距离为 50m, 那么这个斜坡的坡度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



17. (4分) 如图, 在 5×5 正方形网格中, 一条圆弧经过 A, B, C 三点, 已知点 A 的坐标是 $(-2, 3)$, 点 C 的坐标是 $(1, 2)$, 那么这条圆弧所在圆的圆心坐标是_____.



18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D, E 分别在 AC, BC 上, 且 $\angle CDE = \angle B$, 将 $\triangle CDE$ 沿 DE 折叠, 点 C 恰好落在 AB 边上的点 F 处. 若 $AC = 8$, $AB = 10$, 则 CD 的长为_____.



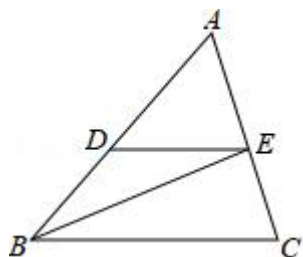
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{\tan 45^\circ}{\cot 30^\circ - 2\sin 45^\circ} - 3\sin 60^\circ + 2\cos 45^\circ$.

20. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 E, 过点 E 作 $ED \parallel BC$ 交 AB 于点 D, 已知 $AD = 5$, $BD = 4$.

(1) 求 BC 的长度;

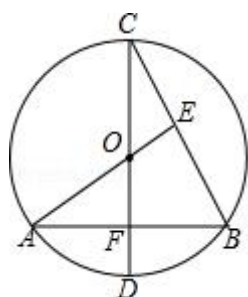
(2) 如果 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$, 那么请用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{CB}$.



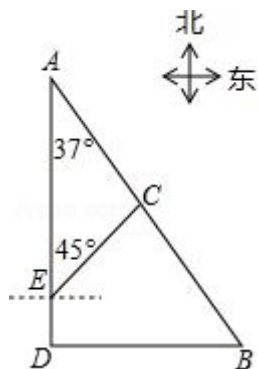
21. (10 分) 如图, CD 为 $\odot O$ 的直径, $CD \perp AB$, 垂足为点 F , $AO \perp BC$, 垂足为点 E , $CE=2$.

(1) 求 AB 的长;

(2) 求 $\odot O$ 的半径.

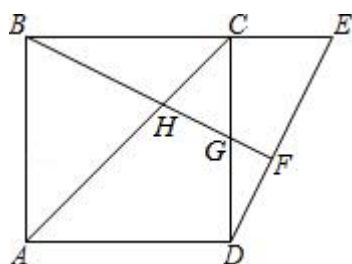


22. (10 分) 如图, 港口 B 位于港口 A 的南偏东 37° 方向, 灯塔 C 恰好在 AB 的中点处. 一艘海轮位于港口 A 的正南方向, 港口 B 的正西方向的 D 处, 它沿正北方向航行 5km 到达 E 处, 测得灯塔 C 在北偏东 45° 方向上, 这时, E 处距离港口 A 有多远? (参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)



23. (12 分) 如图, 点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 BC 延长线上一点, 联结 DE , 过顶点 B 作 $BF \perp DE$, 垂足为 F , BF 交边 DC 于点 G .

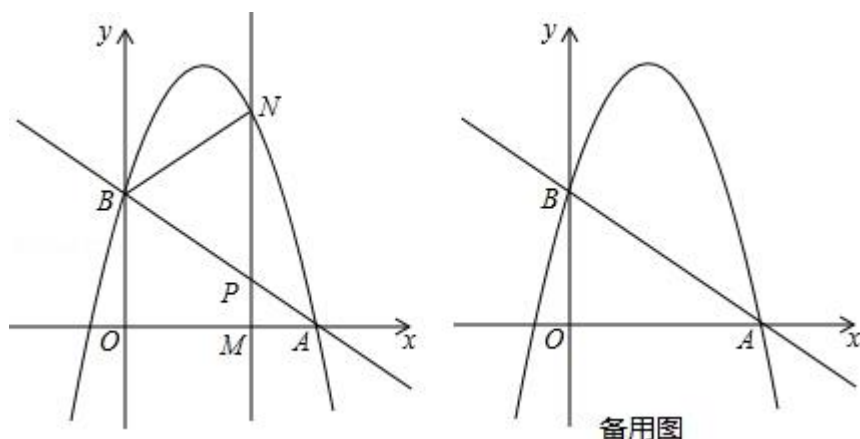
- (1) 求证: $GD \cdot AB = DF \cdot BG$;
- (2) 联结 CF , 求证: $\angle CFB = 45^\circ$.



24. (12 分) 如图, 抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 过点 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$. $M(m, 0)$ 为线段 OA 上一个动点 (点 M 与点 A 不重合), 过点 M 作垂直于 x 轴的

直线与直线 AB 和抛物线分别交于点 P 、 N .

- (1) 求直线 AB 的解析式和抛物线的解析式;
- (2) 如果点 P 是 MN 的中点, 那么求此时点 N 的坐标;
- (3) 如果以 B , P , N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似, 求点 M 的坐标.

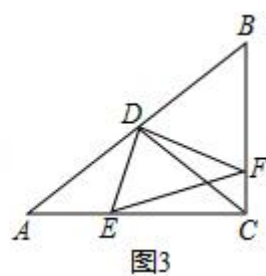
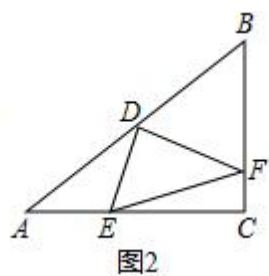
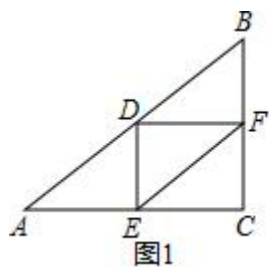


25. (14 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $\cos A = \frac{4}{5}$, D 是 AB 边的中点, E 是 AC 边上一点, 联结 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$ 交 BC 边于点 F , 联结 EF .

- (1) 如图 1, 当 $DE \perp AC$ 时, 求 EF 的长;
- (2) 如图 2, 当点 E 在 AC 边上移动时, $\angle DFE$ 的正切值是否会发生变化, 如

果变化请说出变化情况；如果保持不变，请求出 $\angle DFE$ 的正切值；

- (3) 如图 3，联结 CD 交 EF 于点 Q ，当 $\triangle CQF$ 是等腰三角形时，请直接写出 BF 的长.



2018 年上海市崇明县中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $BC=3$ ，则 $\tan A$ 的值是 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【考点】T1：锐角三角函数的定义.

【分析】根据勾股定理，可得 AC 的长，根据正切函数的定义，可得答案.

【解答】解：由勾股定理，得

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4,$$

由正切函数的定义，得

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4},$$

故选：A.

【点评】本题考查了锐角三角函数，利用正切函数的定义是解题关键.

2. (4 分) 抛物线 $y=2(x+3)^2-4$ 的顶点坐标是 ()

- A. (3, 4) B. (3, -4) C. (-3, 4) D. (-3, -4)

【考点】H3：二次函数的性质.

【专题】1：常规题型；535：二次函数图象及其性质.

【分析】利用抛物线解析式即可求得答案.

【解答】解：

$$\because y=2(x+3)^2-4,$$

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为 $(-3, -4)$,

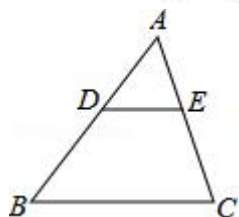
故选：D.

【点评】 本题主要考查二次函数的性质，掌握二次函数的顶点式是解题的关键，

即在 $y=a(x-h)^2+k$ 中，顶点坐标为 (h, k) ，对称轴为 $x=h$.

3. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别在边 AB, AC 上， $DE \parallel BC$ ，已知

$AE=6$, $\frac{AD}{BD}=\frac{3}{4}$ ，则 EC 的长是 ()



A. 4.5

B. 8

C. 10.5

D. 14

【考点】 S4: 平行线分线段成比例.

【分析】 根据平行线分线段成比例定理列式进行计算即可得解.

【解答】 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC},$$

$$\text{即 } \frac{6}{EC} = \frac{3}{4},$$

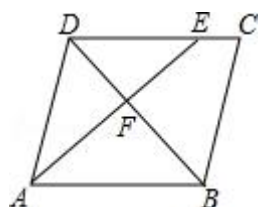
解得 $EC=8$.

故选：B.

【点评】 本题考查了平行线分线段成比例定理，找准对应关系是解题的关键.

4. (4分) 如图，在平行四边形 ABCD 中，点 E 在边 DC 上， $DE:EC=3:1$ ，

连接 AE 交 BD 于点 F，则 $\triangle DEF$ 的面积与 $\triangle BAF$ 的面积之比为 ()



A. 3: 4

B. 9: 16

C. 9: 1

D. 3: 1

【考点】 L5: 平行四边形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】可证明 $\triangle DFE \sim \triangle BFA$ ，根据相似三角形的面积之比等于相似比的平方即可得出答案.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore DC \parallel AB$,

$\therefore \triangle DFE \sim \triangle BFA$,

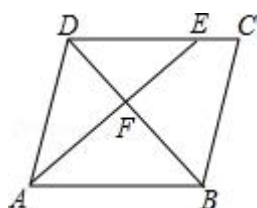
$\therefore DE: EC = 3: 1$,

$\therefore DE: DC = 3: 4$,

$\therefore DE: AB = 3: 4$,

$\therefore S_{\triangle DFE}: S_{\triangle BFA} = 9: 16$.

故选：B.



【点评】本题考查了平行四边形的性质以及相似三角形的判定和性质，注：相似三角形的面积之比等于相似比的平方.

5. (4 分) 已知两圆的半径分别为 2、5，且圆心距等于 3，则两圆位置关系是()

- A. 外离 B. 外切 C. 相交 D. 内切

【考点】MJ：圆与圆的位置关系.

【分析】由两圆的半径分别为 2 和 5，圆心距为 3，根据两圆位置关系与圆心距 d ，两圆半径 R ， r 的数量关系间的联系即可得出两圆位置关系.

【解答】解： $\because$ 两圆的半径分别为 2 和 5，圆心距为 3，

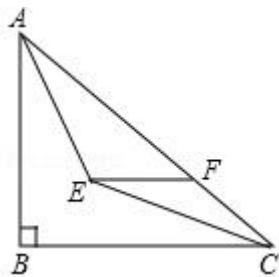
又 $\because 5 - 2 = 3$,

$\therefore$ 两圆的位置关系是内切.

故选：D.

【点评】 此题考查了圆与圆的位置关系. 注意掌握两圆位置关系与圆心距 d , 两圆半径 R, r 的数量关系间的联系是解此题的关键.

6. (4 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $AB=6$, $AC=10$, $\angle BAC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 E , 过点 E 作 $EF\parallel BC$ 交 AC 于点 F , 那么 EF 的长为 ()



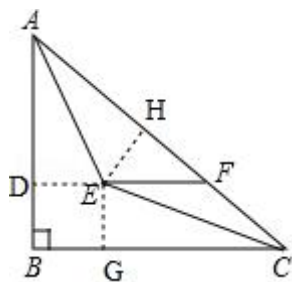
- A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{15}{4}$

【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质; KF: 角平分线的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 553: 图形的全等; 55D: 图形的相似.

【分析】 延长 FE 交 AB 于点 D , 作 $EG\perp BC$ 、作 $EH\perp AC$, 由 $EF\parallel BC$ 可证四边形 $BDEG$ 是矩形, 由角平分线可得 $ED=EH=EG$ 、 $\angle DAE=\angle HAE$, 从而知四边形 $BDEG$ 是正方形, 再证 $\triangle DAE\cong\triangle HAE$ 、 $\triangle CGE\cong\triangle CHE$ 得 $AD=AH$ 、 $CG=CH$, 由 $BC=8$, 可设 $BD=BG=x$, 则 $AD=AH=6-x$ 、 $CG=CH=8-x$, 得 $x=2$, 即 $BD=DE=2$ 、 $AD=4$, 再证 $\triangle ADF\sim\triangle ABC$ 可得 $DF=\frac{16}{3}$, 据此得出 $EF=DF-DE=\frac{10}{3}$.

【解答】 解: 如图, 延长 FE 交 AB 于点 D , 作 $EG\perp BC$ 于点 G , 作 $EH\perp AC$ 于点 H ,



$\therefore EF \parallel BC$ 、 $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore FD \perp AB$,

$\therefore EG \perp BC$,

$\therefore$ 四边形 BDEG 是矩形,

$\therefore AE$ 平分 $\angle BAC$ 、 CE 平分 $\angle ACB$,

$\therefore ED = EH = EG$, $\angle DAE = \angle HAE$,

$\therefore$ 四边形 BDEG 是正方形,

在 $\triangle DAE$ 和 $\triangle HAE$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle HAE \\ AE = AE \\ \angle ADE = \angle AHE \end{cases},$$

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle HAE$ (SAS),

$\therefore AD = AH$,

同理 $\triangle CGE \cong \triangle CHE$,

$\therefore CG = CH$,

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

设 $BD = BG = x$, 则 $AD = AH = 6 - x$ 、 $CG = CH = 8 - x$,

$$\therefore 6 - x + 8 - x = 10,$$

解得: $x = 2$,

$$\therefore BD = DE = 2, AD = 4,$$

$\therefore DF \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABC$,

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BC}$, 即 $\frac{4}{6} = \frac{DF}{8}$,

解得: $DF = \frac{16}{3}$,

则 $EF = DF - DE = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$.

故选: C.

【点评】 本题主要考查相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质及正方形的判定与性质, 熟练掌握角平分线的性质和正方形的判定与性质、相似三角形的判定与性质是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 已知 $2x=3y$ ($y \neq 0$), 那么 $\frac{x+y}{y} = \frac{5}{2}$.

【考点】 S1: 比例的性质.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 由已知得出比例式, 表示出 x , y , 代入解答即可.

【解答】 解: 由 $2x=3y$ ($y \neq 0$),

可得: $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$,

所以 $\frac{x+y}{y} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$,

故答案为: $\frac{5}{2}$

【点评】 此题考查了比例线段, 熟练掌握比例的性质是解本题的关键.

8. (4 分) 计算: $(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b})-(\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{b}) = -\vec{a}+\vec{b}$.

【考点】 LM: *平面向量.

【专题】 5: 特定专题.

【分析】 去括号, 根据平面向量的加法法则计算即可;

【解答】 解：原式 $= (\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}) - (\frac{3}{2}\vec{a} - 2\vec{b})$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$= -\vec{a} + \vec{b}$$

故答案为 $-\vec{a} + \vec{b}$

【点评】 本题考查平面向量，解题的关键是正五平面向量的加法法则，属于中考基础题.

9. (4 分) 如果一幅地图的比例尺为 1: 50000, 那么实际距离是 3km 的两地在地图上的图距是 6 cm.

【考点】 S2: 比例线段.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 设两地在地图上的图距是 xcm, 然后根据比例尺的定义, 即可得方程

得: $\frac{x}{300000} = \frac{1}{50000}$, 解此方程即可求得答案, 注意统一单位.

【解答】 解: 设两地在地图上的图距是 xcm,

根据题意得: $\frac{x}{300000} = \frac{1}{50000}$,

$\therefore x = 6\text{cm}$

故答案为: 6.

【点评】 此题考查了比例线段. 此题难度不大, 解题的关键是理解题意, 根据比例尺的定义列方程, 注意统一单位.

10. (4 分) 如果抛物线 $y = (a+1)x^2 - 4$ 有最高点, 那么 a 的取值范围是 $a < -1$.

【考点】 H7: 二次函数的最值.

【专题】 53: 函数及其图象.

【分析】 由于抛物线 $y = (a+1)x^2 - 4$ 有最高点, 这要求抛物线必须开口向下,

由此可以确定 a 的范围.

【解答】 解: $\because$ 抛物线 $y = (a+1)x^2 - 4$ 有最高点,

$$\therefore a+1 < 0,$$

$$\text{即 } a < -1.$$

故答案为 $a < -1$

【点评】 本题主要考查二次函数的最值的知识点, 解答此题要掌握二次函数图象的特点, 本题比较基础.

11. (4 分) 抛物线 $y=2x^2+4$ 向左平移 2 个单位长度, 得到新抛物线的表达式为

$$y=2(x+2)^2+4.$$

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】 53: 函数及其图象.

【分析】 根据题意易得新抛物线的顶点, 根据顶点式及平移前后二次项的系数不变可得新抛物线的解析式.

【解答】 解: $\because y=2x^2+4=2(x+0)^2+4$,

$\therefore$ 抛物线 $y=2x^2+4$ 的顶点坐标是 $(0, 4)$,

$\therefore$ 将抛物线 $y=2x^2+4$ 向左平移 2 个单位长度后的顶点坐标是 $(-2, 4)$,

则平移后新抛物线的解析式为: $y=2(x+2)^2+4$.

故答案是: $y=2(x+2)^2+4$

【点评】 主要考查了函数图象的平移, 要求熟练掌握平移的规律: 左加右减, 上加下减. 并用规律求函数解析式.

12. (4 分) 已知点 A (x_1, y_1) 和 B (x_2, y_2) 是抛物线 $y=2(x-3)^2+5$ 上的两点, 如果 $x_1 > x_2 > 4$, 那么 y_1 $>$ y_2 . (填“ $>$ ”、“ $=$ ”或“ $<$ ”)

【考点】 H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【专题】 53: 函数及其图象.

【分析】 根据二次函数的性质得到抛物线 $y=2(x-3)^2+5$ 的开口向上，有最小值为 5，对称轴为直线 $x=3$ ，则在对称轴右侧， y 随 x 的增大而增大，所以 $x_1 > x_2$ 时， $y_1 > y_2$.

【解答】 解： $\because y=2(x-3)^2+5$,

$\therefore a=2 > 0$ ，有最小值为 5，

$\therefore$ 抛物线开口向上，

$\therefore$ 抛物线 $y=2(x-3)^2+5$ 对称轴为直线 $x=3$ ，

$\therefore x_1 > x_2 > 4$ ，

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为： $>$

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象为抛物线，则抛物线上的点的坐标满足其解析式；当 $a > 0$ ，抛物线开口向上；对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$ ，在对称轴左侧， y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧， y 随 x 的增大而增大.

13. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ，如果 $AC=6$ ， $AB=8$ ，那么 AD 的长度为 4.8.

【考点】 T7：解直角三角形.

【专题】 552：三角形.

【分析】 首先利用勾股定理得出 BC 的长，再利用三角形面积求法得出 AD 的长.

【解答】 解： $\because \angle BAC=90^\circ$ ， $AB=8$ ， $AC=6$ ，

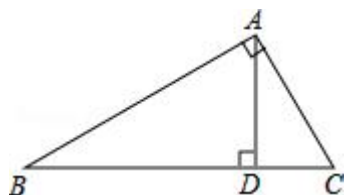
$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10,$$

$\therefore AD \perp BC$,

$$\therefore 6 \times 8 = AD \times 10,$$

解得：AD=4.8.

故答案为：4.8.



【点评】此题主要考查了勾股定理以及三角形面积求法，得出BC的长是解题关键.

14. (4分) 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，边长为3，G是三角形的重心，那么GA的长度为 $\sqrt{3}$.

【考点】K5：三角形的重心；KK：等边三角形的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】延长AG交BC于D，根据重心的概念得到 $AD \perp BC$ ， $BD=DC=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$ ，根据勾股定理求出AD，根据重心的概念计算即可.

【解答】解：延长AG交BC于D，

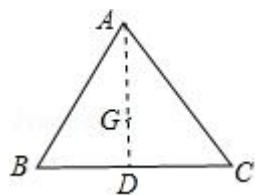
$\because$ G是三角形的重心，

$$\therefore AD \perp BC, BD=DC=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2},$$

$$\text{由勾股定理得, } AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore GA=\frac{2}{3}AD=\sqrt{3},$$

故答案为： $\sqrt{3}$.



【点评】本题考查的是等边三角形的性质、三角形的重心的概念，三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的2

倍.

15. (4 分) 正八边形的中心角等于 45 度.

【考点】MM: 正多边形和圆.

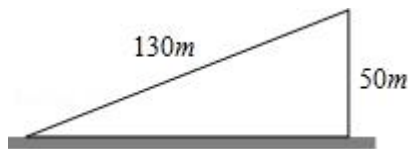
【分析】根据中心角是正多边形相邻的两个半径的夹角来解答.

【解答】解: 正八边形的中心角等于 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$;

故答案为 45.

【点评】本题考查了正多边形和圆的知识, 解题的关键是牢记中心角的定义及求法.

16. (4 分) 如图, 一个斜坡长 130m, 坡顶离水平地面的距离为 50m, 那么这个斜坡的坡度为 1: 2.4.



【考点】T9: 解直角三角形的应用 – 坡度坡角问题.

【专题】1: 常规题型.

【分析】根据一个斜坡长 130m, 坡顶离水平地面的距离为 50m, 根据勾股定理可以求得斜坡的水平距离, 从而可以求得斜坡的坡度, 本题得以解决.

【解答】解: $\because$ 一个斜坡长 130m, 坡顶离水平地面的距离为 50m,

$\therefore$ 这个斜坡的水平距离为: $\sqrt{130^2 - 50^2} = 120\text{m}$,

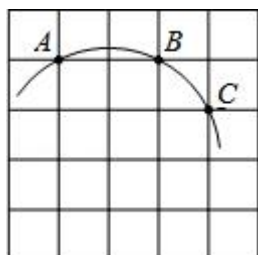
$\therefore$ 这个斜坡的坡度为: $50: 120 = 1: 2.4$.

故答案为 1: 2.4.

【点评】本题考查解直角三角形的应用 – 坡度坡角问题, 解题的关键是明确坡度的定义. 坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比, 又叫做坡比, 它是一个比值, 反映了斜坡的陡峭程度, 一般用 i 表示, 常写成 $i = 1: m$ 的形式.

17. (4 分) 如图, 在 5×5 正方形网格中, 一条圆弧经过 A, B, C 三点, 已知

点 A 的坐标是 $(-2, 3)$ ，点 C 的坐标是 $(1, 2)$ ，那么这条圆弧所在圆的圆心坐标是 $(-1, 1)$ 。

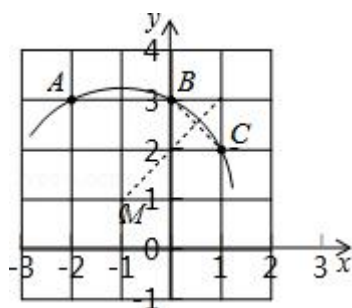


【考点】 D5：坐标与图形性质； M2：垂径定理.

【专题】 531：平面直角坐标系.

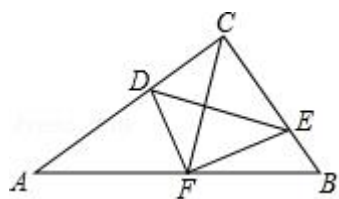
【分析】 根据图形作线段 AB 和 BC 的垂直平分线，两线的交点即为圆心，根据图形得出即可.

【解答】 解：如图线段 AB 的垂直平分线和线段 CD 的垂直平分线的交点 M，即圆心的坐标是 $(-1, 1)$ ，
故答案为 $(-1, 1)$



【点评】 本题考查了垂径定理，线段垂直平分线性质的应用，数形结合是解答此题的关键.

18. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，点 D, E 分别在 AC, BC 上，且 $\angle CDE=\angle B$ ，将 $\triangle CDE$ 沿 DE 折叠，点 C 恰好落在 AB 边上的点 F 处. 若 $AC=8$ ， $AB=10$ ，则 CD 的长为 $\frac{25}{8}$.



【考点】KQ：勾股定理；PB：翻折变换（折叠问题）.

【专题】55D：图形的相似.

【分析】解法一：根据 D，C，E，F 四点共圆，可得 $\angle CDE = \angle CFE = \angle B$ ，再根据 $CE = FE$ ，可得 $\angle CFE = \angle FCE$ ，进而根据 $\angle B = \angle FCE$ ，得出 $CF = BF$ ，同理可得 $CF = AF$ ，由此可得 F 是 AB 的中点，求得 $CF = \frac{1}{2}AB = 5$ ，再判定 $\triangle CDF \sim \triangle CFA$ ，得到 $CF^2 = CD \times CA$ ，进而得出 CD 的长.

解法二：由对称性可知 $CF \perp DE$ ，可得 $\angle CDE = \angle ECF = \angle B$ ，得出 $CF = BF$ ，同理可得 $CF = AF$ ，由此可得 F 是 AB 的中点，求得 $CF = 5$ ，再判定 $\triangle CDF \sim \triangle CFA$ ，得到 $CF^2 = CD \times CA$ ，进而得出 CD 的长.

【解答】解：由折叠可得， $\angle DCE = \angle DFE = 90^\circ$ ，

$\therefore$ D，C，E，F 四点共圆，

$\therefore \angle CDE = \angle CFE = \angle B$ ，

又 $\because CE = FE$ ，

$\therefore \angle CFE = \angle FCE$ ，

$\therefore \angle B = \angle FCE$ ，

$\therefore CF = BF$ ，

同理可得， $CF = AF$ ，

$\therefore AF = BF$ ，即 F 是 AB 的中点，

$\therefore$ Rt $\triangle ABC$ 中， $CF = \frac{1}{2}AB = 5$ ，

由 D，C，E，F 四点共圆，可得 $\angle DFC = \angle DEC$ ，

由 $\angle CDE = \angle B$, 可得 $\angle DEC = \angle A$,

$$\therefore \angle DFC = \angle A,$$

又 $\because \angle DCF = \angle FCA$,

$$\therefore \triangle CDF \sim \triangle CFA,$$

$$\therefore CF^2 = CD \times CA, \text{ 即 } 5^2 = CD \times 8,$$

$$\therefore CD = \frac{25}{8},$$

故答案为: $\frac{25}{8}$.

解: 由对称性可知 $CF \perp DE$,

又 $\because \angle DCE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CDE = \angle ECF = \angle B,$$

$$\therefore CF = BF,$$

同理可得 $CF = AF$,

$\therefore F$ 是 AB 的中点,

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AB = 5,$$

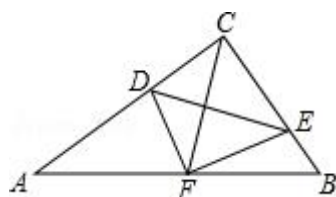
又 $\because \angle DFC = \angle ACF = \angle A$, $\angle DCF = \angle FCA$,

$$\therefore \triangle CDF \sim \triangle CFA,$$

$$\therefore CF^2 = CD \times CA, \text{ 即 } 5^2 = CD \times 8,$$

$$\therefore CD = \frac{25}{8},$$

故答案为: $\frac{25}{8}$.



【点评】本题主要考查了折叠问题，四点共圆以及相似三角形的判定与性质的运用，解决问题的关键是根据四点共圆以及等量代换得到 F 是 AB 的中点.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10 分) 计算： $\frac{\tan 45^\circ}{\cot 30^\circ - 2\sin 45^\circ} - 3\sin 60^\circ + 2\cos 45^\circ$.

【考点】T5：特殊角的三角函数值.

【专题】55E：解直角三角形及其应用.

【分析】根据特殊角三角函数值，可得答案.

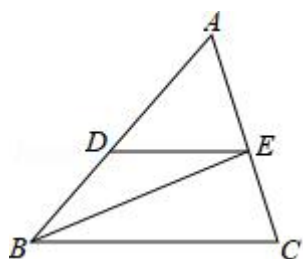
【解答】解：原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= \sqrt{3} + \sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3} + \sqrt{2}$
 $= 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

【点评】本题考查了特殊角三角函数值，熟记特殊角三角函数值是解题关键.

20. (10 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 E，过点 E 作 $ED \parallel BC$ 交 AB 于点 D，已知 $AD=5$ ， $BD=4$.

(1) 求 BC 的长度；

(2) 如果 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$ ，那么请用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{CB}$.



【考点】KJ：等腰三角形的判定与性质；LM：*平面向量.

【专题】5：特定专题.

【分析】(1) 首先证明 $BD=DE=4$ ，再根据 $ED \parallel BC$ ，可得 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$ ，由此即可解决问题；

(2) 首先证明 $\overrightarrow{CB} = \frac{9}{5}\overrightarrow{ED}$, 只要求出 $\overrightarrow{ED}$ 即可解决问题;

【解答】解: (1) $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

$$\because ED \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DEB,$$

$$\therefore BD = DE = 4,$$

$$\because ED \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\text{又} \because AD = 5, BD = 4 \therefore AB = 9,$$

$$\therefore \frac{4}{BC} = \frac{5}{9} \therefore BC = \frac{36}{5}.$$

$$(2) \because ED \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{9},$$

$$\therefore BC = \frac{9}{5}DE,$$

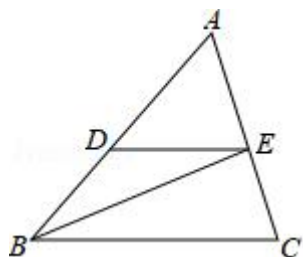
又 $\because \overrightarrow{ED}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 同向,

$$\therefore \overrightarrow{CB} = \frac{9}{5}\overrightarrow{ED}.$$

$$\because \overrightarrow{AD} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AE} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CB} = \frac{9}{5}\vec{a} - \frac{9}{5}\vec{b}.$$

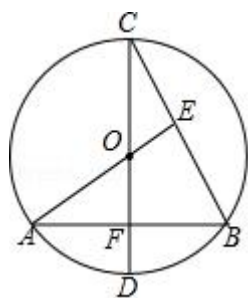


【点评】 本题考查平面向量、等腰三角形的判定和性质、平行线分线段成比例定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

21. (10 分) 如图， CD 为 $\odot O$ 的直径， $CD \perp AB$ ，垂足为点 F ， $AO \perp BC$ ，垂足为点 E ， $CE=2$.

(1) 求 AB 的长;

(2) 求 $\odot O$ 的半径.



【考点】 M2: 垂径定理.

【专题】 559: 圆的有关概念及性质.

【分析】 (1) 只要证明 $\triangle AOF \cong \triangle COE$ ，推出 $CE=AF=2$ ，再根据垂径定理可得

$$B=2AF;$$

(2) 只要证明 $\angle A=30^\circ$ ，可得 $\cos A = \frac{AF}{OA}$ ，由此即可解决问题;

【解答】 解: (1) $\because CD \perp AB$ ， $AO \perp BC$

$$\therefore \angle AFO = \angle CEO = 90^\circ,$$

在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AFO = \angle CEO \\ \angle AOF = \angle COE, \\ AO = CO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE,$$

$$\therefore CE = AF,$$

$$\therefore CE = 2,$$

$$\therefore AF = 2,$$

$$\therefore CD \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径, } CD \perp AB,$$

$$\therefore AF = BF = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore AB = 4.$$

$$(2) \because AO \text{ 是 } \odot O \text{ 的半径, } AO \perp BC$$

$$\therefore CE = BE = 2,$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB,$$

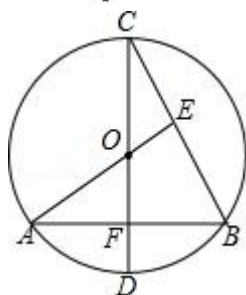
$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\text{又 } \because \angle AFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \cos A = \frac{AF}{AO} = \frac{2}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

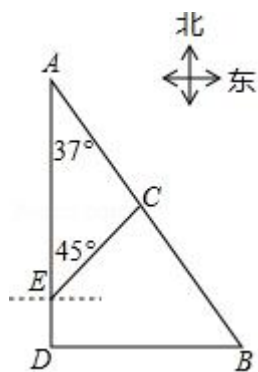
$$\therefore AO = \frac{4}{3}\sqrt{3}, \text{ 即 } \odot O \text{ 的半径是 } \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$



【点评】 本题考查全等三角形的性质、垂径定理、锐角时函数等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，证明 $\angle A = 30^\circ$ 是解决问题 2 的关键.

22. (10 分) 如图，港口 B 位于港口 A 的南偏东 37° 方向，灯塔 C 恰好在 AB

的中点处. 一艘海轮位于港口 A 的正南方向, 港口 B 的正西方向的 D 处, 它沿正北方向航行 5km 到达 E 处, 测得灯塔 C 在北偏东 45° 方向上, 这时, E 处距离港口 A 有多远? (参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)



【考点】 TB: 解直角三角形的应用 – 方向角问题.

【分析】 如图作 $CH \perp AD$ 于 H. 设 $CH = x$ km, 在 $\text{Rt} \triangle ACH$ 中, 可得

$AH = \frac{CH}{\tan 37^\circ} = \frac{x}{\tan 37^\circ}$, 在 $\text{Rt} \triangle CEH$ 中, 可得 $CH = EH = x$, 由 $CH \parallel BD$, 推出 $\frac{AH}{HD} = \frac{AC}{CB}$, 由 $AC = CB$, 推出 $AH = HD$, 可得 $\frac{x}{\tan 37^\circ} = x + 5$, 求出 x 即可解决问题.

【解答】 解: 如图作 $CH \perp AD$ 于 H. 设 $CH = x$ km,

在 $\text{Rt} \triangle ACH$ 中, $\angle A = 37^\circ$, $\therefore \tan 37^\circ = \frac{CH}{AH}$,

$$\therefore AH = \frac{CH}{\tan 37^\circ} = \frac{x}{\tan 37^\circ},$$

在 $\text{Rt} \triangle CEH$ 中, $\therefore \angle CEH = 45^\circ$,

$$\therefore CH = EH = x,$$

$$\therefore CH \perp AD, BD \perp AD,$$

$$\therefore CH \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{AH}{HD} = \frac{AC}{CB},$$

$$\therefore AC = CB,$$

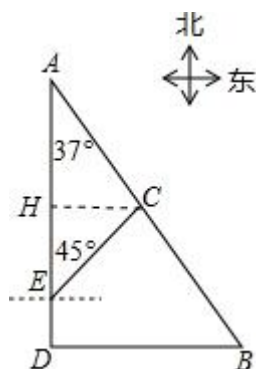
$$\therefore AH=HD,$$

$$\therefore \frac{x}{\tan 37^\circ} = x+5,$$

$$\therefore x = \frac{5 \cdot \tan 37^\circ}{1 - \tan 37^\circ} \approx 15,$$

$$\therefore AE = AH + HE = \frac{15}{\tan 37^\circ} + 15 \approx 35 \text{ km},$$

$\therefore$ E 处距离港口 A 有 35km.

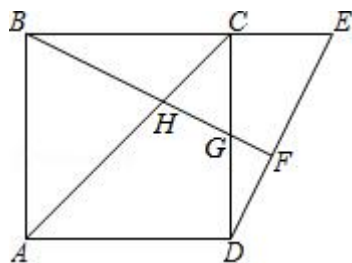


【点评】 本题考查了解直角三角形的应用——方向角问题，结合航海中的实际问题，将解直角三角形的相关知识有机结合，体现了数学应用于实际生活的思想.

23. (12 分) 如图，点 E 是正方形 ABCD 的边 BC 延长线上一点，联结 DE，过顶点 B 作 $BF \perp DE$ ，垂足为 F，BF 交边 DC 于点 G.

(1) 求证: $GD \cdot AB = DF \cdot BG$;

(2) 联结 CF，求证: $\angle CFB = 45^\circ$.



【考点】 LE: 正方形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 14: 证明题; 55D: 图形的相似.

【分析】 (1) 由 $\angle BCD = \angle GFD = 90^\circ$ 、 $\angle BGC = \angle FGD$ 可证得 $\triangle BGC \sim \triangle DGF$,

即可知 $\frac{BG}{DG} = \frac{BC}{DF}$, 根据 $AB=BC$ 即可得证;

(2) 连接 BD , 由 $\triangle BGC \sim \triangle DGF$ 知 $\frac{BG}{DG} = \frac{CG}{FG}$, 即 $\frac{BG}{CG} = \frac{DG}{FG}$, 根据 $\angle BGD = \angle CGF$

可证 $\triangle BGD \sim \triangle CGF$ 得 $\angle BDG = \angle CFG$, 再由 $\angle BDG = \frac{1}{2} \angle ADC = 45^\circ$ 即可得证.

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = BC$,

$\therefore BF \perp DE$,

$\therefore \angle GFD = 90^\circ$,

$\therefore \angle BCD = \angle GFD$,

$\therefore \angle BGC = \angle FGD$,

$\therefore \triangle BGC \sim \triangle DGF$,

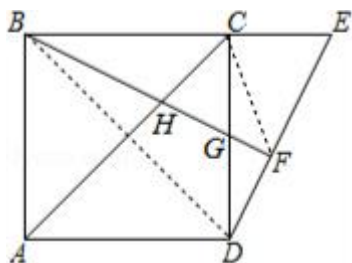
$\therefore \frac{BG}{DG} = \frac{BC}{DF}$,

$\therefore DG \cdot BC = DF \cdot BG$,

$\therefore AB = BC$,

$\therefore DG \cdot AB = DF \cdot BG$;

(2) 如图, 连接 BD 、 CF ,



$\therefore \triangle BGC \sim \triangle DGF$,

$\therefore \frac{BG}{DG} = \frac{CG}{FG}$,

$\therefore \frac{BG}{CG} = \frac{DG}{FG}$,

又 $\because \angle BGD = \angle CGF$,

$\therefore \triangle BGD \sim \triangle CGF$,

$\therefore \angle BDG = \angle CFG$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, BD 是对角线,

$\therefore \angle BDG = \frac{1}{2} \angle ADC = 45^\circ$,

$\therefore \angle CFG = 45^\circ$.

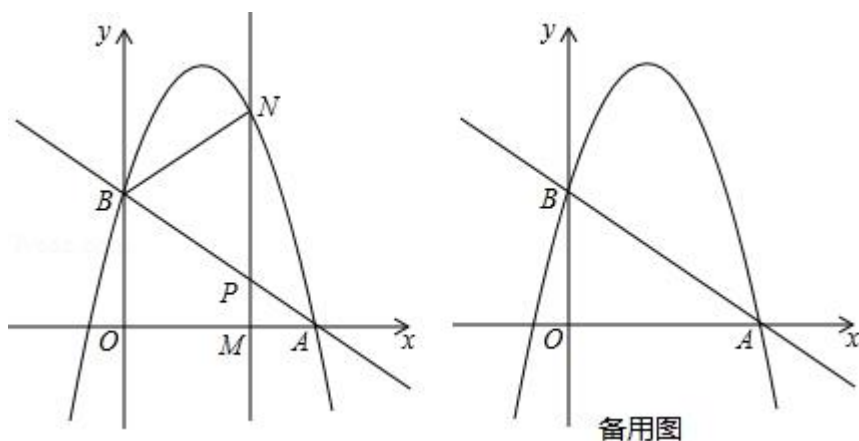
【点评】 本题主要考查相似三角形的判定和性质及正方形的性质, 解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定和性质.

24. (12 分) 如图, 抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 过点 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$. $M(m, 0)$ 为线段 OA 上一个动点 (点 M 与点 A 不重合), 过点 M 作垂直于 x 轴的直线与直线 AB 和抛物线分别交于点 P 、 N .

(1) 求直线 AB 的解析式和抛物线的解析式;

(2) 如果点 P 是 MN 的中点, 那么求此时点 N 的坐标;

(3) 如果以 B , P , N 为顶点的三角形与 $\triangle APM$ 相似, 求点 M 的坐标.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【专题】 15: 综合题.

【分析】 (1) 利用待定系数法求直线和抛物线解析式;

(2) 先表示出 $N(m, -\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2)$, $P(m, -\frac{2}{3}m + 2)$, 则计算出 $NP = -\frac{4}{3}m^2 + 4m$, $PM = -\frac{2}{3}m + 2$, 则利用 $NP = PM$ 得到 $-\frac{4}{3}m^2 + 4m = -\frac{2}{3}m + 2$, 然后解方程求出 m 即可得到 N 点坐标;

(3) 利用两点间的距离公式计算出 $AB = \sqrt{13}$, $BP = \frac{\sqrt{13}}{3}m$, $NP = -\frac{4}{3}m^2 + 4m$, 由于 $\angle BPN = \angle ABO$, 利用相似三角形的判定方法, 当 $\frac{PB}{OB} = \frac{PN}{BA}$ 时, $\triangle BPN \sim \triangle OBA$, 则 $\triangle BPN \sim \triangle MPA$, 即 $\frac{\sqrt{13}}{3}m : 2 = (-\frac{4}{3}m^2 + 4m) : \sqrt{13}$; 当 $\frac{PB}{BA} = \frac{PN}{OB}$ 时, $\triangle BPN \sim \triangle ABO$, 则 $\triangle BPN \sim \triangle APM$, 即 $\frac{\sqrt{13}}{3}m : \sqrt{13} = (-\frac{4}{3}m^2 + 4m) : 2$, 然后分别解关于 m 的方程即可得到对应的 M 点的坐标.

【解答】解: (1) 设直线 AB 的解析式为 $y = px + q$,

把 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$ 代入得 $\begin{cases} 3p + q = 0 \\ q = 2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} p = -\frac{2}{3} \\ q = 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = -\frac{2}{3}x + 2$;

把 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x^2 + bx + c$ 得 $\begin{cases} -\frac{4}{3} \times 3^2 + 3b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b = \frac{10}{3} \\ c = 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 2$;

(2) $\because M(m, 0)$, $MN \perp x$ 轴,

$\therefore N(m, -\frac{4}{3}m^2 + \frac{10}{3}m + 2)$, $P(m, -\frac{2}{3}m + 2)$,

$\therefore NP = -\frac{4}{3}m^2 + 4m$, $PM = -\frac{2}{3}m + 2$,

而 $NP = PM$,

$\therefore -\frac{4}{3}m^2 + 4m = -\frac{2}{3}m + 2$, 解得 $m_1 = 3$ (舍去), $m_2 = \frac{1}{2}$,

$\therefore N$ 点坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{10}{3})$;

(3) $\because A(3, 0)$, $B(0, 2)$, $P(m, -\frac{2}{3}m + 2)$,

$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $BP = \sqrt{m^2 + (-\frac{2}{3}m + 2 - 2)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}m$,

$$\text{而 } NP = -\frac{4}{3}m^2 + 4m,$$

$$\therefore MN \parallel OB,$$

$$\therefore \angle BPN = \angle ABO,$$

$$\text{当 } \frac{PB}{OB} = \frac{PN}{BA} \text{ 时, } \triangle BPN \sim \triangle OBA, \text{ 则 } \triangle BPN \sim \triangle MPA, \text{ 即 } \frac{\sqrt{13}}{3}m : 2 = \left(-\frac{4}{3}m^2 + 4m\right) : \sqrt{13},$$

$$\text{整理得 } 8m^2 - 11m = 0, \text{ 解得 } m_1 = 0 \text{ (舍去)}, m_2 = \frac{11}{8},$$

$$\text{此时 } M \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{11}{8}, 0\right);$$

$$\text{当 } \frac{PB}{BA} = \frac{PN}{OB} \text{ 时, } \triangle BPN \sim \triangle ABO, \text{ 则 } \triangle BPN \sim \triangle APM, \text{ 即 } \frac{\sqrt{13}}{3}m : \sqrt{13} = \left(-\frac{4}{3}m^2 + 4m\right) : 2,$$

$$\text{整理得 } 2m^2 - 5m = 0, \text{ 解得 } m_1 = 0 \text{ (舍去)}, m_2 = \frac{5}{2},$$

$$\text{此时 } M \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{5}{2}, 0\right);$$

$$\text{综上所述, 点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{11}{8}, 0\right) \text{ 或 } \left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

【点评】本题考查了二次函数的综合题: 熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质和相似三角形的判定与性质; 会利用待定系数法求函数解析式; 灵活应用相似比表示线段之间的关系; 理解坐标与图形的性质; 会利用分类讨论的思想解决数学问题.

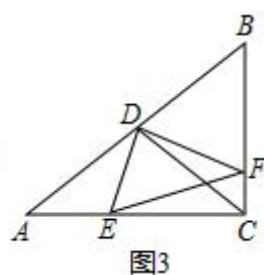
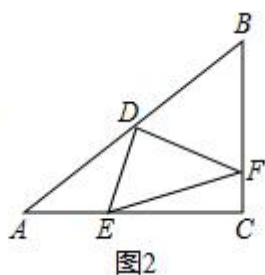
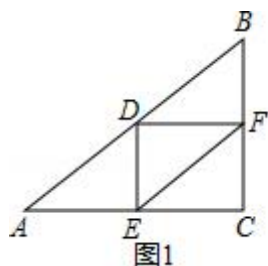
25. (14 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $\cos A = \frac{4}{5}$, D 是 AB 边的中点, E 是 AC 边上一点, 联结 DE , 过点 D 作 $DF \perp DE$ 交 BC 边于点 F , 联结 EF .

(1) 如图 1, 当 $DE \perp AC$ 时, 求 EF 的长;

(2) 如图 2, 当点 E 在 AC 边上移动时, $\angle DFE$ 的正切值是否会发生变化, 如果变化请说出变化情况; 如果保持不变, 请求出 $\angle DFE$ 的正切值;

(3) 如图 3, 联结 CD 交 EF 于点 Q , 当 $\triangle CQF$ 是等腰三角形时, 请直接写出

BF 的长.



【考点】KY: 三角形综合题.

【专题】15: 综合题.

【分析】(1) 先求出 $BC=6$, $AB=10$, 再判断出四边形 DECF 是矩形, 即可用勾股定理求出 EF;

(2) 先判断出四边形 DHCG 是矩形, 进而判断出 $\triangle EDH \sim \triangle FDG$, 即可得出结论;

(3) 分三种情况, 利用等腰三角形的性质和相似三角形得出比例式建立方程即可得出结论.

【解答】解: (1) $\because \angle ACB=90^\circ$, $\cos A=\frac{4}{5}$

$$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{4}{5},$$

$$\therefore AC=8,$$

$$\therefore AB=10,$$

$\because D$ 是 AB 边的中点,

$$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=5,$$

$\because DE \perp AC$,

$$\therefore \angle DEA=\angle DEC=90^\circ,$$

$$\therefore \cos A=\frac{AE}{AD}=\frac{4}{5},$$

$$\therefore AE=4,$$

$$\therefore CE=8-4=4,$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle AED \text{ 中, } AE^2+DE^2=AD^2,$$

$$\therefore DE=3,$$

$$\because DF \perp DE,$$

$$\therefore \angle FDE=90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ACB=90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 DECF 是矩形,

$$\therefore DF=EC=4,$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle EDF \text{ 中, } DF^2+DE^2=EF^2,$$

$$\therefore EF=5$$

(2) 不变

如图 2,

过点 D 作 $DH \perp AC$, $DG \perp BC$, 垂足分别为点 H、G,

由 (1) 可得 $DH=3$, $DG=4$,

$$\because DH \perp AC, DG \perp BC,$$

$$\therefore \angle DHC=\angle DGC=90^\circ$$

$$\text{又} \because \angle ACB=90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 DHCG 是矩形,

$$\therefore \angle HDG=90^\circ,$$

$$\because \angle FDE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle HDG - \angle HDF = \angle EDF - \angle HDF,$$

即 $\angle EDH = \angle FDG$,

又 $\because \angle DHE = \angle DGF = 90^\circ$

$\therefore \triangle EDH \sim \triangle FDG$,

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{DH}{DG} = \frac{3}{4},$$

$\therefore \angle FDE = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle DFE = \frac{DE}{DF} = \frac{3}{4},$$

(3) ①当 $QF = QC$ 时,

$\therefore \angle QFC = \angle QCF$,

$\therefore \angle EDF + \angle ECF = 180^\circ$,

$\therefore$ 点 D, E, C, F 四点共圆,

$\therefore \angle ECQ = \angle DFE$, $\angle DFE + \angle QFC = \angle ECQ + \angle QCF = \angle ACB = 90^\circ$,

即 $\angle DFC = 90^\circ$,

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$, D 是 AB 的中点,

$$\therefore CD = BD = \frac{1}{2}AB = 5,$$

$$\therefore BF = CF = \frac{1}{2}BC = 3,$$

②当 $FQ = FC$ 时,

$\therefore \angle BCD = \angle CQF$,

$\because$ 点 D 是 AB 的中点,

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}AB = 5,$$

$\therefore \angle BDC = \angle BCD$,

$\therefore \angle BCD = \angle FCQ$, $\angle BDC = \angle CFQ$,

$\therefore \triangle FQC \sim \triangle DCB$,

由①知, 点 D, E, C, F 四点共圆,

$$\therefore \angle DEF = \angle DCF,$$

$$\therefore \angle DQE = \angle FQC,$$

$$\therefore \triangle FQC \sim \triangle DEQ,$$

$$\text{即: } \triangle FQC \sim \triangle DEQ \sim \triangle DCB$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle EDF \text{ 中, } \tan \angle DFE = \frac{DE}{DF} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{设 } DE=3k, \text{ 则 } DF=4k, \text{ EF}=5k,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle DCF = \angle CQF = \angle DQE,$$

$$\therefore DE=DQ=3k,$$

$$\therefore CQ=5-3k,$$

$$\therefore \triangle DEQ \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{DE}{EQ} = \frac{DC}{BC} = \frac{5}{6},$$

$$\therefore EQ = \frac{18}{5}k,$$

$$\therefore FQ=FC = \frac{7}{5}k,$$

$$\therefore \triangle FQC \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{FQ}{CQ} = \frac{DC}{BC} = \frac{5}{6},$$

$$\therefore \frac{\frac{7}{5}k}{5-3k} = \frac{5}{6},$$

$$\text{解得 } k = \frac{125}{117},$$

$$\therefore FC = \frac{7}{5} \times \frac{125}{117} = \frac{175}{117},$$

$$\therefore BF = 6 - \frac{175}{117} = \frac{527}{117},$$

③当 $CF=CQ$ 时, 如图 3,

$$\therefore \angle BCD = \angle CQF,$$

由②知, $CD=BD$,

$$\therefore \angle BDC = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle EDQ \sim \triangle BDK,$$

在 BC 边上截取 $BK=BD=5$ ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H，

$$\therefore DH = \frac{1}{2}AC = 4, \quad BH = \frac{1}{2}BC = 3, \quad \text{由勾股定理得 } DK = 2\sqrt{5},$$

同②的方法得， $\triangle CFQ \sim \triangle EDQ$ ，

$$\therefore \text{设 } DE = 3m, \text{ 则 } EQ = 3m, \quad EF = 5m,$$

$$\therefore FQ = 2m,$$

$$\therefore \triangle EDQ \sim \triangle BDK,$$

$$\therefore \frac{DE}{DQ} = \frac{BD}{DK} = \frac{5}{2\sqrt{5}},$$

$$\therefore DQ = \frac{6\sqrt{5}}{5}m,$$

$$\therefore CQ = FC = 5 - \frac{6\sqrt{5}}{5}m,$$

$$\therefore \triangle CQF \sim \triangle BDK,$$

$$\therefore \frac{CQ}{FQ} = \frac{BD}{DK} = \frac{5}{2\sqrt{5}},$$

$$\therefore \frac{5 - \frac{6\sqrt{5}}{5}m}{2m} = \frac{5}{2\sqrt{5}},$$

$$\text{解得 } m = \frac{5\sqrt{5}}{11},$$

$$\therefore FC = \frac{25}{11},$$

$$\therefore BF = 6 - \frac{25}{11} = \frac{41}{11}.$$

即： $\triangle CQF$ 是等腰三角形时，BF 的长为 3 或 $\frac{527}{117}$ 或 $\frac{41}{11}$ 。

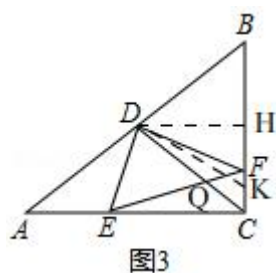
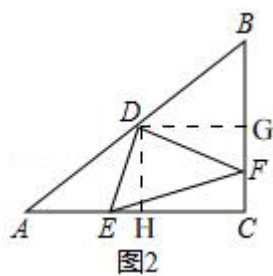


图3



【点评】此题是三角形综合题，主要考查了相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，勾股定理，矩形的判定和性质，等腰三角形的性质，解本题的关键是判断出相似三角形得出比例式建立方程求解.