

2017 年上海市松江区中考数学二模试卷

一、选择题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. (4 分) -8 的绝对值是 ()
A. -8 B. 8 C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{8}$
2. (4 分) 下列运算中, 计算结果正确的是 ()
A. $3(a-1) = 3a-1$ B. $(a+b)^2 = a^2+b^2$
C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $(3a^3)^2 = 9a^6$
3. (4 分) 一组数据 2, 4, 5, 2, 3 的众数和中位数分别是 ()
A. 2, 5 B. 2, 2 C. 2, 3 D. 3, 2
4. (4 分) 对于二次函数 $y = (x+1)^2 - 3$, 下列说法正确的是 ()
A. 图象开口方向向下
B. 图象与 y 轴的交点坐标是 $(0, -3)$
C. 图象的顶点坐标为 $(1, -3)$
D. 抛物线在 $x > -1$ 的部分是上升的
5. (4 分) 一个正多边形内角和等于 540° , 则这个正多边形的每一个外角等于 ()
A. 72° B. 60° C. 108° D. 90° .
6. (4 分) 下列说法中正确的是 ()
A. 有一组邻边相等的梯形是等腰梯形
B. 一组对边平行, 另一组对边相等的四边形是等腰梯形
C. 有一组对角互补的梯形是等腰梯形
D. 有两组对角分别相等的四边形是等腰梯形

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. (4 分) 计算： $2^{-1} =$ _____.

8. (4 分) 函数 $y = \frac{1}{x-3}$ 的定义域是_____.

9. (4 分) 方程 $\sqrt{3x-1} = 2$ 的根是_____.

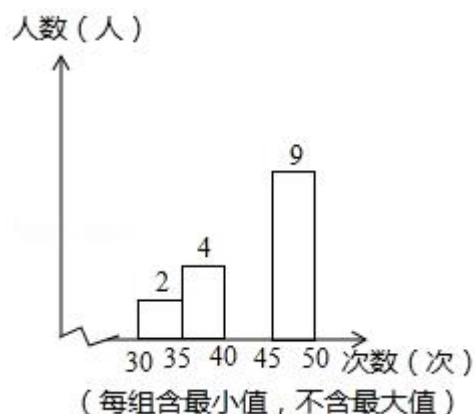
10. (4 分) 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x - k = 0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值是_____.

11. (4 分) 在一个袋中，装有除颜色外其它完全相同的 2 个红球、3 个白球和 4 个黑球，从中随机摸出一个球，摸到的球是红球的概率是_____.

12. (4 分) 已知双曲线 $y = \frac{1-m}{x}$ ，当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围为_____.

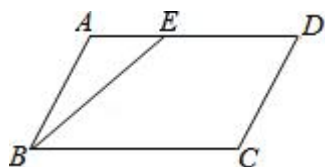
13. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} x-3 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

14. (4 分) 为了解某校九年级学生体能情况，随机抽查了其中 35 名学生，测试 1 分钟仰卧起坐的次数，并绘制成频数分布直方图 (如图所示)，那么仰卧起坐的次数在 40 ~ 45 的频率是_____.



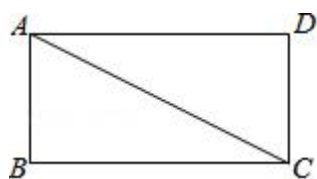
15. (4 分) 某山路坡面坡度 $i = 1: 3$ ，沿此山路向上前进了 100 米，升高了_____米.

16. (4 分) 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 是 AD 上一点，且 $AD = 3AE$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{BE} =$ _____。(结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



17. (4 分) 已知一个三角形各边的比为 2: 3: 4, 联结各边中点所得的三角形的周长为 18cm, 那么原三角形最短的边的长为_____cm.

18. (4 分) 如图, 已知在矩形 ABCD 中, AB=4, AD=8, 将 $\triangle ABC$ 沿对角线 AC 翻折, 点 B 落在点 E 处, 联结 DE, 则 DE 的长为_____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

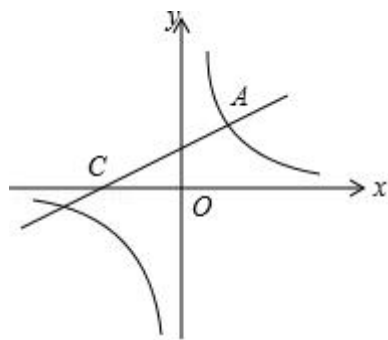
19. (10 分) 先化简, 再求值: $(1 + \frac{2}{x-1}) \div \frac{x^2+x}{x^2-2x+1}$, 其中 $x = \sqrt{2} + 1$.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x+2y=6 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$$

21. (10 分) 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与双曲线相交于点 A (2, m), 与 x 轴交于点 C.

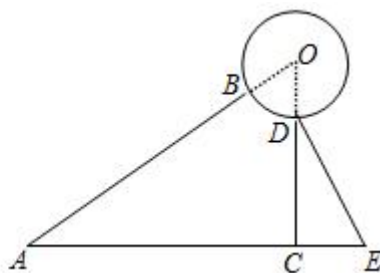
(1) 求双曲线解析式;

(2) 点 P 在 x 轴上, 如果 $PA = PC$, 求点 P 的坐标.



22. (10 分) 如图是某品牌太阳能热水器的实物图和横断面示意图, 已知真空集热管 AB 与支架 CD 所在直线相交于水箱横断面 $\odot O$ 的圆心, 支架 CD 与水平

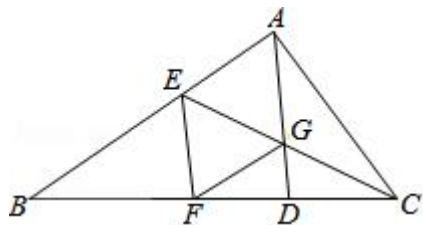
面 AE 垂直, $AB=110$ 厘米, $\angle BAC=37^\circ$, 垂直支架 $CD=57$ 厘米, DE 是另一根辅助支架, 且 $\angle CED=60^\circ$.



- (1) 求辅助支架 DE 长度; (结果保留根号)
- (2) 求水箱半径 OD 的长度. (结果精确到 1 厘米, 参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

23. (12 分) 如图, 点 D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC 、 AB 上的点, AD 、 CE 相交于点 G , 过点 E 作 $EF \parallel AD$ 交 BC 于点 F , 且 $CF^2 = CD \cdot CB$, 联结 FG .

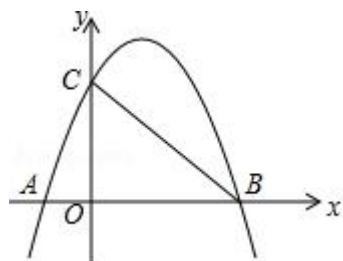
- (1) 求证: $GF \parallel AB$;
- (2) 如果 $\angle CAG = \angle CFG$, 求证: 四边形 $AEFG$ 是菱形.



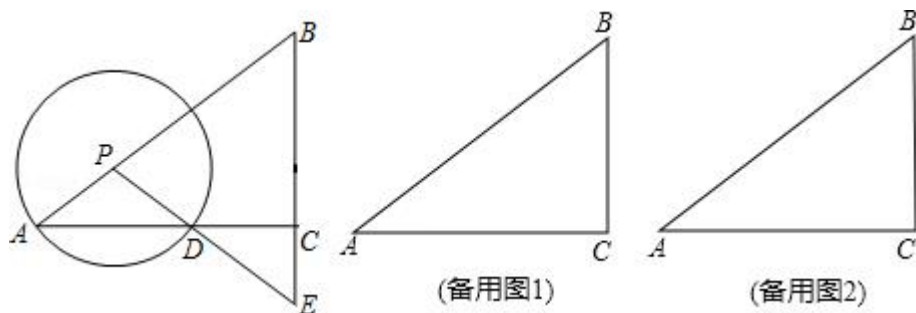
24. (12 分) 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, P 是线段 BC 上一点, 过点 P 作 $PN \parallel y$ 轴交 x 轴于点 N , 交抛物线于点 M .

- (1) 求该抛物线的表达式;
- (2) 如果点 P 的横坐标为 2, 点 Q 是第一象限抛物线上的一点, 且 $\triangle QMC$ 和 $\triangle PMC$ 的面积相等, 求点 Q 的坐标;

(3) 如果 $PM = \frac{3}{2}PN$, 求 $\tan \angle CMN$ 的值.



25. (14 分) 如图, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\cos B = \frac{3}{5}$, $BC = 3$, P 是射线 AB 上的一个动点, 以 P 为圆心, PA 为半径的 $\odot P$ 与射线 AC 的另一个交点为 D , 直线 PD 交直线 BC 于点 E .



- (1) 当 $PA = 1$ 时, 求 CE 的长;
- (2) 如果点 P 在边 AB 的上, 当 $\odot P$ 与以点 C 为圆心, CE 为半径的 $\odot C$ 内切时, 求 $\odot P$ 的半径;
- (3) 设线段 BE 的中点为 Q , 射线 PQ 与 $\odot P$ 相交于点 F , 点 P 在运动过程中, 当 $PE \parallel CF$ 时, 求 AP 的长.

2017 年上海市松江区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) -8 的绝对值是 ()

- A. -8 B. 8 C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{8}$

【考点】15: 绝对值.

【分析】依据绝对值的性质解答即可.

【解答】解: -8 的绝对值是 8 .

故选: B.

【点评】本题主要考查的是绝对值的性质, 掌握绝对值的性质是解题的关键.

2. (4 分) 下列运算中, 计算结果正确的是 ()

- A. $3(a-1) = 3a-1$ B. $(a+b)^2 = a^2+b^2$
C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $(3a^3)^2 = 9a^6$

【考点】36: 去括号与添括号; 47: 幂的乘方与积的乘方; 48: 同底数幂的除法; 4C: 完全平方公式.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据去括号法则, 完全平方公式, 同底数幂的除法, 幂的乘方与积的乘方法则作答.

【解答】解: A、 $3(a-1) = 3a-3$, 故本选项错误;

B、 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, 故本选项错误;

C、 $a^6 \div a^3 = a^3$, 故本选项错误;

D、 $(3a^3)^2 = 9a^6$, 故本选项正确.

故选: D.

【点评】本题综合考查了去括号法则，完全平方公式，同底数幂的除法，幂的乘方与积的乘方，是基础题型，比较简单.

3. (4分) 一组数据 2, 4, 5, 2, 3 的众数和中位数分别是 ()

- A. 2, 5 B. 2, 2 C. 2, 3 D. 3, 2

【考点】W4: 中位数; W5: 众数.

【分析】根据众数和中位数的定义进行计算即可.

【解答】解: 数据 2, 4, 5, 2, 3 的众数和中位数分别是 2, 3,

故选: C.

【点评】本题考查了众数、中位数, 掌握众数和中位数的定义是解题的关键.

4. (4分) 对于二次函数 $y = (x+1)^2 - 3$, 下列说法正确的是 ()

- A. 图象开口方向向下
B. 图象与 y 轴的交点坐标是 $(0, -3)$
C. 图象的顶点坐标为 $(1, -3)$
D. 抛物线在 $x > -1$ 的部分是上升的

【考点】H3: 二次函数的性质.

【分析】根据二次函数的性质对各选项进行判断.

【解答】解: 二次函数 $y = (x+1)^2 - 3$ 的图象的开口向上, 顶点坐标为 $(-1, -3)$, 函数有最大值 -3 ,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = -1$,

$\therefore$ 当 $x > -1$ 时, y 随着 x 的增大而增大.

故选: D.

【点评】本题考查了二次函数的性质, 能够顺利得到顶点式表达的函数的顶点坐标、对称轴及开口方向是解答本题的关键.

5. (4分) 一个正多边形内角和等于 540° , 则这个正多边形的每一个外角等于

()

A. 72°

B. 60°

C. 108°

D. 90° .

【考点】L3: 多边形内角与外角.

【分析】首先设此多边形为 n 边形, 根据题意得: $180(n-2)=540$, 即可求得 $n=5$, 再由多边形的外角和等于 360° , 即可求得答案.

【解答】解: 设此多边形为 n 边形,

根据题意得: $180(n-2)=540$,

解得: $n=5$,

$\therefore$ 这个正多边形的每一个外角等于: $\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$.

故选: A.

【点评】此题考查了多边形的内角和与外角和的知识. 注意掌握多边形内角和定理: $(n-2) \cdot 180^\circ$, 外角和等于 360° .

6. (4 分) 下列说法中正确的是 ()

A. 有一组邻边相等的梯形是等腰梯形

B. 一组对边平行, 另一组对边相等的四边形是等腰梯形

C. 有一组对角互补的梯形是等腰梯形

D. 有两组对角分别相等的四边形是等腰梯形

【考点】LK: 等腰梯形的判定.

【分析】利用等腰梯形梯形的定义可对 A 进行判断; 根据等腰梯形的定义对 B 进行判断; 根据平行线的性质和等腰梯形的定义可对 C 进行判断; 根据平行四边形的判定方法对 D 进行判断.

【解答】解: A、两腰相等的梯形是等腰梯形, 所以 A 选项错误;

B、一组对边平行, 另一组对边不平行且相等的四边形是等腰梯形, 所以 B 选项

错误;

C、有一组对角互补的梯形是等腰梯形, 所以 C 选项正确;

D、有两组对角分别相等的四边形是平行四边形, 所以 D 选项错误.

故选: C.

【点评】 本题考查了等腰梯形的判定: 判定一个梯形是否为等腰梯形, 主要判断梯形的同一底上的两个角是否相等, 可以通过添加辅助线把梯形底上的两个角平移到同一个三角形中, 利用三角形来证明角的关系.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 计算: $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

【考点】 6F: 负整数指数幂.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据幂的负整数指数运算法则进行计算即可.

【解答】 解: $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$. 故答案为 $\frac{1}{2}$.

【点评】 本题考查负整数指数幂的运算. 幂的负整数指数运算, 先把底数化成其倒数, 然后将负整数指数幂当成正的进行计算.

8. (4 分) 函数 $y = \frac{1}{x-3}$ 的定义域是 $x \neq 3$.

【考点】 62: 分式有意义的条件; E4: 函数自变量的取值范围.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据分式有意义, 则故分母 $x - 3 \neq 0$, 解得 x 的范围.

【解答】 解: 若函数表达式有意义, 则 $x - 3 \neq 0$

解得: $x \neq 3$.

故答案为 $x \neq 3$.

【点评】 本题考查了函数自变量取值范围的求法. 要使得函数分式有意义, 必须满足分母的分母不等于 0.

9. (4分) 方程 $\sqrt{3x-1}=2$ 的根是 $x=\frac{5}{3}$.

【考点】AG: 无理方程.

【分析】两边平方得出 $3x-1=4$, 求出即可.

【解答】解: $\because \sqrt{3x-1}=2$,

$$\therefore 3x-1=4,$$

$$\therefore x=\frac{5}{3},$$

经检验 $x=\frac{5}{3}$ 是原方程组的解,

故答案为: $x=\frac{5}{3}$.

【点评】本题考查了解无理方程, 能把无理方程转化成有理方程是解此题的关键.

10. (4分) 已知关于 x 的方程 $x^2-2x-k=0$ 有两个相等的实数根, 则 k 的值是 -1 .

【考点】AA: 根的判别式.

【分析】根据关于 x 的方程 $x^2-2x-k=0$ 有两个相等的实数根可得 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-k) = 0$, 求出 k 的值即可.

【解答】解: $\because$ 方程 $x^2-2x-k=0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times (-k) = 0,$$

$$\therefore k = -1,$$

故答案为 -1 .

【点评】此题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 -$

$4ac$: 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根.

11. (4分) 在一个袋中, 装有除颜色外其它完全相同的 2 个红球、3 个白球和 4

个黑球，从中随机摸出一个球，摸到的球是红球的概率是 $\frac{2}{9}$ 。

【考点】X4：概率公式.

【分析】根据题意可得袋中共有 9 个球，其中有 2 个红球，再由概率公式可得答案.

【解答】解：从中随机摸出一个球，摸到的球是红球的概率是： $\frac{2}{2+3+4}=\frac{2}{9}$ ，

故答案为： $\frac{2}{9}$ 。

【点评】此题主要考查了概率公式，关键是掌握概率=所求情况数与总情况数之比.

12. (4 分) 已知双曲线 $y=\frac{1-m}{x}$ ，当 $x>0$ 时， y 随 x 的增大而减小，则 m 的取值范围为 $m<1$ 。

【考点】G4：反比例函数的性质.

【分析】根据反比例函数的性质即可求出答案.

【解答】解：由题意可知：反比例函数图象经过一、三象限，

$$\therefore 1-m>0,$$

$$\therefore m<1,$$

故答案为： $m<1$

【点评】本题考查反比例函数的性质，解题的关键是正确理解反比例函数的性质，本题属于基础题型.

13. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} x-3<0 \\ x+1\geq 0 \end{cases}$ 的解集是 $-1\leq x<3$ 。

【考点】CB：解一元一次不等式组.

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】解： $\begin{cases} x-3<0 \\ x+1\geq 0 \end{cases}$ ，

解不等式 $x-3<0$ ，得： $x<3$ ，

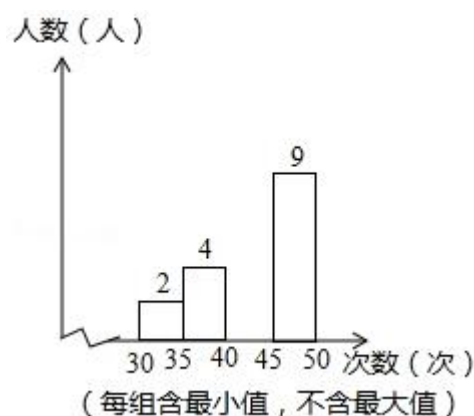
解不等式 $x+1 \geq 0$, 得: $x \geq -1$,

故不等式组的解集为: $1 \leq x < 3$,

故答案为: $-1 \leq x < 3$.

【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组, 正确求出每一个不等式解集是基础, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

14. (4 分) 为了解某校九年级学生体能情况, 随机抽查了其中 35 名学生, 测试 1 分钟仰卧起坐的次数, 并绘制成频数分布直方图 (如图所示), 那么仰卧起坐的次数在 40 ~ 45 的频率是 $\frac{4}{7}$.



【考点】 V6: 频数与频率; V8: 频数 (率) 分布直方图.

【分析】 根据频率=频数÷总数, 代入数计算即可.

【解答】 解: 利用频数分布直方图可得出:

仰卧起坐次数在 40 ~ 45 次的频数为 20,

则仰卧起坐次数在 40 ~ 45 次的频率为: $20 \div 35 = \frac{4}{7}$.

故答案为: $\frac{4}{7}$.

【点评】 此题主要考查了看频数分布直方图, 频率是指每个对象出现的次数与总次数的比值 (或者百分比).

15. (4 分) 某山路坡面坡度 $i=1:3$, 沿此山路向上前进了 100 米, 升高了 $10\sqrt{10}$

米.

【考点】 T9: 解直角三角形的应用 – 坡度坡角问题.

【分析】 根据题意画出图形, 设 $AB=x$, 则 $OB=3x$, 故可得出 $OA=\sqrt{10}x$, 进而可得出结论.

【解答】 解: 如图所示, $\because$ 山路坡面坡度 $i=1:3$,

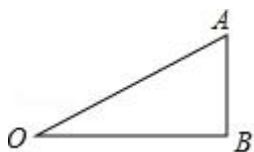
$\therefore$ 设 $AB=x$, 则 $OB=3x$,

$\therefore OA=\sqrt{10}x$.

$\because$ 沿此山路向上前进了 100 米,

$\therefore \frac{x}{\sqrt{10}x} = \frac{AB}{100}$, 解得 $AB=10\sqrt{10}$ (米).

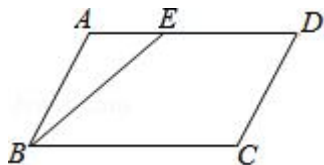
故答案为: $10\sqrt{10}$.



【点评】 本题考查的是坡度坡角问题, 根据题意画出图形, 利用数形结合求解是解答此题的关键.

16. (4 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 是 AD 上一点, 且 $AD=3AE$, 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$,

$\overrightarrow{BE} = \underline{-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}}$. (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



【考点】 L5: 平行四边形的性质; LM: *平面向量.

【分析】 根据三角形法则可知: $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$, 只要求出 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE}$ 即可解决问题.

【解答】 解: $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$,

$\because AD=3AE$,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b},$$

故答案为 $-\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}$.

【点评】 本题考查平面向量、平行线分线段成比例定理等知识，解题的关键是掌握平面向量的加法法则（三角形法则），熟练中考常考题型.

17. (4 分) 已知一个三角形各边的比为 2: 3: 4, 联结各边中点所得的三角形的周长为 18cm, 那么原三角形最短的边的长为 8 cm.

【考点】 KX: 三角形中位线定理.

【分析】 由中点和中位线定义可得新三角形的各边长为原三角形各边长的一半, 即可求各边长.

【解答】 解: 由题意, 设三边分别为 2xcm, 3xcm, 4xcm,

则各边中点所得的三角形的边长分别为 xcm, 1.5xcm, 2xcm

则 $x + 1.5x + 2x = 18$,

解得 $x = 4$,

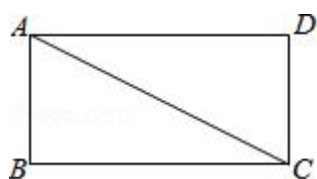
$\therefore 2x = 8\text{cm}$

原三角形最短的边的长为 8cm;

故答案为: 8.

【点评】 本题考查了三角形中位线定理. 解决本题的关键是利用中点定义和中位线定理得到新三角形各边长与原三角形各边长的数量关系.

18. (4 分) 如图, 已知在矩形 ABCD 中, $AB = 4$, $AD = 8$, 将 $\triangle ABC$ 沿对角线 AC 翻折, 点 B 落在点 E 处, 联结 DE, 则 DE 的长为 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.



【考点】LB：矩形的性质；PB：翻折变换（折叠问题）.

【分析】先过E作 $EF \perp AD$ 于F，设 $CG=Ax$ ，则 $DG=8-x$ ，在 $Rt\triangle CDG$ 中，

根据 $DG^2+CD^2=CG^2$ ，得到 $(8-x)^2+4^2=x^2$ ，求得 $AG=5$ ，再根据

$EF=\frac{AE \times EG}{AG}=\frac{12}{5}$ ，运用勾股定理求得AF和DF的长，即可得到DE的长.

【解答】解：如图所示，过E作 $EF \perp AD$ 于F，

由折叠可得， $\angle ACB=\angle ACE$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ACB=\angle CAD$ ，

$\therefore \angle CAD=\angle ACE$ ，

$\therefore CG=AG$ ，

设 $CG=Ax$ ，则 $DG=8-x$ ，

$\therefore Rt\triangle CDG$ 中， $DG^2+CD^2=CG^2$ ，

$\therefore (8-x)^2+4^2=x^2$ ，

解得 $x=5$ ，

$\therefore AG=5$ ，

$\therefore Rt\triangle AEG$ 中， $EG=\sqrt{AG^2-AE^2}=3$ ，

$\therefore EF \perp AG$ ， $\angle AEG=90^\circ$ ，

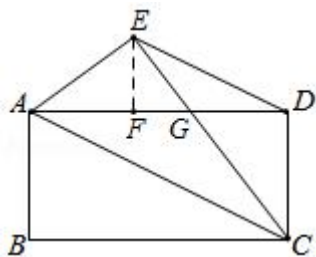
$\therefore EF=\frac{AE \times EG}{AG}=\frac{12}{5}$ ，

$\therefore Rt\triangle AEF$ 中， $AF=\sqrt{AE^2-EF^2}=\frac{16}{5}$ ，

$\therefore DF=8-\frac{16}{5}=\frac{24}{5}$ ，

$\therefore Rt\triangle DEF$ 中， $DE=\sqrt{EF^2+DF^2}=\frac{12}{5}\sqrt{5}$ ．

故答案为： $\frac{12}{5}\sqrt{5}$ ．



【点评】 本题属于折叠问题，主要考查了矩形的性质，勾股定理的综合应用，解题时注意面积法以及方程思想的运用．本题也可以运用相似三角形的性质进行求解．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 先化简，再求值： $(1 + \frac{2}{x-1}) \div \frac{x^2+x}{x^2-2x+1}$ ，其中 $x = \sqrt{2} + 1$ ．

【考点】 6D：分式的化简求值．

【分析】 先化简题目中的式子，然后将 x 的值代入化简后的式子即可解答本题．

【解答】 解： $(1 + \frac{2}{x-1}) \div \frac{x^2+x}{x^2-2x+1}$
 $= \frac{x-1+2}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x(x+1)}$
 $= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x(x+1)}$
 $= \frac{x-1}{x}$ ，
 当 $x = \sqrt{2} + 1$ 时，原式 $= \frac{\sqrt{2}+1-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2 - \sqrt{2}$ ．

【点评】 本题考查分式的化简求值，解答本题的关键是明确分式化简求值的方法．

20. (10 分) 解方程组： $\begin{cases} x+2y=6 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$ ．

【考点】 AF：高次方程．

【分析】 由②得出 $x - 2y = 0$ ， $x - y = 0$ ，这样转化成两个方程组，求出方程组的解即可．

【解答】 解： $\begin{cases} x+2y=6 \text{ ①} \\ x^2-3xy+2y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$

由②得, $x - 2y = 0$, $x - y = 0$,

原方程组化为 $\begin{cases} x+2y=6 \\ x-y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y=6 \\ x-2y=0 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=\frac{3}{2} \end{cases}$,

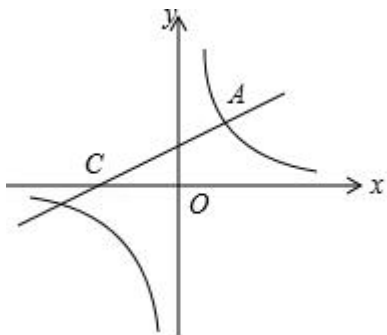
$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2=\frac{3}{2} \end{cases}$.

【点评】 本题考查了解高次方程组, 能把方程组转化成二元一次方程组是解此题的关键.

21. (10 分) 如图, 直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与双曲线相交于点 A (2, m), 与 x 轴交于点 C.

(1) 求双曲线解析式;

(2) 点 P 在 x 轴上, 如果 $PA = PC$, 求点 P 的坐标.



【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】 (1) 把 A 的坐标 (2, m) 代入直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 求出 A 的坐标, 设双曲线的函数关系式为 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 把 A 点的坐标代入, 即可求出答案;

(2) 设点 P 的坐标为 (x, 0), 根据两点之间距离公式即可得出关于 x 的方程, 求出 x 即可.

【解答】 解: (1) 把 A 的坐标 (2, m) 代入直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 得: $m = \frac{1}{2} \times 2 + 2$,

解得: $m = 3$,

∴ 点 A 的坐标为 (2, 3),

设双曲线的函数关系式为 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$),

把 $x=2$, $y=3$ 代入 $k=2 \times 3$,

解得: $k=6$,

∴ 双曲线的解析式为 $y = \frac{6}{x}$;

(2) 设点 P 的坐标为 (x, 0),

∵ C (-4, 0), A (2, 3), PA=PC

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2 + 3^2} = x+4,$$

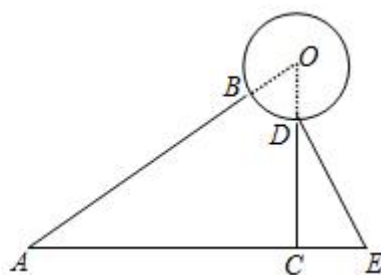
解得: $x = -\frac{1}{4}$,

经检验: $x = -\frac{1}{4}$ 是原方程的根,

∴ 点 P 的坐标为 $(-\frac{1}{4}, 0)$.

【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 用待定系数法求出反比例函数的解析式等知识点, 能用待定系数法求出反比例函数的解析式是解 (1) 的关键, 能得出关于 x 的方程是解 (2) 的关键.

22. (10 分) 如图是某品牌太阳能热水器的实物图和横断面示意图, 已知真空集热管 AB 与支架 CD 所在直线相交于水箱横断面 $\odot O$ 的圆心, 支架 CD 与水平面 AE 垂直, AB=110 厘米, $\angle BAC=37^\circ$, 垂直支架 CD=57 厘米, DE 是另一根辅助支架, 且 $\angle CED=60^\circ$.



(1) 求辅助支架 DE 长度; (结果保留根号)

(2) 求水箱半径 OD 的长度. (结果精确到 1 厘米, 参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

【考点】 T8: 解直角三角形的应用.

【分析】 (1) 直接利用锐角三角函数关系得出 $DE = \frac{DC}{\sin \angle E}$, 进而得出答案;

(2) 利用 $\sin \angle A = \frac{CO}{AO}$, 得出圆的半径, 进而得出答案.

【解答】 解: (1) 在 $Rt\triangle DCE$ 中, $\sin \angle E = \frac{CD}{DE}$,

$$\therefore DE = \frac{DC}{\sin \angle E} = \frac{57}{\sin 60^\circ} = 38\sqrt{3} \text{ (厘米)},$$

答: 辅助支架 DE 长度 $38\sqrt{3}$ 厘米;

(2) 设圆 O 的半径为 x 厘米,

在 $Rt\triangle AOC$ 中, $\sin \angle A = \frac{CO}{AO}$,

$$\text{即 } \sin 37^\circ = \frac{57+x}{110+x},$$

$$\therefore \frac{57+x}{110+x} = \frac{3}{5},$$

解得: $x = 22.5 \approx 23$ (厘米),

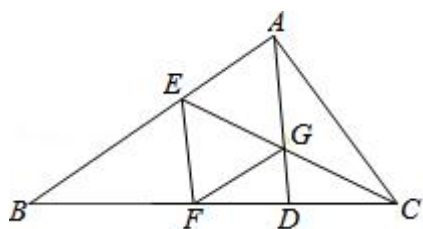
答: 水箱半径 OD 的长度为 23 厘米.

【点评】 此题主要考查了解直角三角形的应用, 正确应用锐角三角函数关系是解题关键.

23. (12 分) 如图, 点 D、E 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC、AB 上的点, AD、CE 相交于点 G, 过点 E 作 $EF \parallel AD$ 交 BC 于点 F, 且 $CF^2 = CD \cdot CB$, 联结 FG.

(1) 求证: $GF \parallel AB$;

(2) 如果 $\angle CAG = \angle CFG$, 求证: 四边形 AEFG 是菱形.



【考点】L9: 菱形的判定; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】(1) 根据已知条件得到 $\frac{CD}{CF} = \frac{CF}{CB}$, 根据平行线分线段成比例定理得到

$$\frac{CG}{CE} = \frac{CD}{CF}, \text{ 等量代换得到 } \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CE}, \text{ 于是得到结论;}$$

(2) 联结 AF, 根据平行线的性质得到 $\angle CFG = \angle B$, 等量代换得到 $\angle CAG = \angle B$,

根据相似三角形的性质得到 $CA^2 = CD \cdot CB$, 等量代换得到 $CA = CF$, 根据等腰

三角形的性质得到 $\angle CAF = \angle CFA$, 于是得到结论.

【解答】(1) 证明: $\because CF^2 = CD \cdot CB$,

$$\therefore \frac{CD}{CF} = \frac{CF}{CB},$$

$$\because EF \parallel AD,$$

$$\therefore \frac{CG}{CE} = \frac{CD}{CF},$$

$$\therefore \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CE},$$

$$\therefore GF \parallel AB;$$

(2) 解: 联结 AF,

$$\because GF \parallel AB,$$

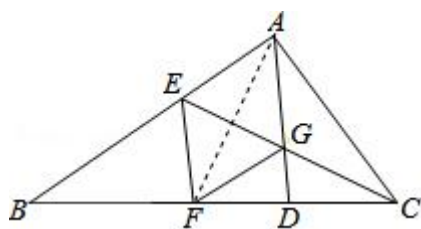
$$\therefore \angle CFG = \angle B,$$

$$\because \angle CAG = \angle CFG,$$

$$\therefore \angle CAG = \angle B,$$

$$\because \angle ACD = \angle ACB,$$

$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBA$,
 $\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$, 即 $CA^2 = CD \cdot CB$,
 $\therefore CF^2 = CD \cdot CB$,
 $\therefore CA = CF$,
 $\therefore \angle CAF = \angle CFA$,
 $\therefore \angle CAG = \angle CFG$,
 $\therefore \angle GAF = \angle GFA$,
 $\therefore GA = GF$,
 $\therefore GF \parallel AB$, $EF \parallel AD$,
 $\therefore$ 四边形 AEF 是平行四边形,
 $\therefore$ 四边形 $AEFG$ 是菱形.



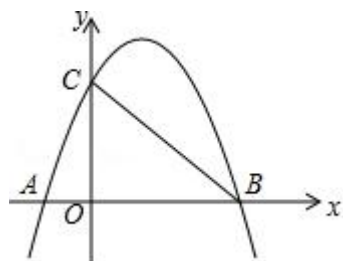
【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，菱形的判定，平行线的判定，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

24. (12 分) 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, P 是线段 BC 上一点, 过点 P 作 $PN \parallel y$ 轴交 x 轴于点 N , 交抛物线于点 M .

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 如果点 P 的横坐标为 2, 点 Q 是第一象限抛物线上的一点, 且 $\triangle QMC$ 和 $\triangle PMC$ 的面积相等, 求点 Q 的坐标;

(3) 如果 $PM = \frac{3}{2}PN$, 求 $\tan \angle CMN$ 的值.



【考点】 H8: 待定系数法求二次函数解析式; HA: 抛物线与 x 轴的交点; T7: 解直角三角形.

【分析】 (1) 根据点 B、C 的坐标利用待定系数法, 即可求出抛物线的表达式;

(2) 根据点 B、C 的坐标利用待定系数法, 求出直线 BC 的表达式, 由点 P 的横坐标, 即可求出点 P、M 的坐标, 进而可求出 $\triangle PMC$ 的面积, 根据 $\triangle QMC$ 和 $\triangle PMC$ 的面积相等, 可求出点 Q 的纵坐标为 1, 再利用二次函数图象上点的坐标特征结合点 Q 在第一象限, 即可求出点 Q 的坐标, 此题得解;

(3) 过点 C 作 $CH \perp MN$, 垂足为 H, 设 $M(m, -m^2+2m+3)$ ($0 < m < 3$), 则 $P(m, -m+3)$, 由 $PM = \frac{3}{2}PN$, 可求出 m 的值, 从而得出点 M、P 的坐标, 进而可求出 MH、CH 的值, 再根据正切的定义, 即可求出 $\tan \angle CMN$ 的值.

【解答】 解: (1) 将 B (3, 0)、C (0, 3) 代入 $y = -x^2+bx+c$,
 得: $\begin{cases} -9+3b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} b=2 \\ c=3 \end{cases}$.
 $\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -x^2+2x+3$.

(2) 依照题意画出图形, 如图 1 所示.

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$),

将点 C (0, 3)、B (3, 0) 代入 $y=kx+b$,

$$\text{得: } \begin{cases} b=3 \\ 3k+b=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=-1 \\ b=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y = -x + 3$,

$\therefore P(2, 1), M(2, 3)$,

$$\therefore S_{\triangle PCM} = \frac{1}{2} CM \cdot PM = 2.$$

设 $\triangle QCM$ 的边 CM 上的高为 h, 则 $S_{\triangle QCM} = \frac{1}{2} \times 2 \times h = 2$,

$$\therefore h = 2,$$

$\therefore$ Q 点的纵坐标为 1,

$$\therefore -x^2 + 2x + 3 = 1,$$

解得: $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$ (舍去),

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(1 + \sqrt{3}, 1)$.

(3) 过点 C 作 $CH \perp MN$, 垂足为 H, 如图 2 所示.

设 $M(m, -m^2 + 2m + 3)$ ($0 < m < 3$), 则 $P(m, -m + 3)$.

$$\therefore PM = \frac{3}{2} PN,$$

$$\therefore PN = \frac{2}{5} MN,$$

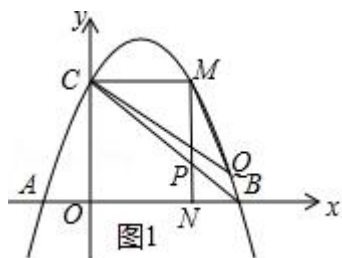
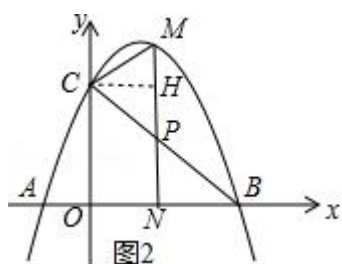
$$\therefore -m + 3 = \frac{2}{5} (-m^2 + 2m + 3),$$

解得: $m = \frac{3}{2}$ 或 $m = 3$ (舍去),

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $M(\frac{3}{2}, \frac{15}{4})$,

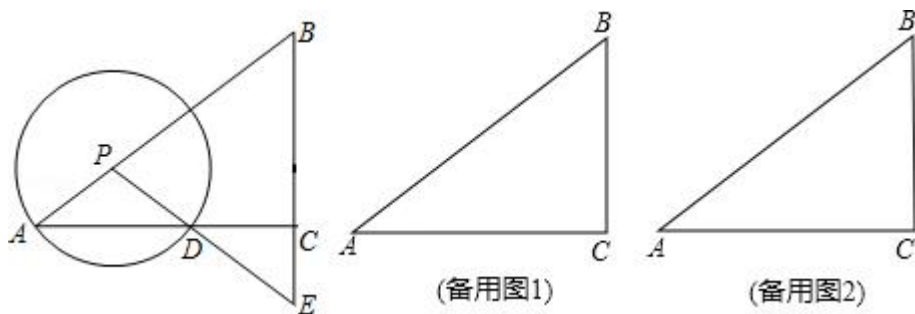
$$\therefore MH = \frac{15}{4} - 3 = \frac{3}{4}, CH = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \tan \angle CMN = \frac{CH}{MH} = 2.$$



【点评】 本题考查了待定系数法求一次（二次）函数解析式、二次（一次）函数图象上点的坐标特征、三角形的面积以及解直角三角形，解题的关键是：（1）根据点的坐标利用待定系数法求出函数关系式；（2）根据 $\triangle QMC$ 和 $\triangle PMC$ 的面积相等，求出点Q的纵坐标；（3）根据 $PM=\frac{3}{2}PN$ ，求出点P、M的坐标.

25. (14分) 如图，已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\cos B=\frac{3}{5}$ ， $BC=3$ ，P是射线AB上的一个动点，以P为圆心，PA为半径的 $\odot P$ 与射线AC的另一个交点为D，直线PD交直线BC于点E.



- (1) 当 $PA=1$ 时，求CE的长；
- (2) 如果点P在边AB的上，当 $\odot P$ 与以点C为圆心，CE为半径的 $\odot C$ 内切时，求 $\odot P$ 的半径；
- (3) 设线段BE的中点为Q，射线PQ与 $\odot P$ 相交于点F，点P在运动过程中，

当 $PE \parallel CF$ 时, 求 AP 的长.

【考点】MR: 圆的综合题.

【分析】(1) 作 $PH \perp AC$, 垂足为 H , 根据已知条件得到 $AB=5$, $AC=4$ 根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{PH}{BC} = \frac{PA}{AB}$, 得到 $PH = \frac{3}{5}$, 于是得到结论;

(2) 当 $\odot P$ 与 $\odot C$ 内切时, 点 C 在 $\odot P$ 内, 于是得到点 D 在 AC 的延长线上点 P 作 $PG \perp AC$, 垂足为 G , 设 $PA=x$, 则 $PG = \frac{3}{5}x$, $AG=DG = \frac{4}{5}x$, $CD = \frac{8}{5}x - 4$, $CG = 4 - \frac{4}{5}x$, 根据 $\frac{CE}{PG} = \frac{DC}{DG}$, 得到 $CE = \frac{6}{5}x - 3$, 根据 $PA - CE = PC$,

列方程得到结论;

(3) 根据余角的性质得到 $\angle ABC = \angle PEC$ 等量代换得到 $\angle PEC = \angle EBP$, 根据等腰三角形的判定得到 $PB = PE$, 根据三角形的中位线的性质得到 $PQ \parallel AC$ 即可得到结论.

【解答】解: (1) 如图 1, 作 $PH \perp AC$, 垂足为 H ,

$\therefore PH$ 过圆心,

$\therefore AH = DH$,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore PH \parallel BC$,

$\therefore \cos B = \frac{3}{5}$, $BC = 3$,

$\therefore AB = 5$, $AC = 4$,

$\therefore PH \parallel BC$,

$\therefore \frac{PH}{BC} = \frac{PA}{AB}$,

$\therefore \frac{PH}{3} = \frac{1}{5}$,

$\therefore PH = \frac{3}{5}$,

$$\therefore AH=DH=\frac{4}{5},$$

$$\therefore DC=\frac{12}{5},$$

$$\text{又} \because \frac{PH}{CE} = \frac{DH}{DC},$$

$$\therefore \frac{\frac{3}{5}}{CE} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{12}{5}},$$

$$\therefore CE=\frac{9}{5},$$

(2) 当 $\odot P$ 与 $\odot C$ 内切时, 点 C 在 $\odot P$ 内,

$\therefore$ 点 D 在 AC 的延长线上

点 P 作 $PG \perp AC$, 垂足为 G , 设 $PA=x$, 则 $PG=\frac{3}{5}x$, $AG=DG=\frac{4}{5}x$, $CD=\frac{8}{5}x-4$,

$$CG=4-\frac{4}{5}x,$$

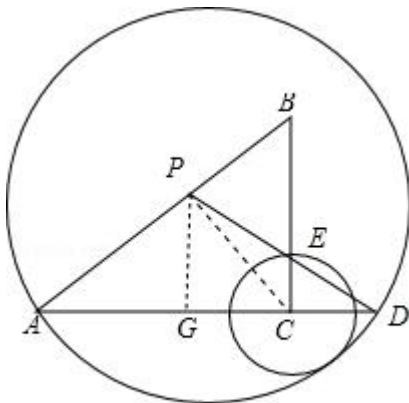


图2

$$\therefore \frac{CE}{PG} = \frac{DC}{DG},$$

$$\therefore \frac{CE}{\frac{3}{5}x} = \frac{\frac{8}{5}x-4}{\frac{4}{5}x},$$

$$\therefore CE=\frac{6}{5}x-3,$$

$\therefore \odot P$ 与 $\odot C$ 内切,

$$\therefore PA-CE=PC,$$

$$\therefore x - \left(\frac{6}{5}x - 3\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{5}x\right)^2 + \left(4 - \frac{4}{5}x\right)^2},$$

$$\therefore 24x^2 - 130x + 175 = 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{35}{12}, \quad x_2 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{当 } \odot P \text{ 与 } \odot C \text{ 内切时, } \odot P \text{ 的半径为 } \frac{35}{12}.$$

$$(3) \because \angle ABC + \angle A = 90^\circ, \quad \angle PEC + \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle PDA,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle PEC$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EBP,$$

$$\therefore \angle PEC = \angle EBP,$$

$$\therefore PB = PE,$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 为线段 } BE \text{ 的中点,}$$

$$\therefore PQ \perp BC, \quad \therefore PQ \parallel AC$$

$$\therefore \text{当 } PE \parallel CF \text{ 时, 四边形 } PDCF \text{ 是平行四边形,}$$

$$\therefore PF = CD,$$

$$\text{当点 } P \text{ 在边 } AB \text{ 的上时, } x = 4 - \frac{8}{5}x, \quad x = \frac{20}{13},$$

$$\text{当点 } P \text{ 在边 } AB \text{ 的延长线上时, } x = \frac{8}{5}x - 4, \quad x = \frac{20}{3},$$

$$\text{综上所述, 当 } PE \parallel CF \text{ 时, } AP \text{ 的长为 } \frac{20}{13} \text{ 或 } \frac{20}{3}.$$

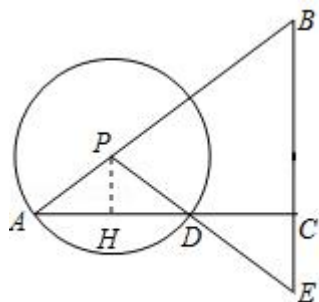


图1

【点评】 本题考查了圆的综合题：熟练掌握两圆相切的性质和三角形相似的判定与性质；会运用勾股定理和相似比进行几何计算；能运用分类讨论的思想解题是答题关键，题目的综合性很强，牵扯到的知识点较多，对学生的综合解题能力要求很高.