

2017 年上海市普陀区中考数学二模试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分) [下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1. (4 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^3 \div a^3 = a$ C. $3a + 3b = 3ab$ D. $(a^3)^2 = a^6$

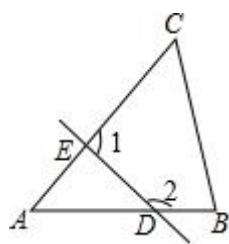
2. (4 分) 如果下列二次根式中有一个与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式，那么这个根式是 ()

- A. $\sqrt{2a}$ B. $\sqrt{3a^2}$ C. $\sqrt{a^3}$ D. $\sqrt{a^4}$

3. (4 分) 在学校举办的“中华诗词大赛”中，有 11 名选手进入决赛，他们的决赛成绩各不相同，其中一名参赛选手想知道自己是否能进入前 6 名，他需要了解这 11 名学生成绩的 ()

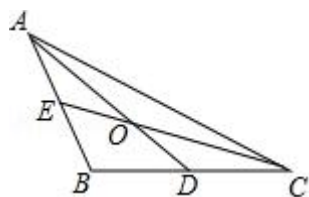
- A. 中位数 B. 平均数 C. 众数 D. 方差

4. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，如果 $\angle A = 50^\circ$ ，那么 $\angle 1 + \angle 2$ 的大小为 ()



- A. 130° B. 180° C. 230° D. 260°

5. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD、CE 交于点 O，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{AO}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 ()



- A. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ C. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

6. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=6$, $\cos \angle B = \frac{2}{3}$, 以点 B 为圆心, AB 为半径作

圆 B , 以点 C 为圆心, 半径长为 13 作圆 C , 圆 B 与圆 C 的位置关系是 ()

- A. 外切 B. 相交 C. 内切 D. 内含

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 分解因式: $a^3 - 4a =$ _____.

8. (4分) 方程 $x = \sqrt{4-3x}$ 的根是_____.

9. (4分) 不等式组 $\begin{cases} 2x-3 < 0 \\ 3x \geq 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

10. (4分) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-5}}$ 的定义域是_____.

11. (4分) 如果关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 没有实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

12. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象在第二、四象限,

点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 在函数的图象上, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, 可得 y_1 y_2 . (填“>”、“=”、“<”).

13. (4分) 一次抽奖活动设置了翻奖牌 (图展示的分别是翻奖牌的正反两面),

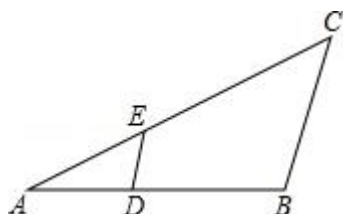
抽奖时, 你只能看到正面, 你可以在 9 个数字中任意选中一个数字, 可见抽中一副球拍的概率是 $\frac{1}{9}$, 那么请你根据题意写出一个事件, 使这个事件发生的概率是 $\frac{1}{3}$. 这个事件是_____.

1	2	3	谢谢参与	三张球票	谢谢参与
4	5	6	一张唱片	一副球拍	一张唱片
7	8	9	谢谢参与	一张唱片	谢谢参与

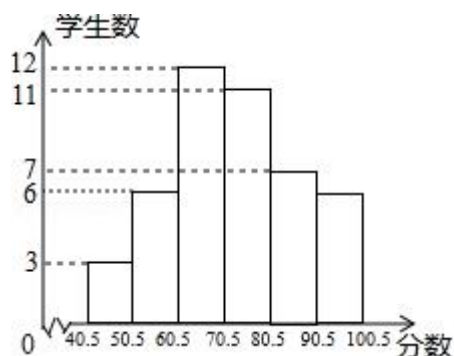
翻奖牌正面 翻奖牌反面

14. (4分) 正八边形的中心角等于_____度.

15. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D、E 分别是边 AB、AC 上的点, 如果 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$, 那么 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 周长的比是_____.



16. (4分) 某班学生参加环保知识竞赛, 已知竞赛得分都是整数. 把参赛学生的成绩整理后分为 6 小组, 画出竞赛成绩的频数分布直方图 (如图所示), 根据图中的信息, 可得成绩高于 60 分的学生占全班参赛人数的百分率是_____.



17. (4分) 一个滑轮起重装置如图所示, 滑轮的半径是 10cm, 当滑轮的一条半径 OA 绕轴心 O 按逆时针方向旋转的角度为 120° 时, 重物上升_____cm (结果保留 π).



18. (4 分) 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转得到 $\triangle EBD$, 点 E 、点 D 分别与点 A 、点 C 对应, 且点 D 在边 AC 上, 边 DE 交边 AB 于点 F , $\triangle BDC \sim \triangle ABC$. 已知 $BC = \sqrt{10}$, $AC = 5$, 那么 $\triangle DBF$ 的面积等于_____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + (-1)^{2017} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - 3\sin 60^\circ$.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x-3y+2=0 \\ x^2+4xy+4y^2=9 \end{cases}$$

21. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知正比例函数的图象与反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象交于点 $A(m, 4)$.

(1) 求正比例函数的解析式;

(2) 将正比例函数的图象向下平移 6 个单位得到直线 l , 设直线 l 与 x 轴的交点为 B , 求 $\angle ABO$ 的正弦值.

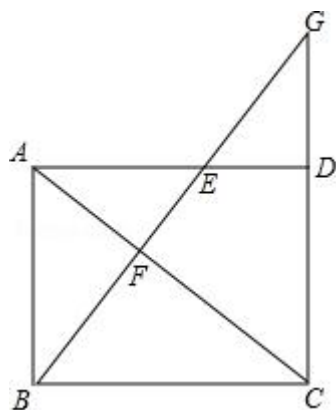
22. (10 分) 上海首条中运量公交线路 71 路已正式开通. 该线路西起沪青平公路申昆路, 东至延安东路中山东一路, 全长 17.5 千米. 71 路车行驶于专设的公交车道, 又配以专用的公交信号灯. 经测试, 早晚高峰时段 71 路车在专用车道内行驶的平均速度比在非专用车道每小时快 6 千米, 因此单程可节省时

间 22.5 分钟. 求早晚高峰时段 71 路车在专用车道内行驶的平均车速.

23. (12 分) 已知: 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 为对角线, E 是边 AD 上一点, $BE \perp AC$ 交 AC 于点 F , BE 、 CD 的延长线交于点 G , 且 $\angle ABE = \angle CAD$.

(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形;

(2) 如果 $AE = EG$, 求证: $AC^2 = BC \cdot BG$.

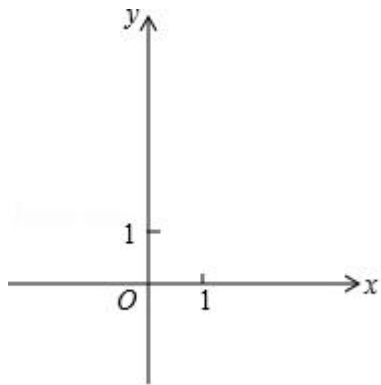


24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y = x^2 - 2x + m$ ($m > 0$) 的对称轴与比例系数为 5 的反比例函数图象交于点 A , 与 x 轴交于点 B , 抛物线的图象与 y 轴交于点 C , 且 $OC = 3OB$.

(1) 求点 A 的坐标;

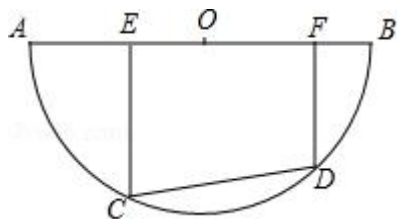
(2) 求直线 AC 的表达式;

(3) 点 E 是直线 AC 上一动点, 点 F 在 x 轴上方的平面内, 且使以 A 、 B 、 E 、 F 为顶点的四边形是菱形, 直接写出点 F 的坐标.



25. (14 分) 如图, 半圆 O 的直径 $AB=10$, 有一条定长为 6 的动弦 CD 在弧 AB 上滑动 (点 C 、点 D 分别不与点 A 、点 B 重合), 点 E 、 F 在 AB 上, $EC \perp CD$, $FD \perp CD$.

- (1) 求证: $EO=OF$;
- (2) 联结 OC , 如果 $\triangle ECO$ 中有一个内角等于 45° , 求线段 EF 的长;
- (3) 当动弦 CD 在弧 AB 上滑动时, 设变量 $CE=x$, 四边形 $CDFE$ 面积为 S , 周长为 l , 问: S 与 l 是否分别随着 x 的变化而变化? 试用所学的函数知识直接写出它们的函数解析式及函数定义域, 以说明你的结论.



2017 年上海市普陀区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分) [下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1. (4 分) 下列计算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^3 \div a^3 = a$ C. $3a + 3b = 3ab$ D. $(a^3)^2 = a^6$

【考点】35：合并同类项；46：同底数幂的乘法；47：幂的乘方与积的乘方；48：同底数幂的除法.

【分析】根据幂的运算法则和同类项的定义判断可得.

【解答】解：A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，此选项错误；

B、 $a^3 \div a^3 = 1$ ，此选项错误；

C、 $3a$ 与 $3b$ 不是同类项，不能合并，此选项错误；

D、 $(a^3)^2 = a^6$ ，此选项正确；

故选：D.

【点评】本题主要考查幂的运算和同类项的定义，熟练掌握的幂的运算法则是解题的关键.

2. (4 分) 如果下列二次根式中有一个与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式，那么这个根式是 ()

A. $\sqrt{2a}$ B. $\sqrt{3a^2}$ C. $\sqrt{a^3}$ D. $\sqrt{a^4}$

【考点】77：同类二次根式.

【分析】先化简各式，再根据同类二次根式的定义判断可得.

【解答】解：A、 $\sqrt{2a}$ 的被开方数是 2，不是同类二次根式；

B、 $\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}|a|$ ，被开方数是 3，不是同类二次根式；

C、 $\sqrt{a^3}=a\sqrt{a}$ ，被开方数是 a ，是同类二次根式；

D、 $\sqrt{a^4}=a^2$ ，不是同类二次根式，

故选：C.

【点评】 本题主要考查同类二次根式的定义，掌握同类二次根式的定义：把几个二次根式化为最简二次根式以后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式是解题的关键.

3. (4 分) 在学校举办的“中华诗词大赛”中，有 11 名选手进入决赛，他们的决赛成绩各不相同，其中一名参赛选手想知道自己是否能进入前 6 名，他需要了解这 11 名学生成绩的 ()

A. 中位数

B. 平均数

C. 众数

D. 方差

【考点】 WA: 统计量的选择.

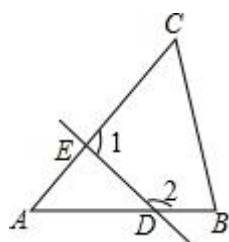
【分析】 11 人成绩的中位数是第 6 名的成绩. 参赛选手要想知道自己是否能进入前 6 名，只需要了解自己的成绩以及全部成绩的中位数，比较即可.

【解答】 解：由于总共有 11 个人，且他们的分数互不相同，第 6 的成绩是中位数，要判断是否进入前 6 名，故应知道中位数的多少.

故选：A.

【点评】 此题主要考查统计的有关知识，主要包括平均数、中位数、众数、方差的意义.

4. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在边 AB、AC 上，如果 $\angle A=50^\circ$ ，那么 $\angle 1+\angle 2$ 的大小为 ()



- A. 130° B. 180° C. 230° D. 260°

【考点】K7: 三角形内角和定理.

【分析】根据三角形的外角性质可得 $\angle 1 = \angle A + \angle ADE$, $\angle 2 = \angle A + \angle AED$, 再根据已知和三角形内角和等于 180° 即可求解.

【解答】解: $\because \angle 1 = \angle A + \angle ADE$, $\angle 2 = \angle A + \angle AED$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 2$$

$$= \angle A + \angle ADE + \angle A + \angle AED$$

$$= \angle A + (\angle ADE + \angle A + \angle AED)$$

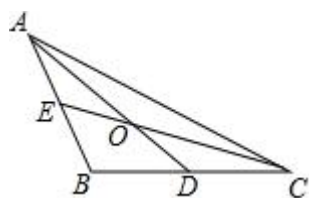
$$= 50^\circ + 180^\circ$$

$$= 230^\circ.$$

故选: C.

【点评】考查了三角形的外角性质和三角形内角和定理: 三角形内角和等于 180° .

5. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 中线 AD 、 CE 交于点 O , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AO}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为 ()



- A. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ C. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

【考点】K5: 三角形的重心; LM: *平面向量.

【分析】利用三角形的重心性质得到： $AO=\frac{2}{3}AD$ ；结合平面向量的三角形法则解答即可.

【解答】解：∵在 $\triangle ABC$ 中， AD 是中线， $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{b}.$$

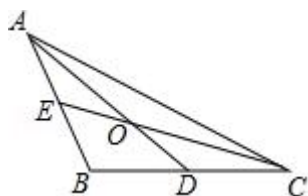
$$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.$$

又∵点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AO=\frac{2}{3}AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}.$$

故选：B.



【点评】此题主要考查了平面向量与重心有关知识，根据重心知识得出 $AO=\frac{2}{3}AD$ 是解题的关键.

6. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=6$ ， $\cos \angle B=\frac{2}{3}$ ，以点 B 为圆心， AB 为半径作圆 B ，以点 C 为圆心，半径长为13作圆 C ，圆 B 与圆 C 的位置关系是()
- A. 外切 B. 相交 C. 内切 D. 内含

【考点】MJ：圆与圆的位置关系.

【分析】解直角三角形得到 $BC=8$ ，得到 $6+13>8$ ，于是得到结论.

【解答】解：∵ $AB=AC=6$ ， $\cos \angle B=\frac{2}{3}$,

$$\therefore BC=8,$$

∴以点 B 为圆心， AB 为半径作圆 B ，以点 C 为圆心，半径长为13作圆 C ,

$$\therefore 6+13>8,$$

∴ 圆 B 与圆 C 的位置关系是相交,

故选: B.

【点评】 本题考查了圆与圆的位置关系, 熟悉 5 种位置关系, 是解答此题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 分解因式: $a^3 - 4a = \underline{a(a+2)(a-2)}$.

【考点】 55: 提公因式法与公式法的综合运用.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 原式提取 a, 再利用平方差公式分解即可.

【解答】 解: 原式 $= a(a^2 - 4)$

$= a(a+2)(a-2)$.

故答案为: $a(a+2)(a-2)$

【点评】 此题考查了提公因式法与公式法的综合运用, 熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

8. (4 分) 方程 $x = \sqrt{4-3x}$ 的根是 $\underline{x=1}$.

【考点】 AG: 无理方程.

【分析】 先把方程两边同时平方转化为有理方程, 然后解得有理方程的解, 最后要进行检验, 本题得以解决.

【解答】 解: $x = \sqrt{4-3x}$ 两边平方, 得

$$x^2 = 4 - 3x,$$

解得, $x=1$ 或 $x=-4$,

检验: 当 $x=-4$ 不是原方程的根,

故原无理方程的解是 $x=1$,

故答案为: $x=1$

【点评】 本题考查无理方程，解题的关键是明确无理方程的解法，注意解方程最后要检验.

9. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 2x-3 < 0 \\ 3x \geq 0 \end{cases}$ 的解集是 $0 \leq x < \frac{3}{2}$.

【考点】 CB: 解一元一次不等式组.

【分析】 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】 解：解不等式 $2x - 3 < 0$ ，得： $x < \frac{3}{2}$,

解不等式 $3x \geq 0$ ，得： $x \geq 0$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $0 \leq x < \frac{3}{2}$,

故答案为： $0 \leq x < \frac{3}{2}$.

【点评】 本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

10. (4 分) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-5}}$ 的定义域是 $x \neq 5$.

【考点】 E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】 根据分母不等于 0 列式计算即可得解.

【解答】 解：由题意得， $x - 5 \neq 0$,

解得 $x \neq 5$.

故答案为： $x \neq 5$.

【点评】 本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；(2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；(3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

11. (4分) 如果关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 没有实数根, 那么 m 的取值范围是

$$m > \frac{9}{4}.$$

【考点】AA: 根的判别式; C6: 解一元一次不等式.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据根的判别式得出 $b^2 - 4ac < 0$, 代入求出不等式的解集即可得到答案.

【解答】解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 没有实数根,

$$\therefore b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times m < 0,$$

$$\text{解得: } m > \frac{9}{4},$$

$$\text{故答案为: } m > \frac{9}{4}.$$

【点评】本题主要考查对根的判别式, 解一元一次不等式等知识点的理解和掌握, 能根据题意得出 $(-3)^2 - 4 \times 1 \times m < 0$ 是解此题的关键.

12. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象在第二、四象限,

点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 在函数的图象上, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, 可得 y_1 y_2 . (填“>”、“=”、“<”).

【考点】G6: 反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】先根据题意判断出 k 符号, 再由反比例函数的增减性即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象在第二、四象限,

$\therefore k < 0$, 且在每一象限内 y 随 x 的增大而增大.

$$\because x_1 < x_2 < 0,$$

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故答案为: <.

【点评】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 熟知反比例函数图象上

各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

13. (4 分) 一次抽奖活动设置了翻奖牌 (图展示的分别是翻奖牌的正反两面),

抽奖时, 你只能看到正面, 你可以在 9 个数字中任意选中一个数字, 可见抽中一副球拍的概率是 $\frac{1}{9}$, 那么请你根据题意写出一个事件, 使这个事件发生的概率是 $\frac{1}{3}$. 这个事件是 抽中一张唱片.

1	2	3	谢谢参与	三张球票	谢谢参与
4	5	6	一张唱片	一副球拍	一张唱片
7	8	9	谢谢参与	一张唱片	谢谢参与

翻奖牌正面 翻奖牌反面

【考点】X3: 概率的意义.

【分析】直接利用标有一张唱片的张数除以总数, 进而得出答案.

【解答】解: $\because$ 标有一张唱片的有 3 张, 总数有 9 张,

$\therefore$ 抽中一张唱片的概率为: $\frac{1}{3}$.

故答案为: 抽中一张唱片.

【点评】此题主要考查了概率的意义, 正确掌握概率的意义是解题关键.

14. (4 分) 正八边形的中心角等于 45 度.

【考点】MM: 正多边形和圆.

【分析】根据中心角是正多边形相邻的两个半径的夹角来解答.

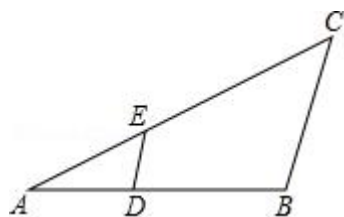
【解答】解: 正八边形的中心角等于 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$;

故答案为 45.

【点评】本题考查了正多边形和圆的知识, 解题的关键是牢记中心角的定义及求法.

15. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D、E 分别是边 AB、AC 上的点, 如果 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$,

那么 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 周长的比是 1: 3.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 根据已知条件可证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 利用相似三角形的性质即可得到 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比.

【解答】 解: $\because AD: DB = AE: EC = 1: 2$,

$\therefore AD: AB = AE: AC = 1: 3$,

$\therefore \angle A = \angle A$,

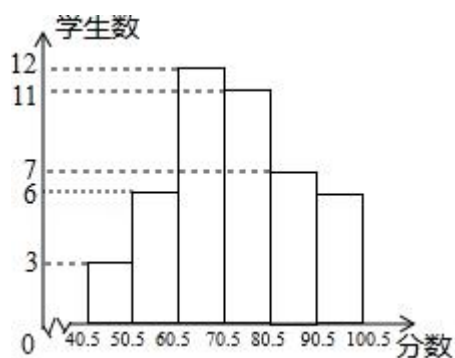
$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$;

$\therefore \triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的周长之比 $= 1: 3$.

故答案为: 1: 3.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 利用相似三角形的周长比等于相似比是解答此题的关键.

16. (4 分) 某班学生参加环保知识竞赛, 已知竞赛得分都是整数. 把参赛学生的成绩整理后分为 6 小组, 画出竞赛成绩的频数分布直方图 (如图所示), 根据图中的信息, 可得成绩高于 60 分的学生占全班参赛人数的百分率是 80%.



【考点】V8: 频数（率）分布直方图.

【分析】根据频数分布直方图可得全班的总人数及成绩高于 60 分的学生，从而得出答案.

【解答】解：∵全班的总人数为 $3+6+12+11+7+6=45$ 人，其中成绩高于 60 分的学生有 $12+11+7+6=36$ 人，

∴成绩高于 60 分的学生占全班参赛人数的百分率是 $\frac{36}{45} \times 100\% = 80\%$,

故答案为：80%.

【点评】本题主要考查频数分布直方图，根据频数分布直方图明确各分组人数是解题的关键.

17. (4 分) 一个滑轮起重装置如图所示，滑轮的半径是 10cm，当滑轮的一条半径 OA 绕轴心 O 按逆时针方向旋转的角度为 120° 时，重物上升 $\frac{20}{3}\pi$ cm (结果保留 π).



【考点】MN: 弧长的计算; R2: 旋转的性质.

【分析】求得半径为 10cm，圆心角为 120° 的弧长，即可得出答案.

【解答】解： $l = \frac{120\pi \times 10}{180}$

$$= \frac{20}{3}\pi \text{cm};$$

故答案为 $\frac{20}{3}\pi$.

【点评】本题考查了弧长公式，掌握弧长公式 $l = \frac{n\pi r}{180^\circ}$ 以及旋转的性质是解题的关键.

18. (4分) 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转得到 $\triangle EBD$ ，点 E 、点 D 分别与点 A 、点 C 对应，且点 D 在边 AC 上，边 DE 交边 AB 于点 F ， $\triangle BDC \sim \triangle ABC$. 已知 $BC = \sqrt{10}$ ， $AC = 5$ ，那么 $\triangle DBF$ 的面积等于 $\frac{45}{16}$.



【考点】R2：旋转的性质；S7：相似三角形的性质.

【分析】根据相似三角形的性质得到 $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC}$ ， $\angle CBD = \angle A$ ，得到 $CD = 2$ ， $AD = 3$ ，

根据旋转的性质得到 $\angle ABC = \angle EBD$ ， $\angle E = \angle A$ ， $AB = BE$ ， $DE = AC$ ，得到 $\angle$

$EBF = \angle A$ ，根据平行线的判定和性质得到 $\angle ADF = \angle E$ ，等量代换得到 $\angle E = \angle$

$EBF = \angle A = \angle ADF$ ，根据等腰三角形的判定得到 $EF = BF$ ， $AF = DF$ ，得到

$AB = DE = AC = 5$ ，根据相似三角形的性质得到 $\frac{DF}{DE} = \frac{3}{8}$ ，过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，

于是得到结论.

【解答】解： $\because \triangle BDC \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC}, \quad \angle CBD = \angle A,$$

$$\therefore CD = \frac{BC^2}{AC},$$

$$\because BC = \sqrt{10}, \quad AC = 5,$$

$$\therefore CD = 2,$$

$$\therefore AD=3,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转得到 $\triangle EBD$,

$$\therefore \angle ABC = \angle EBD, \angle E = \angle A, AB = BE, DE = AC,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle A,$$

$$\therefore BE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle E,$$

$$\therefore \angle E = \angle EBF = \angle A = \angle ADF,$$

$$\therefore EF = BF, AF = DF,$$

$$\therefore AF + BF = EF + DF,$$

$$\text{即 } AB = DE = AC = 5,$$

$$\therefore AD \parallel BE,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle BEF,$$

$$\therefore \frac{DF}{EF} = \frac{AD}{BE} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{DF}{DE} = \frac{3}{8},$$

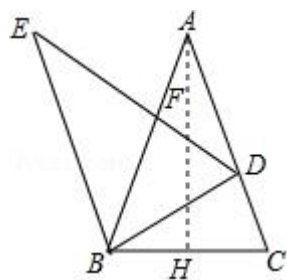
过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ,

$$\therefore AH = \sqrt{5^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{2} = \frac{15}{2},$$

$$\therefore \triangle DBF \text{ 的面积} = \frac{3}{8} S_{\triangle ABC} = \frac{45}{16}.$$

故答案为: $\frac{45}{16}$.



【点评】 本题考查了旋转的性质，相似三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，勾股定理，三角形面积的计算，熟练掌握旋转的性质是解题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10 分) 计算： $(\frac{1}{2})^{-3} + (-1)^{2017} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - 3\sin 60^\circ$.

【考点】 6F：负整数指数幂；79：二次根式的混合运算；T5：特殊角的三角函数值.

【专题】 11：计算题.

【分析】 先利用负整数指数幂和特殊角的三角函数值计算，再分母有理化，然后合并即可.

【解答】 解：原式 $= 8 - 1 + 2 + \sqrt{3} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= 9 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点评】 本题考查了二次根式的混合运算：先把二次根式化为最简二次根式，然后进行二次根式的乘除运算，再合并即可. 在二次根式的混合运算中，如能结合题目特点，灵活运用二次根式的性质，选择恰当的解题途径，往往能事半功倍.

20. (10 分) 解方程组：
$$\begin{cases} x-3y+2=0 \\ x^2+4xy+4y^2=9 \end{cases}$$

【考点】 AF：高次方程.

【专题】 1：常规题型.

【分析】 由完全平方公式，组中②可变形为 $(x+2y)^2=9$ ，即 $x+2y=3$ 或 $x+2y=-3$. 这样原方程组可变形为关于 x 、 y 的两个二元一次方程组，这两个二元

一次方程组的解就是原方程组的解.

【解答】 解:
$$\begin{cases} x-3y+2=0 \textcircled{1} \\ x^2+4xy+4y^2=9 \textcircled{2} \end{cases}$$

由②得: $(x+2y)^2=9$,

即: $x+2y=3$ 或 $x+2y=-3$

所以原方程组可化为 $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=-3 \end{cases}$.

解方程组 $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=3 \end{cases}$; 得 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$;

解方程组 $\begin{cases} x-3y=-2 \\ x+2y=-3 \end{cases}$; 得 $\begin{cases} x_2=-\frac{13}{5} \\ y_2=-\frac{1}{5} \end{cases}$.

$\therefore$ 原方程组的解是得 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}$; 得 $\begin{cases} x_2=-\frac{13}{5} \\ y_2=-\frac{1}{5} \end{cases}$.

【点评】 本题考查了二元二次方程组的解法. 把二元二次方程组转化为一元一次方程组是解决本题的关键. 解决此类问题通常利用公式或因式分解, 把其中的一个或两个高次方程降次为一元一次方程, 再重新结合得到关于未知数的一元一次方程组.

21. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知正比例函数的图象与反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图象交于点 $A(m, 4)$.

(1) 求正比例函数的解析式;

(2) 将正比例函数的图象向下平移 6 个单位得到直线 l , 设直线 l 与 x 轴的交点为 B , 求 $\angle ABO$ 的正弦值.

【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题; T7: 解直角三角形.

【分析】 (1) 由于点 A 经过 $(m, 4)$ 所以可求出 $m=2$, 再将 $A(2, 4)$ 代入反比例函数中即可求出 k 的值.

(2) 先求平移后的直线 l 的解析式, 然后求出 B 的坐标, 利用勾股定理可求出 AB 的长度, 利用正弦的定义即可求出 $\angle ABO$ 的正弦值.

【解答】 解: (1) $\because$ 反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象经过 $A(m, 4)$,

$$\therefore 4 = \frac{8}{m}, \text{ 解得 } m = 2.$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2, 4)$.

设正比例函数的解析式为 $y = kx$,

$\therefore$ 正比例函数的图象经过点 $A(2, 4)$,

$\therefore$ 可得 $4 = 2k$, 解得 $k = 2$.

$\therefore$ 正比例函数的解析式是 $y = 2x$

(2) $\because$ 正比例函数向下平移 6 个单位得到直线 l ,

$\therefore$ 直线 l 的表达式为 $y = 2x - 6$

$\therefore$ 直线 l 与 x 轴的交点为 B ,

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(3, 0)$

$\therefore$ 由勾股定理可知: $AB = \sqrt{17}$.

$$\therefore \sin \angle ABO = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

【点评】 本题考查反比例函数的综合问题, 涉及待定系数法求解析式, 解直角三角形, 勾股定理, 锐角三角形知识, 本题属于中等题型.

22. (10 分) 上海首条中运量公交线路 71 路已正式开通. 该线路西起沪青平公路申昆路, 东至延安东路中山东一路, 全长 17.5 千米. 71 路车行驶于专设的公交车道, 又配以专用的公交信号灯. 经测试, 早晚高峰时段 71 路车在专用车道内行驶的平均速度比在非专用车道每小时快 6 千米, 因此单程可节省时间 22.5 分钟. 求早晚高峰时段 71 路车在专用车道内行驶的平均车速.

【考点】 B7: 分式方程的应用.

【分析】 设早晚高峰时段 71 路在专用车道内行驶的平均车速 x 千米/时. 则非专用车道内行驶的平均速度是 $(x - 6)$ 千米/时, 根据“单程可节省时间 22.5 分钟”列出方程并解答.

【解答】 解: 设早晚高峰时段 71 路在专用车道内行驶的平均车速 x 千米/时.

根据题意, 可列方程 $\frac{17.5}{x-6} - \frac{17.5}{x} = \frac{22.5}{60}$.

整理得 $x^2 - 6x - 280 = 0$.

解得 $x_1 = 20$, $x_2 = -14$.

经检验 $x_1 = 20$, $x_2 = -14$ 都是原方程的解.

因为速度不能负数, 所以取 $x = 20$.

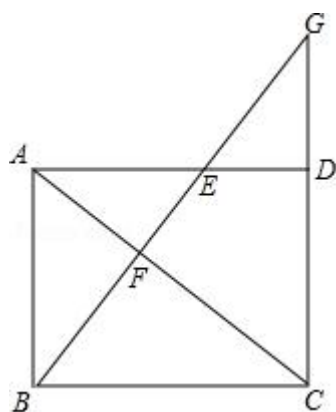
答: 71 路在专用车道内行驶的平均车速 20 千米/时.

【点评】 本题考查了分式方程的应用. 找到关键描述语, 找到合适的等量关系是解决问题的关键.

23. (12 分) 已知: 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, AC 为对角线, E 是边 AD 上一点, $BE \perp AC$ 交 AC 于点 F , BE 、 CD 的延长线交于点 G , 且 $\angle ABE = \angle CAD$.

(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是矩形;

(2) 如果 $AE = EG$, 求证: $AC^2 = BC \cdot BG$.



【考点】 L5: 平行四边形的性质; LD: 矩形的判定与性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 因为四边形 ABCD 是平行四边形, 所以只要证明 $\angle BAD=90^\circ$, 即可得到四边形 ABCD 是矩形;

(2) 连接 AG, 由平行四边形的性质和矩形的性质以及结合已知条件可证明 $\triangle BCG \sim \triangle ABC$, 再由相似三角形的性质: 对应边的比值相等即可证明 $AC^2=BC \cdot BG$.

【解答】 解:

(1) 证明:

$$\because BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle AFB=90^\circ.$$

$$\therefore \angle ABE + \angle BAF = 90^\circ.$$

$$\because \angle ABE = \angle CAD.$$

$$\therefore \angle CAD + \angle BAF = 90^\circ.$$

$$\text{即 } \angle BAD = 90^\circ.$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 ABCD 是矩形;

(2) 连接 AG.

$$\because AE=EG,$$

$$\therefore \angle EAG=\angle EGA.$$

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore AB\parallel CD, AD\parallel BC.$$

$$\therefore \angle ABG=\angle BGC.$$

$$\therefore \angle CAD=\angle BGC.$$

$$\therefore \angle AGC=\angle GAC.$$

$$\therefore CA=CG.$$

$$\because AD\parallel BC,$$

$$\therefore \angle CAD=\angle ACB.$$

$$\therefore \angle ACB=\angle BGC.$$

$\because$ 四边形 ABCD 是矩形,

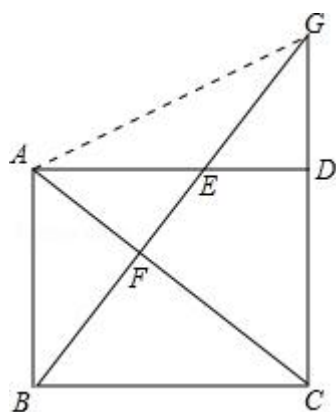
$$\therefore \angle BCG=90^\circ.$$

$$\therefore \angle BCG=\angle ABC,$$

$$\therefore \triangle BCG\sim\triangle ABC.$$

$$\therefore \frac{AC}{BG}=\frac{BC}{CG}.$$

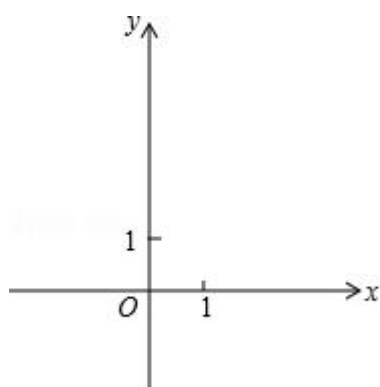
$$\therefore AC^2=BC\cdot BG.$$



【点评】 本题考查了平行四边形的性质、矩形的判断和性质、等腰三角形的判断和性质以及相似三角形的判断和性质，题目的综合性较强，难度中等，熟记相似三角形的各种判断方法是解题的关键.

24. (12 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=x^2-2x+m$ ($m>0$) 的对称轴与比例系数为 5 的反比例函数图象交于点 A，与 x 轴交于点 B，抛物线的图象与 y 轴交于点 C，且 $OC=3OB$.

- (1) 求点 A 的坐标;
- (2) 求直线 AC 的表达式;
- (3) 点 E 是直线 AC 上一动点，点 F 在 x 轴上方的平面内，且使以 A、B、E、F 为顶点的四边形是菱形，直接写出点 F 的坐标.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 可求得抛物线对称轴方程和反比例函数解析式，则可求得 A 点坐标;

(2) 可求得 B 点坐标, 再由 $OC=3OB$ 可求得 C 点坐标, 利用待定系数法可求得直线 AC 的表达式;

(3) 当 AB 为菱形的边时, 则 $BE=AB$ 或 $AE=AB$, 设出 E 点坐标, 可表示出 BE 的长, 可得到关于 E 点坐标的方程, 可求得 E 点坐标, 由 $AB \parallel EF$, 则可求得 F 点的坐标; 当 AB 为对角线时, 则 EF 被 AB 垂直平分, 则可求得 E 的纵坐标, 从而可求得 E 点坐标, 利用对称性可求得 F 点的坐标.

【解答】 解:

(1) 由题意可知二次函数图象的对称轴是直线 $x=1$, 反比例函数解析式是 $y=\frac{5}{x}$,
把 $x=1$ 代入 $y=\frac{5}{x}$, 得 $y=5$,
 $\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, 5)$;

(2) 由题意可得点 B 的坐标为 $(1, 0)$,

$\therefore OC=3OB$,

$\therefore OC=3$,

$\therefore m > 0$,

$\therefore m=3$,

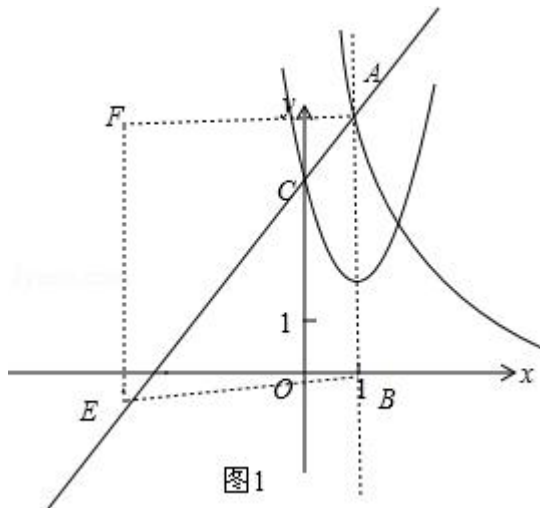
可设直线 AC 的表达式是 $y=kx+3$,

$\therefore$ 点 A 在直线 AC 上,

$\therefore k=2$,

$\therefore$ 直线 AC 的表达式是 $y=2x+3$;

(3) 当 AB、BE 为菱形的边时, 如图 1,



设 $E(x, 2x+3)$, 则 $BE = \sqrt{(x-1)^2 + (2x+3)^2}$,

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 为菱形,

$\therefore AB = BE = 5$,

$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (2x+3)^2} = 5$, 解得 $x=1$ (E 、 A 重合, 舍去) 或 $x=-3$,

此时 $E(-3, -3)$,

$\therefore EF \parallel AB$ 且 $EF = AB$,

$\therefore F(-3, 2)$,

当 AB 、 AE 为边时, 则 $AE = AB = 5$,

同理可求得 $AE = \sqrt{(x-1)^2 + (2x+3-5)^2}$,

$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (2x+3-5)^2} = 5$, 解得 $x=1-\sqrt{5}$ (此时 F 点在第三象限, 舍去) 或

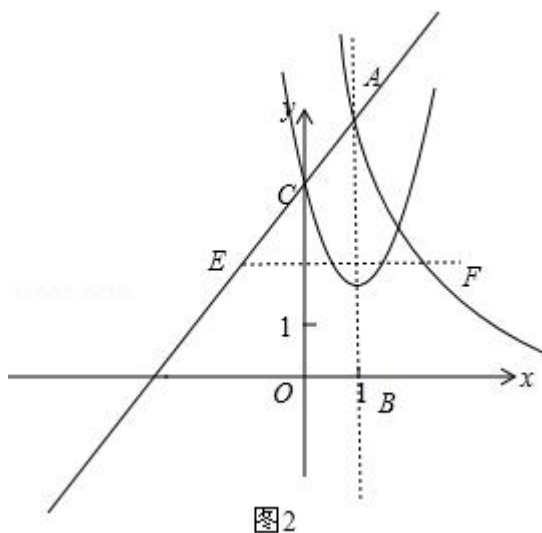
$x=1+\sqrt{5}$,

$\therefore E(1+\sqrt{5}, 5+2\sqrt{5})$,

$\therefore EF \parallel AB$ 且 $EF = AB$,

$\therefore F(1+\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$;

当 AB 为对角线时, 如图 2,



则 EF 过 AB 的中点,

$$\therefore A(1, 5), B(1, 0),$$

$$\therefore AB \text{ 的中点为 } (1, \frac{5}{2}),$$

$$\therefore EF \perp AB,$$

$$\therefore EF \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore E \text{ 点纵坐标为 } \frac{5}{2}, \text{ 代入 } y=2x+3 \text{ 可得 } \frac{5}{2}=2x+3, \text{ 解得 } x=-\frac{1}{4},$$

$$\therefore E(-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}),$$

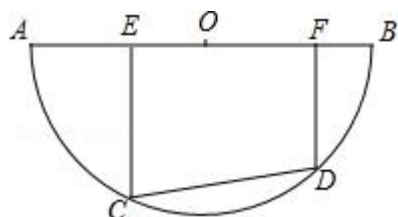
$$\therefore F(\frac{9}{4}, \frac{5}{2});$$

综上可知 F 点的坐标为 $(-3, 2)$ 或 $(1+\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ 或 $(\frac{9}{4}, \frac{5}{2})$.

【点评】 本题为二次函数的综合应用, 涉及待定系数法、菱形的性质、勾股定理、方程思想及分类讨论思想等. 在 (1) 中确定出 A 点的横坐标是解题的关键, 在 (2) 中求得 C 点坐标是解题的关键, 在 (3) 中确定出 E 点的位置是解题的关键, 注意分情况讨论. 本题考查知识点较多, 综合性较强, 难度适中.

25. (14 分) 如图, 半圆 O 的直径 AB=10, 有一条定长为 6 的动弦 CD 在弧 AB 上滑动 (点 C、点 D 分别不与点 A、点 B 重合), 点 E、F 在 AB 上, $EC \perp CD$, $FD \perp CD$.

- (1) 求证: $EO=OF$;
- (2) 联结 OC , 如果 $\triangle ECO$ 中有一个内角等于 45° , 求线段 EF 的长;
- (3) 当动弦 CD 在弧 AB 上滑动时, 设变量 $CE=x$, 四边形 $CDFE$ 面积为 S , 周长为 l , 问: S 与 l 是否分别随着 x 的变化而变化? 试用所学的函数知识直接写出它们的函数解析式及函数定义域, 以说明你的结论.



【考点】MR: 圆的综合题.

【分析】(1) 过点 O 作 $OH \perp CD$ 于 H , 由垂径定理得出 $CH=DH$, 证得 $EC \parallel OH \parallel FD$, 即可得出结论;

(2) 由勾股定理求出 $OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = 4$, 由平行线的性质得出 $\angle ECO = \angle COH \neq 45^\circ$; 分两种情况讨论:

- ①当 $\angle EOC = 45^\circ$ 时, 过点 E 作 $EM \perp OC$ 于 M , 则 $\triangle OEM$ 是等腰直角三角形, 得出 $EM=OM$, 证明 $\triangle ECM \sim \triangle COH$, 得出 $EM:CM=CH:OH=3:4$. 设 $EM=3m$, $CM=4m$. 则 $OM=3m$, $EO=\sqrt{2}OM=3\sqrt{2}m$, 由 $CM+OM=OC$, 得出方程 $4m+3m=5$, 解方程得出 $m=\frac{5}{7}$, 即可得出 $EO=\frac{15\sqrt{2}}{7}$, $EF=2EO=\frac{30\sqrt{2}}{7}$.
- ②当 $\angle CEO=45^\circ$ 时, 过点 O 作 $ON \perp EC$ 于 N ; 在 $Rt\triangle CON$ 中, $ON=CH=3$, $CN=OH=4$. 在 $Rt\triangle EON$ 中, $EO=3\sqrt{2}$. 得出 $EF=2OE=6\sqrt{2}$ 即可.

(3) 证明 OH 是梯形 $EFDC$ 的中位线, 由梯形中位线定理得出 $EC+FD=2OH=8$, 由梯形面积公式得出 $S=\frac{1}{2}(EC+FD) \cdot CD=OH \cdot CD=4 \times 6=24$ ($0 < x < 8$); 作 $FG \perp EC$ 于 G , 则 $GC=FD=8-x$, $GF=CD=6$, 求出 $EG=EC-GC=2x-8$,

由勾股定理得出 $EF = \sqrt{EG^2 + FG^2} = 2\sqrt{x^2 - 8x + 25}$, 得出四边形 CDFE 周长

$$l = EF + EC + CD + FD = EF + 2OH + CD = 2\sqrt{x^2 - 8x + 25} + 14 \quad (0 < x < 8).$$

【解答】(1) 证明: 过点 O 作 $OH \perp CD$ 于 H, 如图所示:

则 $CH = DH$,

$\because EC \perp CD, FD \perp CD, OH \perp CD$,

$\therefore EC \parallel OH \parallel FD$,

$\therefore CH = DH$,

$\therefore EO = FO$;

(2) 解: $\because OH \perp CD, OC = \frac{1}{2}AB = 5$,

$$\therefore CH = \frac{1}{2}CD = 3,$$

$$\therefore OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$\therefore EC \parallel OH$,

$\therefore \angle ECO = \angle COH \neq 45^\circ$;

①当 $\angle EOC = 45^\circ$ 时, 过点 E 作 $EM \perp OC$ 于 M,

则 $\triangle OEM$ 是等腰直角三角形,

$\therefore EM = OM$,

$\because \angle ECM = \angle COH, \angle CME = \angle OHC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ECM \sim \triangle COH$,

$\therefore EM : CM = CH : OH = 3 : 4$.

在 $Rt\triangle ECM$ 中, 设 $EM = 3m, CM = 4m$. 则 $OM = 3m, EO = \sqrt{2}OM = 3\sqrt{2}m$,

$\therefore CM + OM = OC$,

$$\therefore 4m+3m=5,$$

$$\text{解得: } m=\frac{5}{7},$$

$$\therefore EO=\frac{15\sqrt{2}}{7},$$

$$EF=2EO=\frac{30\sqrt{2}}{7}.$$

②当 $\angle CEO=45^\circ$ 时, 过点 O 作 $ON \perp EC$ 于 N; .

在 $Rt\triangle CON$ 中, $ON=CH=3$, $CN=OH=4$.

在 $Rt\triangle EON$ 中, $EO=3\sqrt{2}$.

$$\therefore EF=2OE=6\sqrt{2}.$$

综上所述, 线段 EF 的长等于 $\frac{30\sqrt{2}}{7}$ 或 $6\sqrt{2}$.

(3) 解: 四边形 CDFE 的面积 S 不随变量 x 的变化而变化, 是一个不变量;

四边形 CDFE 的周长 l 随变量 x 的变化而变化. 理由如下:

由①得: $EO=FO$, $CH=DH$,

$\therefore OH$ 是梯形 EFDC 的中位线,

$$\therefore EC+FD=2OH=8,$$

$\therefore$ 四边形 CDFE 面积为 $S=\frac{1}{2}(EC+FD) \cdot CD=OH \cdot CD=4 \times 6=24$ ($0 < x < 8$) (是一个常值函数);

作 $FG \perp EC$ 于 G, 则 $GC=FD=8-x$, $GF=CD=6$,

$$\therefore EG=EC-GC=x-(8-x)=2x-8,$$

$$\therefore EF=\sqrt{EG^2+FG^2}=\sqrt{(2x-8)^2+6^2}=2\sqrt{x^2-8x+25},$$

$\therefore$ 四边形 CDFE 周长 $l=EF+EC+CD+FD=EF+2OH+CD=2\sqrt{x^2-8x+25}+14$ ($0 < x < 8$),

即 $l=2\sqrt{x^2-8x+25}+14$ ($0 < x < 8$).

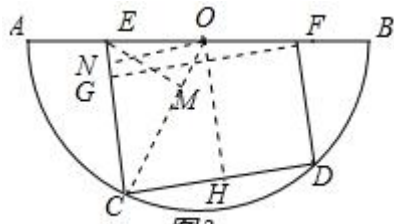


图3

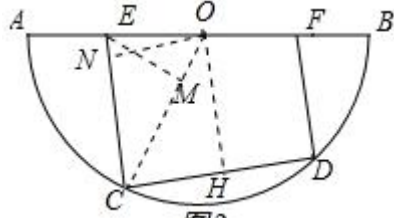


图2

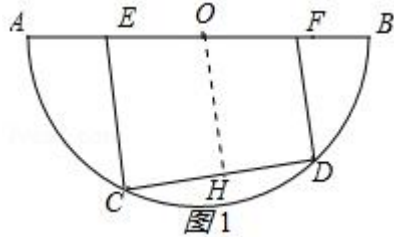


图1

【点评】 本题是圆的综合题目，考查了垂径定理、勾股定理、平行线的性质、梯形中位线定理、等腰直角三角形的判定与性质、梯形面积的计算等知识；本题综合性强，有一定难度.