

2017 年上海市金山区中考数学一模试卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

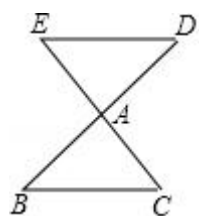
1. (4 分) 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = -(x-1)^2 + 2$ 的顶点坐标是 ()

- A. $(-1, 2)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, -1)$ D. $(2, 1)$

2. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $BC = 4$, 那么 $\angle A$ 的正弦值是 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

3. (4 分) 如图, 下列能判断 $BC \parallel ED$ 的条件是 ()



- A. $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$ B. $\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AC}$ C. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$

4. (4 分) 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别是 2 和 6, 若 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交, 那么圆心距 O_1O_2 的取值范围是 ()

- A. $2 < O_1O_2 < 4$ B. $2 < O_1O_2 < 6$ C. $4 < O_1O_2 < 8$ D. $4 < O_1O_2 < 10$

5. (4 分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 那么下列说法正确的是 ()

- A. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$ B. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
C. 如果 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 那么 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ D. 如果 $\vec{a} = -\vec{b}$, 那么 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

6. (4 分) 已知等腰三角形的腰长为 6cm, 底边长为 4cm, 以等腰三角形的顶角的顶点为圆心 5cm 为半径画圆, 那么该圆与底边的位置关系是 ()

- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不能确定

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 如果 $3x = 4y$, 那么 $\frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (4 分) 已知二次函数 $y = x^2 - 2x + 1$, 那么该二次函数的图象的对称轴是 .

9. (4分) 已知抛物线 $y=3x^2+x+c$ 与 y 轴的交点坐标是 $(0, -3)$, 那么 $c=$ _____.

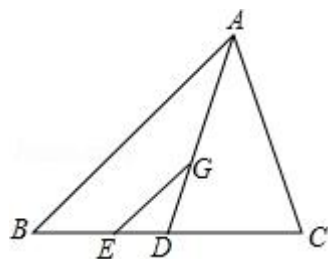
10. (4分) 已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x$ 经过点 $(-2, m)$, 那么 $m=$ _____.

11. (4分) 设 α 是锐角, 如果 $\tan\alpha=2$, 那么 $\cot\alpha=$ _____.

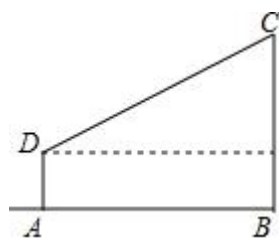
12. (4分) 在直角坐标平面中, 将抛物线 $y=2x^2$ 先向上平移 1 个单位, 再向右平移 1 个单位, 那么平移后的抛物线解析式是_____.

13. (4分) 已知 $\odot A$ 的半径是 2, 如果 B 是 $\odot A$ 外一点, 那么线段 AB 长度的取值范围是_____.

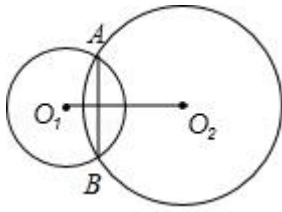
14. (4分) 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 联结 AG 并延长交 BC 于点 D , $GE \parallel AB$ 交 BC 于 E , 若 $AB=6$, 那么 $GE=$ _____.



15. (4分) 如图, 在地面上离旗杆 BC 底部 18 米的 A 处, 用测角仪测得旗杆顶端 C 的仰角为 30° , 已知测角仪 AD 的高度为 1.5 米, 那么旗杆 BC 的高度为_____米.

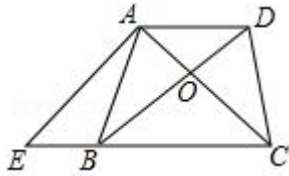


16. (4分) 如图, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别是 1 和 $\sqrt{3}$, $O_1O_2=2$, 那么两圆公共弦 AB 的长为_____.



17. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 与 BD 交于 O 点, $DO:BO=1:$

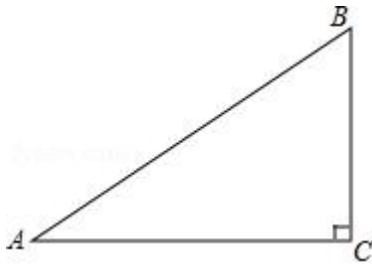
2, 点 E 在 CB 的延长线上, 如果 $S_{\triangle AOD}:S_{\triangle ABE}=1:3$, 那么 $BC:BE=$ _____.



18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=8$, $BC=6$, D 是 AB 的中点,

点 E 在边 AC 上, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 使得点 A 落在点 A' 处, 当 $A'E \perp AC$

时, $A'B=$ _____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

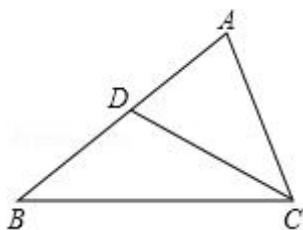
19. (10分) 计算: $\sin 30^\circ \cdot \tan 30^\circ - \frac{1}{3} \cos 60^\circ \cdot \cot 30^\circ + \frac{\tan 45^\circ}{\sin^2 45^\circ}$.

20. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 中点, 联结 CD .

(1) 若 $AB=10$ 且 $\angle ACD=\angle B$, 求 AC 的长.

(2) 过 D 点作 BC 的平行线交 AC 于点 E , 设 $\overrightarrow{DE}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$, 请用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表

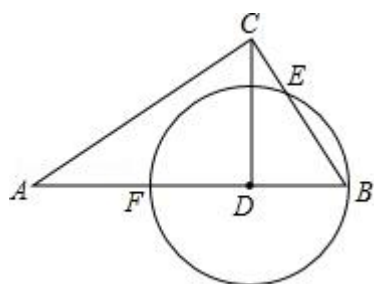
示 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ (直接写出结果)



21. (10 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $CD \perp AB$ 于点 D , $\odot D$ 经过点 B , 与 BC 交于点 E , 与 AB 交于点 F . 已知 $\tan A = \frac{1}{2}$, $\cot \angle ABC = \frac{3}{4}$, $AD = 8$.

求 (1) $\odot D$ 的半径;

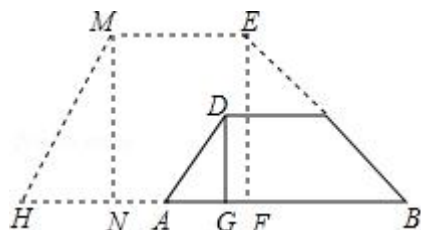
(2) CE 的长.



22. (10 分) 如图, 拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$, 坝顶宽 DC 为 6 米, 坝高 DG 为 2 米, 迎水坡 BC 的坡角为 30° , 坝底宽 AB 为 $(8+2\sqrt{3})$ 米.

(1) 求背水坡 AD 的坡度;

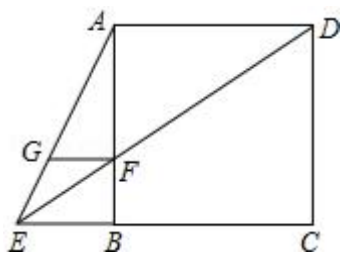
(2) 为了加固拦水坝, 需将水坝加高 2 米, 并且保持坝顶宽度不变, 迎水坡和背水坡的坡度也不变, 求加高后坝底 HB 的宽度.



23. (12 分) 如图, 已知正方形 $ABCD$, 点 E 在 CB 的延长线上, 联结 AE 、 DE , DE 与边 AB 交于点 F , $FG \parallel BE$ 且与 AE 交于点 G .

(1) 求证: $GF = BF$.

(2) 在 BC 边上取点 M , 使得 $BM = BE$, 联结 AM 交 DE 于点 O . 求证: $FO \cdot ED = OD \cdot EF$.



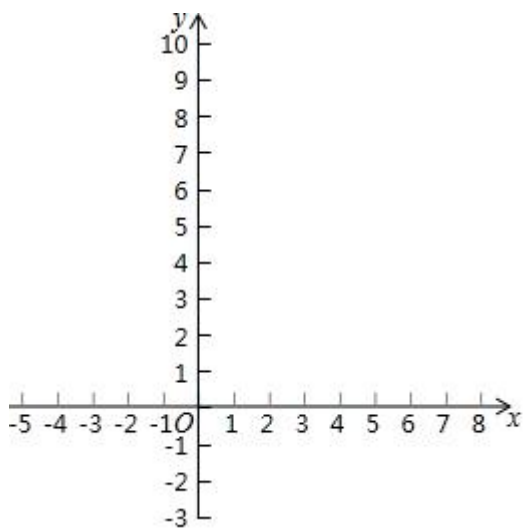
24. (12 分) 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -x^2 + 2bx + c$ 与 x 轴交于点 A、B

(点 A 在点 B 的右侧)，且与 y 轴正半轴交于点 C，已知 A (2, 0)

(1) 当 B (-4, 0) 时，求抛物线的解析式；

(2) O 为坐标原点，抛物线的顶点为 P，当 $\tan \angle OAP = 3$ 时，求此抛物线的解析式；

(3) O 为坐标原点，以 A 为圆心 OA 长为半径画 $\odot A$ ，以 C 为圆心， $\frac{1}{2}OC$ 长为半径画圆 $\odot C$ ，当 $\odot A$ 与 $\odot C$ 外切时，求此抛物线的解析式.



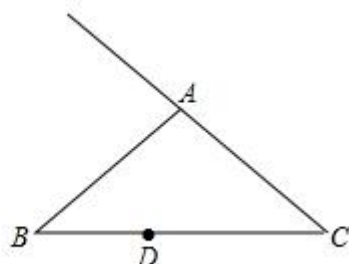
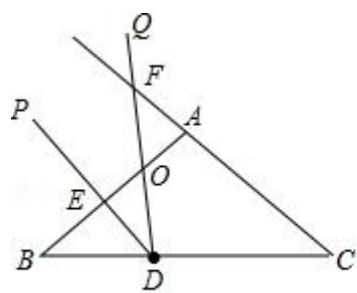
25. (14 分) 已知 $\triangle ABC$ ， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ， $\angle PDQ$ 的顶点 D 在 BC 边上，

DP 交 AB 边于点 E，DQ 交 AB 边于点 O 且交 CA 的延长线于点 F (点 F 与点 A 不重合)，设 $\angle PDQ = \angle B$ ， $BD = 3$.

(1) 求证： $\triangle BDE \sim \triangle CFD$ ；

(2) 设 $BE = x$ ， $OA = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；

(3) 当 $\triangle AOF$ 是等腰三角形时，求 BE 的长.



备用图

2017 年上海市金山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -(x-1)^2 + 2$ 的顶点坐标是 ()

- A. $(-1, 2)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, -1)$ D. $(2, 1)$

【考点】H3: 二次函数的性质.

【分析】由抛物线解析式可求得答案.

【解答】解:

$$\because y = -(x-1)^2 + 2,$$

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为 $(1, 2)$,

故选: B.

【点评】本题主要考查二次函数的性质，掌握二次函数的顶点式是解题的关键，

即在 $y = a(x-h)^2 + k$ 中，顶点坐标为 (h, k) ，对称轴为 $x = h$.

2. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 4$ ，那么 $\angle A$ 的正弦值是 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【考点】T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】根据 $\sin A = \frac{BC}{AB}$ 代入数据直接得出答案.

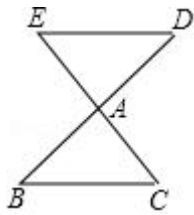
【解答】解: $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 4$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5},$$

故选: D.

【点评】本题考查了锐角三角函数的定义及运用: 在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

3. (4 分) 如图，下列能判断 $BC \parallel ED$ 的条件是 ()



A. $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB}$

B. $\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AC}$

C. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

D. $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$

【考点】S4: 平行线分线段成比例.

【分析】根据平行线分线段成比例定理, 对每一项进行分析即可得出答案.

【解答】解: $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$,

$\therefore BC \parallel ED$;

故选: C.

【点评】此题考查了平行线分线段成比例, 找准对应关系, 列出正确的比例式是解题的关键.

4. (4 分) 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别是 2 和 6, 若 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交, 那么圆心距 O_1O_2 的取值范围是 ()

A. $2 < O_1O_2 < 4$ B. $2 < O_1O_2 < 6$ C. $4 < O_1O_2 < 8$ D. $4 < O_1O_2 < 10$

【考点】MJ: 圆与圆的位置关系.

【分析】本题直接告诉了两圆的半径及两圆相交, 求圆心距范围内的可能取值, 根据数量关系与两圆位置关系的对应情况便可直接得出答案. 相交, 则 $R - r < P < R + r$. (P 表示圆心距, R, r 分别表示两圆的半径).

【解答】解: 两圆半径差为 4, 半径和为 8,

两圆相交时, 圆心距大于两圆半径差, 且小于两圆半径和,

所以, $4 < O_1O_2 < 8$.

故选: C.

【点评】本题考查了由数量关系及两圆位置关系确定圆心距范围内的数的方法, 属于基础题, 比较简单.

5. (4分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 那么下列说法正确的是 ()

- A. 如果 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, 那么 $\vec{a}=\vec{b}$ B. 如果 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- C. 如果 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 那么 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ D. 如果 $\vec{a}=-\vec{b}$, 那么 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$

【考点】LM: *平面向量.

【分析】根据向量的定义, 可得答案.

【解答】解: A、如果 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的大小相等, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向不一向相同, 故 A 错误;

B、如果 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的大小相等, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不一定平行, 故 B 错误;

C、如果 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的大小不应定相等, 故 C 错误;

D、如果 $\vec{a}=-\vec{b}$, 那么 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, 故 D 正确;

故选: D.

【点评】本题考查了平面向量, 利用向量的定义: 既有大小又有方向的量是解题关键.

6. (4分) 已知等腰三角形的腰长为 6cm, 底边长为 4cm, 以等腰三角形的顶角的顶点为圆心 5cm 为半径画圆, 那么该圆与底边的位置关系是 ()

- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不能确定

【考点】KH: 等腰三角形的性质; MB: 直线与圆的位置关系.

【分析】作 $AD \perp BC$ 于 D, 由等腰三角形的性质得出 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=2$, 由勾股定理求出 $AD=4\sqrt{2}>5$, 即 $d>r$, 即可得出结论.

【解答】解: 如图所示:

在等腰三角形 ABC 中, 作 $AD \perp BC$ 于 D,

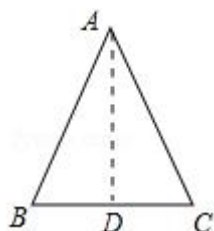
则 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=2$,

$$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}>5,$$

即 $d > r$,

∴ 该圆与底边的位置关系是相离;

故选: A.



【点评】 本题考查了等腰三角形的性质、直线与圆的位置关系、勾股定理; 熟练掌握等腰三角形的性质, 由勾股定理求出 AD 是解决问题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 如果 $3x=4y$, 那么 $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$.

【考点】 S1: 比例的性质.

【分析】 根据等式的性质, 可得答案.

【解答】 解: 由 $3x=4y$, 得 $x: y=4: 3$,

故答案为: $\frac{4}{3}$.

【点评】 本题考查了比例的性质, 等式的两边都除以 $3y$ 是解题关键.

8. (4 分) 已知二次函数 $y=x^2 - 2x+1$, 那么该二次函数的图象的对称轴是 $x=1$.

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【分析】 用配方法将抛物线的一般式转化为顶点式, 可求抛物线的对称轴.

【解答】 解: $\because y=x^2 - 2x+1 = (x-1)^2$,

对称轴是: $x=1$.

故本题答案为: $x=1$.

【点评】 本题考查了二次函数的解析式与对称轴的关系. 用配方法或对称轴公式

可求抛物线的对称轴.

9. (4分) 已知抛物线 $y=3x^2+x+c$ 与 y 轴的交点坐标是 $(0, -3)$, 那么 $c=$ -3.

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 y 轴上点的坐标特点为横坐标为 0, 纵坐标为 y , 把 $x=0$ 代入即可求得交点坐标为 $(0, c)$, 再根据已知条件得出 c 的值.

【解答】解: 当 $x=0$ 时, $y=c$,

$\therefore$ 抛物线 $y=3x^2+x+c$ 与 y 轴的交点坐标是 $(0, -3)$,

$\therefore c=-3$,

故答案为 -3 .

【点评】本题考查了函数图象上的点的坐标与函数解析式的关系, 要明确 y 轴上点的坐标横坐标为 0.

10. (4分) 已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x$ 经过点 $(-2, m)$, 那么 $m=$ 4.

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】直接把点 $(-2, m)$ 代入抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x$ 中, 列出 m 的一元一次方程即可.

【解答】解: $\therefore y=-\frac{1}{2}x^2-3x$ 经过点 $(-2, m)$,

$\therefore m=-\frac{1}{2} \times 2^2 - 3 \times (-2) = 4$,

故答案为 4.

【点评】本题主要考查了二次函数图象上点的坐标特征, 解题的关键是把点坐标代入抛物线解析式列出 m 的方程, 此题基础题.

11. (4分) 设 α 是锐角, 如果 $\tan \alpha = 2$, 那么 $\cot \alpha =$ $\frac{1}{2}$.

【考点】T3: 同角三角函数的关系.

【分析】根据一个角的余切等于它余角的正切，可得答案.

【解答】解：由 α 是锐角，如果 $\tan\alpha=2$ ，那么 $\cot\alpha=\frac{1}{2}$ ，

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了同角三角函数关系，利用一个角的余切等于它余角的正切是解题关键.

12. (4 分) 在直角坐标平面中，将抛物线 $y=2x^2$ 先向上平移 1 个单位，再向右平移 1 个单位，那么平移后的抛物线解析式是 $y=2(x-1)^2+1$.

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【专题】46：几何变换.

【分析】先确定抛物线 $y=2x^2$ 的顶点坐标为 $(0, 0)$ ，再利用点平移的规律写出 $(0, 0)$ 平移后对应点的坐标，然后根据顶点式写出平移后的抛物线解析式.

【解答】解：抛物线 $y=2x^2$ 的顶点坐标为 $(0, 0)$ ，把点 $(0, 0)$ 向上平移 1 个单位，再向右平移 1 个单位所得对应点的坐标为 $(1, 1)$ ，

所以平移后的抛物线解析式为 $y=2(x-1)^2+1$.

故答案为 $y=2(x-1)^2+1$.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换：由于抛物线平移后的形状不变，故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式.

13. (4 分) 已知 $\odot A$ 的半径是 2，如果 B 是 $\odot A$ 外一点，那么线段 AB 长度的取值范围是 $AB>2$.

【考点】M8：点与圆的位置关系.

【专题】17：推理填空题.

【分析】根据点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d>r$ ，可得线段 AB 长度的取值范围是 $AB>2$.

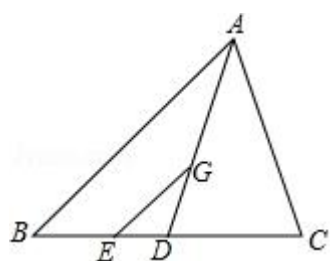
【解答】解：∵⊙A 的半径是 2，B 是⊙A 外一点，

∴线段 AB 长度的取值范围是 $AB > 2$.

故答案为： $AB > 2$.

【点评】此题主要考查了点与圆的位置关系，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：点的位置可以确定该点到圆心距离与半径的关系，反过来已知点到圆心距离与半径的关系可以确定该点与圆的位置关系.

14. (4 分) 如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，联结 AG 并延长交 BC 于点 D，GE $\parallel$ AB 交 BC 于 E，若 $AB=6$ ，那么 $GE=$ 2.



【考点】K5：三角形的重心；S4：平行线分线段成比例.

【分析】先根据点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，得出 $DG: DA=1: 3$ ，再根据平行线分线段成比例定理，得出 $\frac{EG}{BA} = \frac{DG}{DA}$ ，即 $\frac{EG}{6} = \frac{1}{3}$ ，进而得出 GE 的长.

【解答】解：∵点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

∴ $DG: AG=1: 2$,

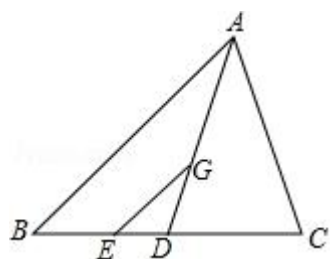
∴ $DG: DA=1: 3$,

∵ $GE \parallel AB$,

∴ $\frac{EG}{BA} = \frac{DG}{DA}$ ，即 $\frac{EG}{6} = \frac{1}{3}$,

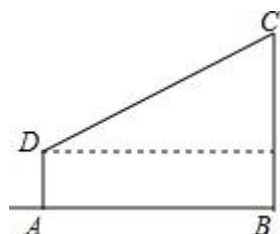
∴ $EG=2$,

故答案为： 2.



【点评】 本题主要考查了三角形的重心以及平行线分线段成比例定理的综合应用，解题时注意：重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2：1.

15. (4 分) 如图，在地面上离旗杆 BC 底部 18 米的 A 处，用测角仪测得旗杆顶端 C 的仰角为 30° ，已知测角仪 AD 的高度为 1.5 米，那么旗杆 BC 的高度为 $6\sqrt{3}+1.5$ 米.



【考点】 TA：解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题.

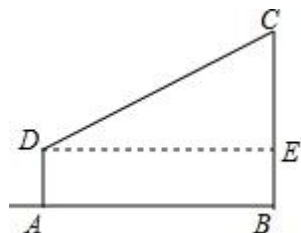
【分析】 根据正切的定义求出 CE，计算即可.

【解答】 解：在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $\tan \angle CDE = \frac{CE}{DE}$,

$$\therefore CE = DE \cdot \tan \angle CDE = 6\sqrt{3},$$

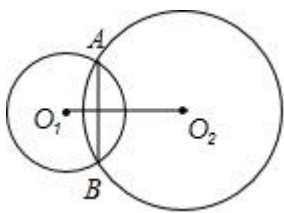
$$\therefore BC = CE + BE = 6\sqrt{3} + 1.5 \text{ (米)},$$

故答案为： $6\sqrt{3}+1.5$.



【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题，掌握仰角俯角的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键.

16. (4分) 如图, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别是 1 和 $\sqrt{3}$, $O_1O_2=2$, 那么两圆公共弦 AB 的长为 $\sqrt{3}$.



【考点】 ML: 相交两圆的性质.

【分析】 首先连接 O_1A , O_2A , 设 $AC=x$, $O_1C=y$, 由勾股定理可得方程组, 解方程组即可求得 x 与 y 的值, 继而求得答案.

【解答】 解: 连接 O_1A , O_2A , 如图所示

设 $AC=x$, $O_1C=y$, 则 $AB=2AC=2x$,

$$\because O_1O_2=2,$$

$$\therefore O_2C=2-y,$$

$$\because AB \perp O_1O_2,$$

$$\therefore AC^2 + O_1C^2 = O_1A^2, \quad O_2C^2 + AC^2 = O_2A^2,$$

$$\therefore \begin{cases} x^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2 \\ x^2 + (2-y)^2 = 1^2 \end{cases},$$

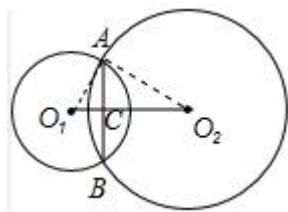
$$\text{解得: } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AB = 2AC = \sqrt{3};$$

(也可以证明 $\angle O_1AO_2=90^\circ$, 利用面积法解决问题即可)

故答案为: $\sqrt{3}$.

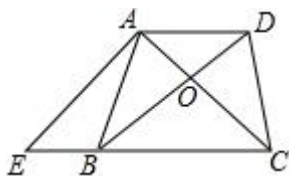


【点评】此题考查了相交圆的性质与勾股定理. 此题难度适中, 注意掌握辅助线的作法, 注意数形结合思想与方程思想的应用.

17. (4 分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 与 BD 交于 O 点, $DO: BO=1:$

2, 点 E 在 CB 的延长线上, 如果 $S_{\triangle AOD}: S_{\triangle ABE}=1: 3$, 那么 $BC: BE=$ 2:

1.



【考点】LH: 梯形; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】由平行线证出 $\triangle AOD \sim \triangle COB$, 得出 $S_{\triangle AOD}: S_{\triangle COB}=1: 4$, $S_{\triangle AOD}: S_{\triangle AOB}=1: 2$, 由 $S_{\triangle AOD}: S_{\triangle ABE}=1: 3$, 得出 $S_{\triangle ABC}: S_{\triangle ABE}=2: 1$, 即可得出答案.

【解答】解: $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$,

$\therefore DO: BO=1: 2$,

$\therefore S_{\triangle AOD}: S_{\triangle COB}=1: 4$, $S_{\triangle AOD}: S_{\triangle AOB}=1: 2$,

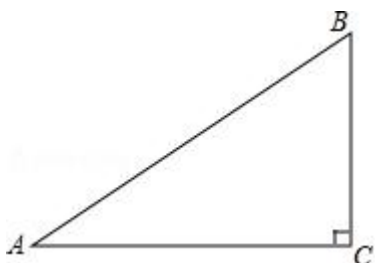
$\therefore S_{\triangle AOD}: S_{\triangle ABE}=1: 3$,

$\therefore S_{\triangle ABC}: S_{\triangle ABE}=6: 3=2: 1$,

$\therefore BC: BE=2: 1$.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质、梯形的性质以及三角形的面积关系; 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解决问题的关键.

18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=8$, $BC=6$, D 是 AB 的中点, 点 E 在边 AC 上, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 使得点 A 落在点 A' 处, 当 $A'E \perp AC$ 时, $A'B = \underline{\sqrt{2} \text{ 或 } 7\sqrt{2}}$.



【考点】 KQ: 勾股定理; PB: 翻折变换 (折叠问题).

【分析】 分两种情况:

- ①如图 1, 作辅助线, 构建矩形, 先由勾股定理求斜边 $AB=10$, 由中点的定义求出 AD 和 BD 的长, 证明四边形 $HFG B$ 是矩形, 根据同角的三角函数列式可以求 DG 和 DF 的长, 并由翻折的性质得: $\angle DA'E = \angle A$, $A'D = AD = 5$, 由矩形性质和勾股定理可以得出结论: $A'B = \sqrt{2}$;

- ②如图 2, 作辅助线, 构建矩形 $A'MNF$, 同理可以求出 $A'B$ 的长.

【解答】 解: 分两种情况:

- ①如图 1, 过 D 作 $DG \perp BC$ 与 G , 交 $A'E$ 与 F , 过 B 作 $BH \perp A'E$ 与 H ,

$\because D$ 为 AB 的中点,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = AD,$$

$\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$,

$$\therefore AB = 10,$$

$$\therefore BD = AD = 5,$$

$$\sin \angle ABC = \frac{DG}{BD} = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore \frac{DG}{5} = \frac{8}{10},$$

$$\therefore DG=4,$$

由翻折得: $\angle DA'E = \angle A$, $A'D=AD=5$,

$$\therefore \sin \angle DA'E = \sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{DF}{A'D},$$

$$\therefore \frac{6}{10} = \frac{DF}{5},$$

$$\therefore DF=3,$$

$$\therefore FG=4-3=1,$$

$$\therefore A'E \perp AC, \quad BC \perp AC,$$

$$\therefore A'E \parallel BC,$$

$$\therefore \angle HFG + \angle DGB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EHB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 HFGB 是矩形,

$$\therefore BH=FG=1,$$

同理得: $A'E=AE=8-1=7$,

$$\therefore A'H=A'E-EH=7-6=1,$$

在 $Rt\triangle AHB$ 中, 由勾股定理得: $A'B = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

②如图 2, 过 D 作 $MN \parallel AC$, 交 BC 与于 N, 过 A' 作 $A'F \parallel AC$, 交 BC 的延长

线于 F, 延长 A'E 交直线 DN 于 M,

$$\therefore A'E \perp AC,$$

$$\therefore A'M \perp MN, \quad A'E \perp A'F,$$

$$\therefore \angle M = \angle MA'F = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $MA'FN$ 是矩形,

$$\therefore MN = A'F, FN = A'M,$$

由翻折得: $A'D = AD = 5$,

$$\text{Rt}\triangle A'MD \text{ 中, } \therefore DM = 3, A'M = 4,$$

$$\therefore FN = A'M = 4,$$

$$\text{Rt}\triangle BDN \text{ 中, } \therefore BD = 5,$$

$$\therefore DN = 4, BN = 3,$$

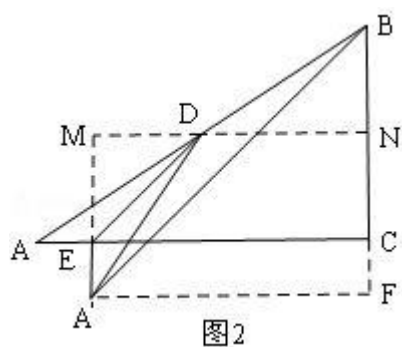
$$\therefore A'F = MN = DM + DN = 3 + 4 = 7,$$

$$BF = BN + FN = 3 + 4 = 7,$$

$$\text{Rt}\triangle ABF \text{ 中, 由勾股定理得: } A'B = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2};$$

综上所述, $A'B$ 的长为 $\sqrt{2}$ 或 $7\sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$ 或 $7\sqrt{2}$.



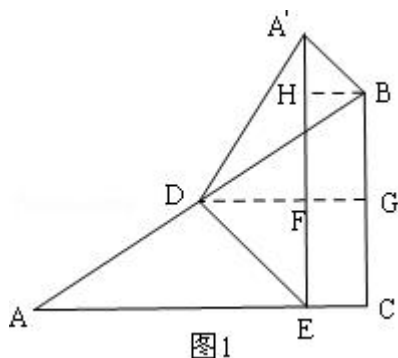


图1

【点评】 本题考查了翻折变换的性质、勾股定理、矩形的性质、三角函数及解直角三角形的有关知识，作辅助线构建矩形是本题的关键，明确翻折前后的对应角和边相等，在证明中利用同角的三角函数列比例式比证明相似列比例式计算简单.

三、解答题 (本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\sin 30^\circ \cdot \tan 30^\circ - \frac{1}{3} \cos 60^\circ \cdot \cot 30^\circ + \frac{\tan 45^\circ}{\sin^2 45^\circ}$.

【考点】 2C: 实数的运算; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】 11: 计算题; 511: 实数.

【分析】 原式利用特殊角的三角函数值计算即可得到结果.

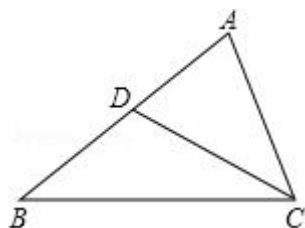
【解答】 解: 原式 $= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6} + 2 = 2$.

【点评】 此题考查了实数的运算, 以及特殊角的三角函数值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 中点, 联结 CD.

(1) 若 $AB=10$ 且 $\angle ACD=\angle B$, 求 AC 的长.

(2) 过 D 点作 BC 的平行线交 AC 于点 E, 设 $\overrightarrow{DE}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{b}$, 请用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ (直接写出结果)



【考点】LM: *平面向量; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】(1) 求出 $AD = \frac{1}{2}AB = 5$, 证明 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$, 得出 $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$, 即可得出结果;

(2) 由平行线的性质得出 $AE = EC$, 由向量的定义容易得出结果.

【解答】解: (1) $\because D$ 是 AB 中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = 5,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle B, \quad \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AB \cdot AD = 10 \times 5 = 50,$$

$$\therefore AC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

(2) 如图所示: $\because DE \parallel BC$, D 是 AB 的中点,

$$\therefore AD = DB, \quad AE = EC,$$

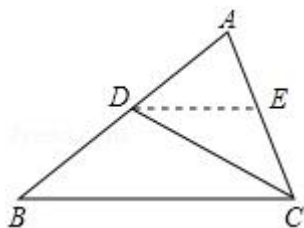
$$\therefore \overrightarrow{DE} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{DC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DE} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = -2\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DE} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a} = \vec{b} - 2\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = -4\vec{a} + 2\vec{b}.$$

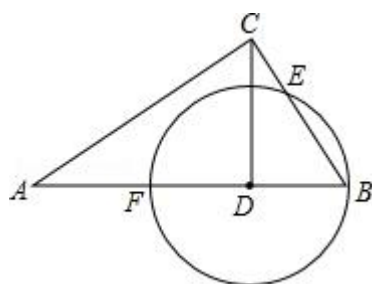


【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质、平面向量、平行线的性质; 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解决问题的关键.

21. (10 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $CD \perp AB$ 于点 D , $\odot D$ 经过点 B , 与 BC 交于点 E , 与 AB 交与点 F . 已知 $\tan A = \frac{1}{2}$, $\cot \angle ABC = \frac{3}{4}$, $AD = 8$.

求 (1) $\odot D$ 的半径;

(2) CE 的长.



【考点】M2: 垂径定理; T7: 解直角三角形.

【分析】(1) 根据三角函数的定义得出 CD 和 BD , 从而得出 $\odot D$ 的半径;

(2) 过圆心 D 作 $DH \perp BC$, 根据垂径定理得出 $BH = EH$, 由勾股定理得出 BC , 再由三角函数的定义得出 BE , 从而得出 CE 即可.

【解答】解: (1) $\because CD \perp AB$, $AD = 8$, $\tan A = \frac{1}{2}$,

在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 中, $\tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}$, $AD = 8$, $CD = 4$,

在 $\text{Rt} \triangle CBD$, $\cot \angle ABC = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{4}$, $BD = 3$,

$\therefore \odot D$ 的半径为 3;

(2) 过圆心 D 作 $DH \perp BC$, 垂足为 H ,

$\therefore BH = EH$,

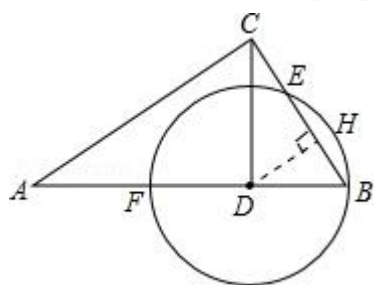
在 $\text{Rt} \triangle CBD$ 中 $\angle CDB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{CD^2 + DB^2} = 5$, $\cos \angle ABC = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5}$,

在 $\text{Rt} \triangle BDH$ 中, $\angle BHD = 90^\circ$, $\cos \angle ABC = \frac{BH}{BD} = \frac{3}{5}$, $BD = 3$, $BH = \frac{9}{5}$,

$\therefore BH = EH$,

$\therefore BE = 2BH = \frac{18}{5}$,

$$\therefore CE=BC-BE=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}.$$

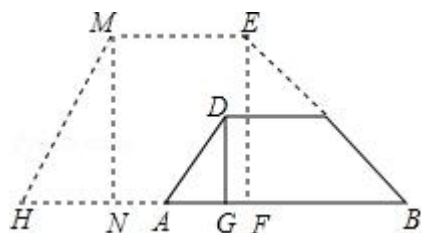


【点评】 本题考查了圆周角定理、解直角三角形以及垂径定理、勾股定理，掌握定理的内容以及用法是解题的关键.

22. (10 分) 如图，拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ，坝顶宽 DC 为 6 米，坝高 DG 为 2 米，迎水坡 BC 的坡角为 30° ，坝底宽 AB 为 $(8+2\sqrt{3})$ 米.

(1) 求背水坡 AD 的坡度；

(2) 为了加固拦水坝，需将水坝加高 2 米，并且保持坝顶宽度不变，迎水坡和背水坡的坡度也不变，求加高后坝底 HB 的宽度.



【考点】 LH： 梯形； T9： 解直角三角形的应用 – 坡度坡角问题.

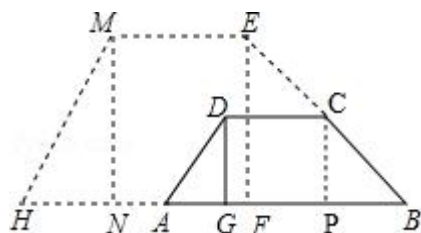
【分析】 (1) 作 $CP \perp AB$ 于点 P ，即可知四边形 $CDGP$ 是矩形，从而得 $CP=DG=2$ 、

$CD=GP=6$ ，由 $BP=\frac{CP}{\tan B}=2\sqrt{3}$ 根据 $AG=AB-GP-BP$ 可得 $DG:AG=1:1$ ；

(2) 根据题意得 $EF=MN=4$ 、 $ME=CD=6$ 、 $\angle B=30^\circ$ ，由 $BF=\frac{EF}{\tan B}$ 、 $HN=\frac{MN}{\tan H}$ 、

$NF=ME$ ，根据 $HB=HN+NF+BF$ 可得答案.

【解答】 解： (1) 如图，过点 C 作 $CP \perp AB$ 于点 P ，



则四边形 CDGP 是矩形,

$$\therefore CP=DG=2, \quad CD=GP=6,$$

$$\because \angle B=30^\circ,$$

$$\therefore BP = \frac{CP}{\tan B} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AG = AB - GP - BP = 8 + 2\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{3} = 2 = DG,$$

$\therefore$ 背水坡 AD 的坡度 DG: AG=1: 1;

(2) 由题意知 EF=MN=4, ME=CD=6, $\angle B=30^\circ$,

$$\text{则 } BF = \frac{EF}{\tan B} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 4\sqrt{3}, \quad HN = \frac{MN}{\tan H} = \frac{4}{1} = 4, \quad NF = ME = 6,$$

$$\therefore HB = HN + NF + BF = 4 + 6 + 4\sqrt{3} = 10 + 4\sqrt{3},$$

答: 加高后坝底 HB 的宽度为 $(10+4\sqrt{3})$ 米.

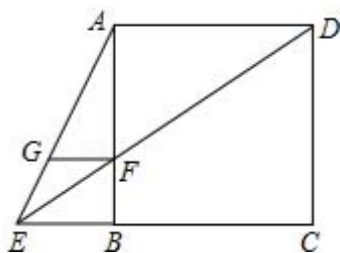
【点评】 本题主要考查解直角三角形的应用, 掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比, 又叫做坡比, 它是一个比值, 反映了斜坡的陡峭程度是解题的关键.

23. (12 分) 如图, 已知正方形 ABCD, 点 E 在 CB 的延长线上, 联结 AE、DE, DE 与边 AB 交于点 F, FG//BE 且与 AE 交于点 G.

(1) 求证: GF=BF.

(2) 在 BC 边上取点 M, 使得 BM=BE, 联结 AM 交 DE 于点 O. 求证:

$$FO \cdot ED = OD \cdot EF.$$



【考点】 LE: 正方形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 根据已知条件可得到 $GF \parallel AD$, 则有 $\frac{GF}{AD} = \frac{EF}{ED}$, 由 $BF \parallel CD$ 可得到

$$\frac{BF}{CD} = \frac{EF}{ED}, \text{ 又因为 } AD=CD, \text{ 可得到 } GF=BF;$$

(2) 延长 GF 交 AM 于 H , 根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{GF}{BE} = \frac{FH}{BM}$, 由于

$BM=BE$, 得到 $GF=FH$, 由 $GF \parallel AD$, 得到 $\frac{EF}{ED} = \frac{GF}{AD}$, $\frac{FH}{AD} = \frac{FO}{OD}$, 等量代换得到

$$\frac{EF}{ED} = \frac{FH}{AD}, \text{ 即 } \frac{EF}{ED} = \frac{FO}{OD}, \text{ 于是得到结论.}$$

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD, AD=CD,$$

$$\therefore GF \parallel BE,$$

$$\therefore GF \parallel BC,$$

$$\therefore GF \parallel AD,$$

$$\therefore \frac{GF}{AD} = \frac{EF}{ED},$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \frac{BF}{CD} = \frac{EF}{ED},$$

$$\therefore AD=CD,$$

$$\therefore GF=BF;$$

(2) 延长 GF 交 AM 于 H ,

$$\therefore GF \parallel BC,$$

$$\therefore FH \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{GF}{BE} = \frac{AF}{AB}, \quad \frac{FH}{BM} = \frac{AF}{AB},$$

$$\therefore \frac{GF}{BE} = \frac{FH}{BM},$$

$$\therefore BM = BE,$$

$$\therefore GF = FH,$$

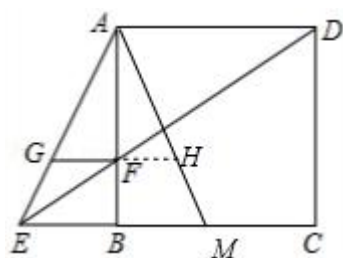
$$\therefore GF \parallel AD,$$

$$\therefore \frac{EF}{ED} = \frac{GF}{AD}, \quad \frac{FH}{AD} = \frac{FO}{OD},$$

$$\therefore \frac{EF}{ED} = \frac{FH}{AD},$$

$$\therefore \frac{EF}{ED} = \frac{FO}{OD},$$

$$\therefore FO \cdot ED = OD \cdot EF.$$



【点评】 本题主要考查平行线分线段成比例及正方形的性质，掌握平行线分线段中的线段对应成比例是解题的关键，注意利用比例相等也可以证明线段相等.

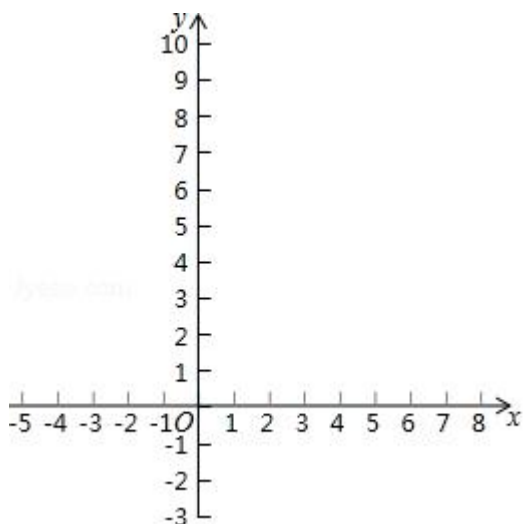
24. (12 分) 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -x^2 + 2bx + c$ 与 x 轴交于点 A、B

(点 A 在点 B 的右侧)，且与 y 轴正半轴交于点 C，已知 A (2, 0)

(1) 当 B (-4, 0) 时，求抛物线的解析式；

(2) O 为坐标原点，抛物线的顶点为 P，当 $\tan \angle OAP = 3$ 时，求此抛物线的解析式；

(3) O 为坐标原点，以 A 为圆心 OA 长为半径画 $\odot A$ ，以 C 为圆心， $\frac{1}{2}OC$ 长为半径画圆 $\odot C$ ，当 $\odot A$ 与 $\odot C$ 外切时，求此抛物线的解析式.



【考点】MR：圆的综合题.

【分析】(1) 利用待定系数法即可确定出函数解析式；

(2) 用 $\tan \angle OAP=3$ 建立一个 b , c 的关系，再结合点 A 得出的等式即可求出 b , c 进而得出函数关系式；

(3) 用两圆外切，半径之和等于 AC 建立方程结合点 A 代入建立的方程即可得出抛物线解析式.

【解答】解：(1) 把点 $A(2, 0)$ 、 $B(-4, 0)$ 的坐标代入 $y = -x^2 + 2bx + c$ 得，

$$\begin{cases} -4 + 4b + c = 0 \\ -16 - 8b + c = 0 \end{cases},$$

$$\therefore b = -1, \quad c = 8,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 - 2x + 8;$$

(2) 如图 1，设抛物线的对称轴与 x 轴的交点为 H ，把点 $A(2, 0)$ 的坐标代入 $y = -x^2 + 2bx + c$ 得，

$$-4 + 4b + c = 0 \text{ ①},$$

$\therefore$ 抛物线的顶点为 P ,

$$\therefore y = -x^2 + 2bx + c = -(x - b)^2 + b^2 + c,$$

$$\therefore P(b, b^2 + c),$$

$$\therefore PH=b^2+c, \quad AH=2-b,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PHA \text{ 中, } \tan \angle OAP = \frac{PH}{AH} = 3,$$

$$\therefore \frac{b^2+c}{2-b} = 3 \text{ ②},$$

$$\text{联立①②得, } \begin{cases} -4+4b+c=0 \\ \frac{b^2+c}{2-b}=3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b=2 \\ c=-4 \end{cases} \text{ (不符合题意, 舍)} \text{ 或 } \begin{cases} b=-1 \\ c=2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 - 2x + 8;$$

(3) $\because$ 如图 2, 抛物线 $y = -x^2 + 2bx + c$ 与 y 轴正半轴交于点 C ,

$$\therefore C(0, c) \quad (c > 0),$$

$$\therefore \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}c,$$

$$\therefore A(2, 0),$$

$$\therefore OA=2,$$

$$\therefore AC = \sqrt{c^2 + 4},$$

$\therefore \odot A$ 与 $\odot C$ 外切,

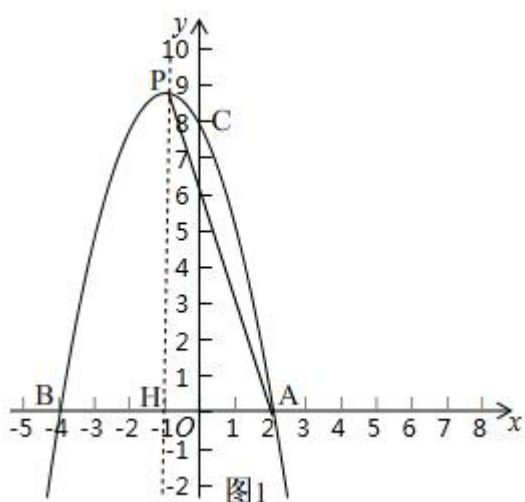
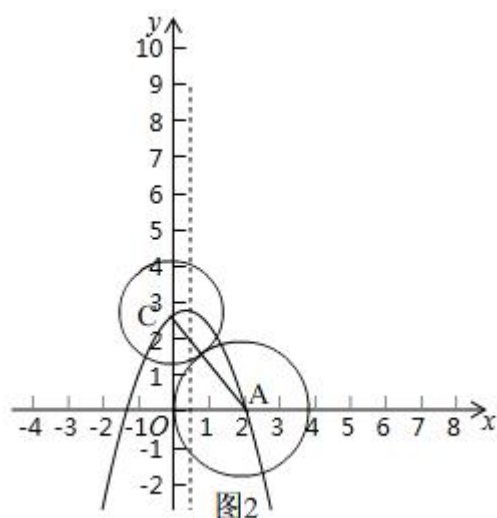
$$\therefore AC = \frac{1}{2}c + 2 = \sqrt{c^2 + 4},$$

$$\therefore c=0 \text{ (舍)} \text{ 或 } c = \frac{8}{3},$$

把点 $A(2, 0)$ 的坐标代入 $y = -x^2 + 2bx + c$ 得, $-4 + 4b + c = 0$,

$$\therefore b = \frac{1}{3},$$

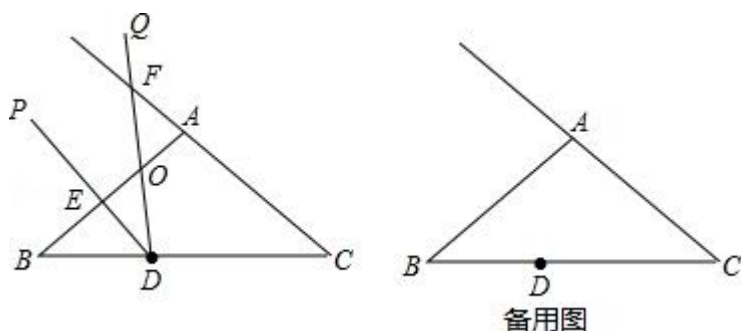
$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$$



【点评】此题是圆的综合题，主要考查了待定系数法，锐角三角函数，两圆外切的性质等知识点；(2) 中用 $\tan \angle OAP=3$ 建立方程和 (3) 中两圆的半径之和等于 AC 建立方程是解答关键.

25. (14 分) 已知 $\triangle ABC$, $AB=AC=5$, $BC=8$, $\angle PDQ$ 的顶点 D 在 BC 边上, DP 交 AB 边于点 E, DQ 交 AB 边于点 O 且交 CA 的延长线于点 F (点 F 与点 A 不重合), 设 $\angle PDQ=\angle B$, $BD=3$.

- (1) 求证: $\triangle BDE \sim \triangle CFD$;
- (2) 设 $BE=x$, $OA=y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域;
- (3) 当 $\triangle AOF$ 是等腰三角形时, 求 BE 的长.



【考点】SO：相似形综合题.

【分析】(1) 根据两角对应相等两三角形相似即可证明.

(2) 过点 D 作 $DM \parallel AB$ 交 AC 于 M (如图 1 中). 由 $\triangle BDE \sim \triangle CFD$, 得 $\frac{CD}{BE} = \frac{FC}{BD}$, 推出 $FC = \frac{15}{x}$, 由 $DM \parallel AB$, 得 $\frac{DM}{AB} = \frac{CD}{CB}$, 推出 $DM = \frac{25}{8}$, 由 $DM \parallel AB$, 推出 $\angle B = \angle MDC$, $\angle MDC = \angle C$, $CM = DM = \frac{25}{8}$, $FM = \frac{15}{x} - \frac{25}{8}$, 于 $DM \parallel AB$, 得 $\frac{AO}{DM} = \frac{AF}{FM}$, 代入化简即可.

(3) 分三种情形讨论①当 $AO = AF$ 时, ②当 $FO = FA$ 时, ③当 $OA = OF$ 时, 分别计算即可.

【解答】解: (1) $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle EDC = \angle B + \angle BED,$$

$$\therefore \angle FDC + \angle EDO = \angle B + \angle BED,$$

$$\because \angle EDO = \angle B,$$

$$\therefore \angle BED = \angle EDC,$$

$$\because \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CFD.$$

(2) 过点 D 作 $DM \parallel AB$ 交 AC 于 M (如图 1 中).

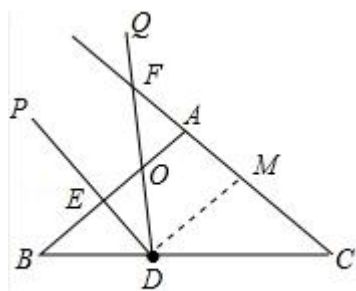


图1

$$\because \triangle BDE \sim \triangle CFD,$$

$$\therefore \frac{CD}{BE} = \frac{FC}{BD}, \quad \because BC=8, \quad BD=3, \quad BE=x,$$

$$\therefore \frac{FC}{3} = \frac{5}{x},$$

$$\therefore FC = \frac{15}{x},$$

$$\because DM \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{DM}{AB} = \frac{CD}{CB}, \quad \text{即} \frac{DM}{5} = \frac{5}{8},$$

$$\therefore DM = \frac{25}{8},$$

$$\because DM \parallel AB,$$

$$\therefore \angle B = \angle MDC,$$

$$\therefore \angle MDC = \angle C,$$

$$\therefore CM = DM = \frac{25}{8}, \quad FM = \frac{15}{x} - \frac{25}{8},$$

$$\because DM \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{AO}{DM} = \frac{AF}{FM}, \quad \text{即} \frac{y}{\frac{25}{8}} = \frac{\frac{15}{x} - 5}{\frac{15}{x} - \frac{25}{8}},$$

$$\therefore y = \frac{75-25x}{24-5x} \quad (0 < x < 3).$$

(3) ①当 $AO=AF$ 时,

$$\text{由 (2) 可知 } AO=y=\frac{75-25x}{24-5x}, \quad AF=FC-AC=\frac{15}{x}-5,$$

$$\therefore \frac{75-25x}{24-5x} = \frac{15}{x} - 5, \text{ 解得 } x = \frac{12}{5}.$$

$$\therefore BE = \frac{12}{5}$$

②当 $FO=FA$ 时, 易知 $DO=AM=\frac{15}{8}$, 作 $DH \perp AB$ 于 H (如图 2 中),

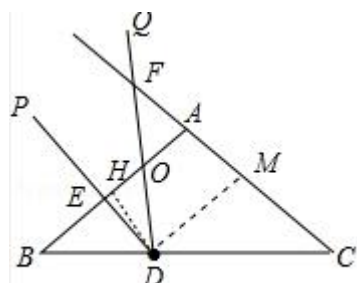


图2

$$BH = BD \cdot \cos \angle B = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5},$$

$$DH = BD \cdot \sin \angle B = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5},$$

$$\therefore HO = \sqrt{OD^2 - DH^2} = \frac{21}{40},$$

$$\therefore OA = AB - BH - HO = \frac{83}{40},$$

由 (2) 可知 $y = \frac{75-25x}{24-5x}$, 即 $\frac{83}{40} = \frac{75-25x}{24-5x}$, 解得 $x = \frac{112}{65}$,

$$\therefore BE = \frac{112}{65}.$$

③当 $OA=OF$ 时, 设 DP 与 CA 的延长线交于点 N (如图 3 中).

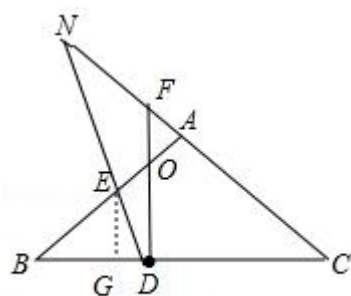


图3

$$\therefore \angle OAF = \angle OFA, \angle B = \angle C, \angle BDE + \angle FDN = \angle N + \angle C,$$

$$\therefore \angle NDF = \angle B,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle N,$$

由 $\triangle ABC \cong \triangle CDN$, 可得 $CN = BC = 8$, $ND = 5$,

由 $\triangle BDE \cong \triangle NAE$, 可得 $NE=BE=x$, $ED=5-x$,

作 $EG \perp BC$ 于 G , 则 $BG=\frac{4}{5}x$, $EG=\frac{3}{5}x$,

$$\therefore GD=\sqrt{(5-x)^2-(\frac{3}{5}x)^2},$$

$$\therefore BG+GD=\frac{4}{5}x+\sqrt{(5-x)^2-(\frac{3}{5}x)^2}=3,$$

$$\therefore x=\frac{40}{13}>3 \text{ (舍弃)},$$

综上所述, 当 $\triangle OAF$ 是等腰三角形时, $BE=\frac{12}{5}$ 或 $\frac{112}{65}$.

【点评】 本题考查相似三角形综合题、全等三角形的判定和性质、勾股定理、锐角三角函数、平行线分线段成比例定理等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 学会利用参数解决问题, 学会用分类讨论的思想思考问题, 属于中考压轴题.