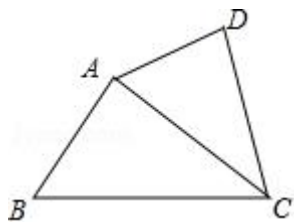


D. 抛物线在对称轴左侧部分是上升的

5. (4分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 如果 $\angle ADC = \angle BAC$, 那么下列条件中不能判定 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BAC$ 相似的是 ()



A. $\angle DAC = \angle ABC$

B. AC 是 $\angle BCD$ 的平分线

C. $AC^2 = BC \cdot CD$

D. $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

6. (4分) 下列说法中, 错误的是 ()

A. 长度为 1 的向量叫做单位向量

B. 如果 $k \neq 0$, 且 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 那么 $k\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同

C. 如果 $k=0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$, 那么 $k\vec{a} = \vec{0}$

D. 如果 $\vec{a} = \frac{5}{2}\vec{c}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c}$, 其中 $\vec{c}$ 是非零向量, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

二、填空题 (每题 2 分)

7. (2分) 如果 $x:y=4:3$, 那么 $\frac{x-y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (2分) 计算: $3\vec{a} - 4(\vec{a} + \vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. (2分) 如果抛物线 $y = (m-1)x^2$ 的开口向上, 那么 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. (2分) 抛物线 $y = 4x^2 - 3x$ 与 y 轴的交点坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. (2分) 若点 $A(3, n)$ 在二次函数 $y = x^2 + 2x - 3$ 的图象上, 则 n 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. (2分) 已知线段 AB 的长为 10 厘米, 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 那么较长的线段 AP 的长等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 厘米.

13. (2分) 利用复印机的缩放功能, 将原图中边长为 5 厘米的一个等边三角形

放大成边长为 20 厘米的等边三角形，那么放大前后的两个三角形的周长比是_____.

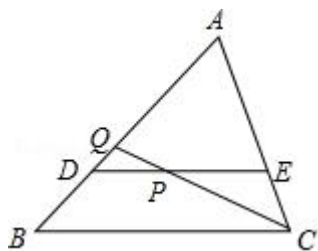
14. (2 分) 已知点 P 在半径为 5 的 $\odot O$ 外，如果设 $OP=x$ ，那么 x 的取值范围是_____.

15. (2 分) 如果港口 A 的南偏东 52° 方向有一座小岛 B，那么从小岛 B 观察港口 A 的方向是_____.

16. (2 分) 在半径为 4 厘米的圆面中，挖去一个半径为 x 厘米的圆面，剩下部分的面积为 y 平方厘米，写出 y 关于 x 的函数解析式：_____ (结果保留 π ，不要求写出定义域)

17. (2 分) 如果等腰三角形的腰与底边的比是 5: 6，那么底角的余弦值等于_____.

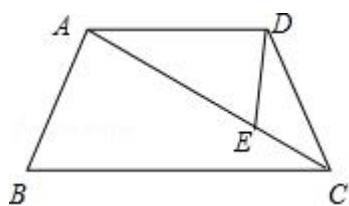
18. (2 分) 如图， $DE \parallel BC$ ，且过 $\triangle ABC$ 的重心，分别与 AB、AC 交于点 D、E，点 P 是线段 DE 上一点，CP 的延长线交 AB 于点 Q，如果 $\frac{DP}{DE} = \frac{1}{4}$ ，那么 $S_{\triangle DPQ} : S_{\triangle CPE}$ 的值是_____.



三、解答题

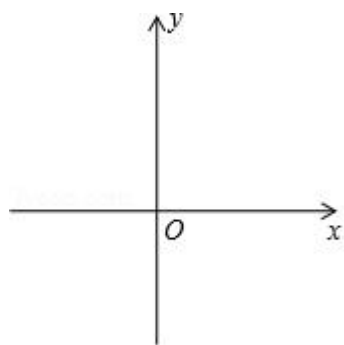
19. (6 分) 计算: $\cos^2 45^\circ + \frac{\cos 30^\circ}{2\sin 60^\circ + 1} - \sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ$.

20. (8 分) 如图，已知 AD 是 $\odot O$ 的直径，BC 是 $\odot O$ 的弦， $AD \perp BC$ ，垂足为点 E， $AE=BC=16$ ，求 $\odot O$ 的直径.



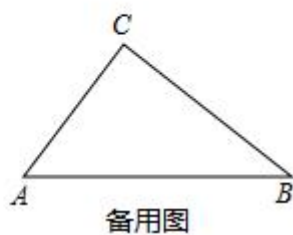
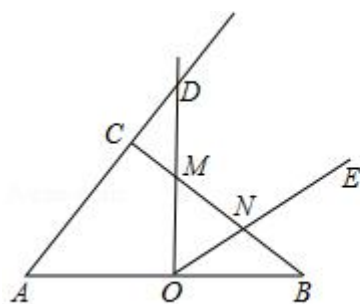
24. (12 分) 如图, 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(4, 0)$ 是抛物线 $y=ax^2+2x-c$ 上的一点, 将此抛物线向下平移 6 个单位后经过点 $B(0, 2)$, 平移后所得的新抛物线的顶点记为 C , 新抛物线的对称轴与线段 AB 的交点记为 P .

- (1) 求平移后所得到的新抛物线的表达式, 并写出点 C 的坐标;
- (2) 求 $\angle CAB$ 的正切值;
- (3) 如果点 Q 是新抛物线对称轴上的一点, 且 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle ACP$ 相似, 求点 Q 的坐标.



25. (14 分) 如图, 在直角三角形 ABC 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AB=10$, $\sin B=\frac{3}{5}$, 点 O 是 AB 的中点, $\angle DOE=\angle A$, 当 $\angle DOE$ 以点 O 为旋转中心旋转时, OD 交 AC 的延长线于点 D , 交边 CB 于点 M , OE 交线段 BM 于点 N .

- (1) 当 $CM=2$ 时, 求线段 CD 的长;
- (2) 设 $CM=x$, $BN=y$, 试求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出定义域;
- (3) 如果 $\triangle OMN$ 是以 OM 为腰的等腰三角形, 请直接写出线段 CM 的长.



2017 年上海市普陀区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每题 4 分）

1. (4 分) “相似的图形”是 ()

- A. 形状相同的图形
- B. 大小不相同的图形
- C. 能够重合的图形
- D. 大小相同的图形

【考点】S5: 相似图形.

【分析】根据相似形的定义直接进行判断即可.

【解答】解: 相似图形是形状相同的图形, 大小可以相同, 也可以不同,

故选: A.

【点评】本题考查了相似图形的定义, 解题的关键是了解相似图形是形状相同的图形, 难度不大.

2. (4 分) 下列函数中, y 关于 x 的二次函数是 ()

- A. $y=2x+1$
- B. $y=2x(x+1)$
- C. $y=\frac{2}{x^2}$
- D. $y=(x-2)^2-x^2$

【考点】H1: 二次函数的定义.

【分析】根据二次函数的定义, 可得答案.

【解答】解: A、 $y=2x+1$ 是一次函数, 故 A 错误;

B、 $y=2x(x+1)$ 是二次函数, 故 B 正确;

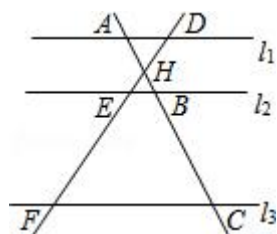
C、 $y=\frac{2}{x^2}$ 不是二次函数, 故 C 错误;

D、 $y=(x-2)^2-x^2$ 是一次函数, 故 D 错误;

故选: B.

【点评】本题考查了二次函数的定义, 形如 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 是二次函数.

3. (4分) 如图, 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 直线 AC 分别交 l_1 、 l_2 、 l_3 与点 A 、 B 、 C , 直线 DF 分别交 l_1 、 l_2 、 l_3 与点 D 、 E 、 F , AC 与 DF 相交于点 H , 如果 $AH=2$, $BH=1$, $BC=5$, 那么 $\frac{DE}{EF}$ 的值等于 ()



- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【考点】S4: 平行线分线段成比例.

【分析】根据平行线分线段成比例, 可以解答本题.

【解答】解: $\because$ 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AB}{BC},$$

$$\because AH=2, BH=1, BC=5,$$

$$\therefore AB=AH+BH=3,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{3}{5},$$

故选: D.

【点评】本题考查平行线分线段成比例, 解题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件.

4. (4分) 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上部分点的横坐标 x , 纵坐标 y 的对应值如下表所示:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	0	4	6	6	4	...

从上表可知, 下列说法中, 错误的是 ()

A. 抛物线于 x 轴的一个交点坐标为 $(-2, 0)$

B. 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, 6)$

C. 抛物线的对称轴是直线 $x=0$

D. 抛物线在对称轴左侧部分是上升的

【考点】H3: 二次函数的性质.

【分析】由表可知抛物线过点 $(-2, 0)$ 、 $(0, 6)$ 可判断 A、B；当 $x=0$ 或 $x=1$ 时， $y=6$ 可求得其对称轴，可判断 C；由表中所给函数值可判断 D.

【解答】解：

当 $x=-2$ 时， $y=0$,

$\therefore$ 抛物线过 $(-2, 0)$,

$\therefore$ 抛物线于 x 轴的一个交点坐标为 $(-2, 0)$ ，故 A 正确；

当 $x=0$ 时， $y=6$,

$\therefore$ 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, 6)$ ，故 B 正确；

当 $x=0$ 和 $x=1$ 时， $y=6$,

$\therefore$ 对称轴为 $x=\frac{1}{2}$ ，故 C 错误；

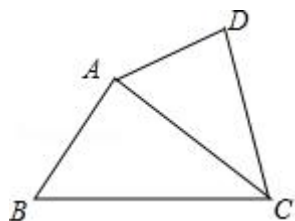
当 $x < \frac{1}{2}$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 抛物线在对称轴左侧部分是上升的，故 D 正确；

故选：C.

【点评】本题主要考查二次函数的性质，掌握二次函数的图象与坐标轴的交点及对称轴的求法是解题的关键.

5. (4 分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，如果 $\angle ADC = \angle BAC$ ，那么下列条件中不能判定 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BAC$ 相似的是 ()



A. $\angle DAC = \angle ABC$

B. AC 是 $\angle BCD$ 的平分线

C. $AC^2 = BC \cdot CD$

D. $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

【考点】S8: 相似三角形的判定.

【分析】已知 $\angle ADC = \angle BAC$, 则 A、B 选项可根据有两组角对应相等的两个三角形相似来判定; C 选项虽然也是对应边成比例但无法得到其夹角相等, 所以不能推出两三角形相似; D 选项可以根据两组对应边的比相等且相应的夹角相等的两个三角形相似来判定.

【解答】解: 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BAC$ 中, $\angle ADC = \angle BAC$,

如果 $\triangle ADC \sim \triangle BAC$, 需满足的条件有:

① $\angle DAC = \angle ABC$ 或 AC 是 $\angle BCD$ 的平分线;

② $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AC}$;

故选: C.

【点评】此题主要考查了相似三角形的判定方法; 熟记三角形相似的判定方法是解决问题的关键.

6. (4 分) 下列说法中, 错误的是 ()

A. 长度为 1 的向量叫做单位向量

B. 如果 $k \neq 0$, 且 $\vec{a} \neq \vec{0}$, 那么 $k\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同

C. 如果 $k=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$, 那么 $k\vec{a}=\vec{0}$

D. 如果 $\vec{a}=\frac{5}{2}\vec{c}$, $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{c}$, 其中 $\vec{c}$ 是非零向量, 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

【考点】LM: *平面向量.

【分析】由平面向量的性质来判断选项的正误.

【解答】解: A、长度为 1 的向量叫做单位向量, 故本选项错误;

B、当 $k > 0$ 且 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, 那么 $k\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同, 故本选项正确;

C、如果 $k=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$, 那么 $k\vec{a}=\vec{0}$, 故本选项错误;

D、如果 $\vec{a}=\frac{5}{2}\vec{c}$, $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{c}$, 其中 $\vec{c}$ 是非零向量, 那么向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 共线, 即 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 故本选项错误;

故选: B.

【点评】此题考查了平面向量的性质. 题目比较简单, 注意向量是有方向性的, 掌握平面向量的性质是解此题的关键.

二、填空题 (每题 2 分)

7. (2 分) 如果 $x: y=4: 3$, 那么 $\frac{x-y}{y} = \underline{-\frac{1}{3}}$.

【考点】S1: 比例的性质.

【分析】根据比例的性质用 x 表示 y , 代入计算即可.

【解答】解: $\because x: y=4: 3$,

$$\therefore x = \frac{4}{3}y,$$

$$\therefore \frac{x-y}{y} = \frac{\frac{4}{3}y-y}{y} = \frac{1}{3},$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点评】本题考查的是比例的性质, 根据比例的性质用一个字母表示另一个字母是解题的关键.

8. (2 分) 计算: $3\vec{a} - 4(\vec{a} + \vec{b}) = \underline{-\vec{a} - 4\vec{b}}$.

【考点】LM: *平面向量.

【分析】根据向量加法的运算律进行计算即可.

【解答】解: $3\vec{a} - 4(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} - 4\vec{a} - 4\vec{b} = -\vec{a} - 4\vec{b}$.

故答案是： $-\vec{a}-4\vec{b}$.

【点评】 本题考查平面向量. 熟记计算法则即可解题, 属于基础题.

9. (2 分) 如果抛物线 $y = (m - 1)x^2$ 的开口向上, 那么 m 的取值范围是 $m > 1$.

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【分析】 根据二次函数的性质可知, 当抛物线开口向上时, 二次项系数 $m - 1 > 0$.

【解答】 解: 因为抛物线 $y = (m - 1)x^2$ 的开口向上,
所以 $m - 1 > 0$, 即 $m > 1$, 故 m 的取值范围是 $m > 1$.

【点评】 解答此题要掌握二次函数图象的特点.

10. (2 分) 抛物线 $y = 4x^2 - 3x$ 与 y 轴的交点坐标是 $(0, 0)$.

【考点】 H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 令 $x=0$ 可求得 $y=0$, 可求得答案.

【解答】 解:

在 $y = 4x^2 - 3x$ 中, 令 $x=0$ 可得 $y=0$,

$\therefore$ 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, 0)$,

故答案为: $(0, 0)$.

【点评】 本题主要考查二次函数的图象上点的坐标特征, 掌握求函数图象与坐标轴的交点的方法是解题的关键.

11. (2 分) 若点 $A(3, n)$ 在二次函数 $y = x^2 + 2x - 3$ 的图象上, 则 n 的值为 12.

【考点】 H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【专题】 33: 函数思想.

【分析】 将 $A(3, n)$ 代入二次函数的关系式 $y = x^2 + 2x - 3$, 然后解关于 n 的方

程即可.

【解答】解: $\because A(3, n)$ 在二次函数 $y=x^2+2x-3$ 的图象上,

$\therefore A(3, n)$ 满足二次函数 $y=x^2+2x-3$,

$\therefore n=9+6-3=12$, 即 $n=12$,

故答案是: 12.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征. 二次函数图象上所经过的点, 均能满足该函数的解析式.

12. (2 分) 已知线段 AB 的长为 10 厘米, 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 那么较长的线段 AP 的长等于 $5\sqrt{5}-5$ 厘米.

【考点】S3: 黄金分割.

【分析】根据黄金比值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 计算即可.

【解答】解: $\because$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, $AP > BP$,

$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = (5\sqrt{5}-5)$ 厘米,

故答案为: $5\sqrt{5}-5$.

【点评】本题考查的是黄金分割的概念, 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC ($AC > BC$), 且使 AC 是 AB 和 BC 的比例中项, 叫做把线段 AB 黄金分割.

13. (2 分) 利用复印机的缩放功能, 将原图中边长为 5 厘米的一个等边三角形放大成边长为 20 厘米的等边三角形, 那么放大前后的两个三角形的周长比是 $1: 4$.

【考点】S5: 相似图形.

【分析】根据等边三角形周长的比是三角形边长的比解答即可.

【解答】解: 因为原图中边长为 5cm 的一个等边三角形放大成边长为 20cm 的等边三角形,

所以放大前后的两个三角形的周长比为 $5:20=1:4$ ，故答案为： $1:4$ 。

【点评】 本题考查了相似三角形对应边比值相等的性质，关键是根据等边三角形周长的比是三角形边长的比来解答。

14. (2 分) 已知点 P 在半径为 5 的 $\odot O$ 外，如果设 $OP=x$ ，那么 x 的取值范围是 $x>5$ 。

【考点】 M8: 点与圆的位置关系。

【专题】 11: 计算题。

【分析】 根据点在圆外的判断方法得到 x 的取值范围。

【解答】 解： $\because$ 点 P 在半径为 5 的 $\odot O$ 外，

$\therefore OP>5$ ，即 $x>5$ 。

故答案为 $x>5$ 。

【点评】 本题考查了点与圆的位置关系：点的位置可以确定该点到圆心距离与半径的关系，反过来已知点到圆心距离与半径的关系可以确定该点与圆的位置关系。

15. (2 分) 如果港口 A 的南偏东 52° 方向有一座小岛 B ，那么从小岛 B 观察港口 A 的方向是 北偏西 52° 。

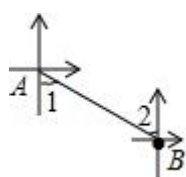
【考点】 IH: 方向角。

【分析】 根据方位角的概念，画图正确表示出方位角，即可求解。

【解答】 解：如图， $\because \angle 1 = \angle 2 = 52^\circ$ ，

$\therefore$ 从小岛 B 观察港口 A 的方向是北偏西 52° 。

故答案为：北偏西 52° 。



【点评】此题主要考查了方向角，正确画出方位角，根据平行线的性质解答是解题关键.

16. (2 分) 在半径为 4 厘米的圆面中，挖去一个半径为 x 厘米的圆面，剩下部分的面积为 y 平方厘米，写出 y 关于 x 的函数解析式: $y = -\pi x^2 + 16\pi$ (结果保留 π ，不要求写出定义域)

【考点】E3: 函数关系式; E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】根据圆的面积公式，可得答案.

【解答】解: 由题意得

在半径为 4 厘米的圆面中，挖去一个半径为 x 厘米的圆面，剩下部分的面积为 y 平方厘米，

$$y = -\pi x^2 + 16\pi,$$

故答案为: $y = -\pi x^2 + 16\pi$.

【点评】本题考查了函数关系式，利用圆的面积公式是解题关键.

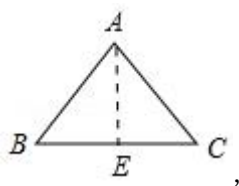
17. (2 分) 如果等腰三角形的腰与底边的比是 5: 6，那么底角的余弦值等于 $\frac{3}{5}$.

【考点】KH: 等腰三角形的性质; T7: 解直角三角形.

【分析】如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $AC: BC=5: 6$ ，作 $AE \perp BC$ 于 E ，则 $BE=EC$ ，

在 $Rt\triangle AEC$ 中，根据 $\cos \angle C = \frac{EC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{AC} = \frac{3}{5}$ ，即可解决问题.

【解答】解: 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $AC: BC=5: 6$ ，作 $AE \perp BC$ 于 E ，
则 $BE=EC$ ，

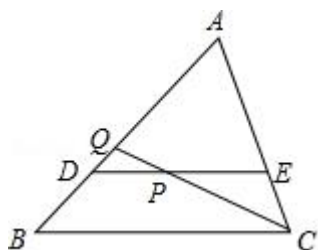


在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $\cos \angle C = \frac{EC}{AC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{AC} = \frac{3}{5}$,

故答案为 $\frac{3}{5}$.

【点评】 本题考查等腰三角形的性质, 解直角三角形锐角三角函数等知识, 解题的关键是熟练掌握所学知识, 掌握等腰三角形中的常用辅助线, 属于中考常考题型.

18. (2 分) 如图, $DE \parallel BC$, 且过 $\triangle ABC$ 的重心, 分别与 AB 、 AC 交于点 D 、 E , 点 P 是线段 DE 上一点, CP 的延长线交 AB 于点 Q , 如果 $\frac{DP}{DE} = \frac{1}{4}$, 那么 $S_{\triangle DPQ} : S_{\triangle CPE}$ 的值是 $\frac{1}{15}$.



【考点】 K5: 三角形的重心; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 连接 QE , 由 $DE \parallel BC$ 、 DE 过 $\triangle ABC$ 的重心即可得出 $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$, 设 $DE = 4m$,

则 $BC = 6m$, 结合 $\frac{DP}{DE} = \frac{1}{4}$ 即可得出 $DP = m$, $PE = 3m$, 由 $\triangle DPQ$ 与 $\triangle QPE$ 有相

同的高即可得出 $\frac{S_{\triangle DPQ}}{S_{\triangle QPE}} = \frac{DP}{PE} = \frac{1}{3}$, 再根据 $DE \parallel BC$, 利用平行线的性质即可得

出 $\angle QDP = \angle QBC$, 结合公共角 $\angle DQP = \angle BQC$ 即可得出 $\triangle QDP \sim \triangle QBC$,

依据相似三角形的性质即可得出 $\frac{QP}{QC} = \frac{DP}{BC} = \frac{1}{6}$, 进而得出 $\frac{QP}{PC} = \frac{1}{5}$, 结合三角形的

面积即可得出 $\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle CPE}} = \frac{QP}{PC} = \frac{1}{5}$, 将 $\frac{S_{\triangle DPQ}}{S_{\triangle QPE}}$ 与 $\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle CPE}}$ 相乘即可得出结论.

【解答】 解: 连接 QE , 如图所示.

$\because DE \parallel BC$, DE 过 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}.$$

设 $DE=4m$, 则 $BC=6m$.

$$\therefore \frac{DP}{DE} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore DP=m, \quad PE=3m,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DPQ}}{S_{\triangle QPE}} = \frac{DP}{PE} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle QDP = \angle QBC,$$

$$\therefore \angle DQP = \angle BQC,$$

$$\therefore \triangle QDP \sim \triangle QBC,$$

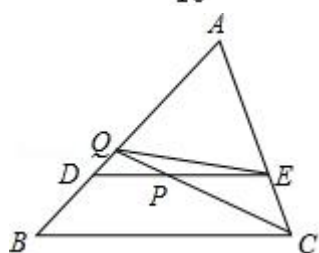
$$\therefore \frac{QP}{QC} = \frac{DP}{BC} = \frac{1}{6},$$

$$\therefore \frac{QP}{PC} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle CPE}} = \frac{QP}{PC} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DPQ}}{S_{\triangle CPE}} = \frac{S_{\triangle DPQ}}{S_{\triangle QPE}} \cdot \frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle CPE}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

故答案为: $\frac{1}{15}$.



【点评】 本题考查了三角形的重心、平行线的性质以及相似三角形的判定与性质,

根据三角形的面积找出 $\frac{S_{\triangle DPQ}}{S_{\triangle QPE}} = \frac{1}{3}$ 、 $\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle CPE}} = \frac{1}{5}$ 是解题的关键.

三、解答题

19. (6分) 计算: $\cos^2 45^\circ + \frac{\cos 30^\circ}{2\sin 60^\circ + 1} - \sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ$.

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

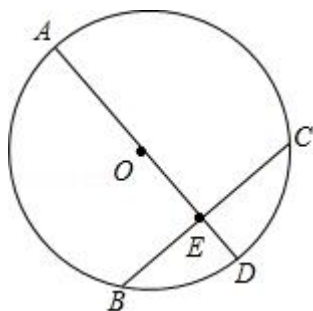
【分析】根据特殊角三角函数值，可得答案.

【解答】解：原式= $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{4} - 1$$
$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{4}.$$

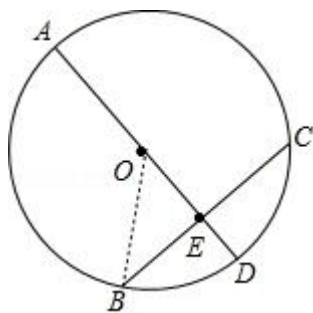
【点评】本题考查了特殊角三角函数值，熟记特殊角三角函数值是解题关键.

20. (8分) 如图，已知AD是 $\odot O$ 的直径，BC是 $\odot O$ 的弦， $AD \perp BC$ ，垂足为点E， $AE = BC = 16$ ，求 $\odot O$ 的直径.



【考点】KQ：勾股定理；M2：垂径定理.

【分析】连接OB，根据垂径定理求出BE，根据勾股定理得出方程，求出方程的解即可.



【解答】解：

连接OB，设 $OB = OA = R$ ，则 $OE = 16 - R$ ，

$\because AD \perp BC$ ， $BC = 16$ ，

$\therefore \angle OEB = 90^\circ$ ， $BE = \frac{1}{2}BC = 8$ ，

由勾股定理得： $OB^2 = OE^2 + BE^2$ ，

$$R^2 = (16 - R)^2 + 8^2,$$

解得: $R=10$,

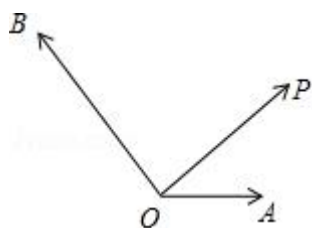
即 $\odot O$ 的直径为 20.

【点评】 本题考查了垂径定理, 勾股定理的应用, 能根据垂径定理求出 BE 的长是解此题的关键, 注意: 垂直于弦的直径平分弦.

21. (10 分) 如图, 已知向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP}$.

(1) 求做: 向量 $\overrightarrow{OP}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$: (不要求写作法, 但要在图中明确标出向量 $\overrightarrow{OD}$ 和 $\overrightarrow{OE}$).

(2) 如果点 A 是线段 OD 的中点, 联结 AE 、交线段 OP 于点 Q , 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, 那么试用 $\vec{a}$, $\vec{p}$ 表示向量 $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{QE}$ (请直接写出结论)



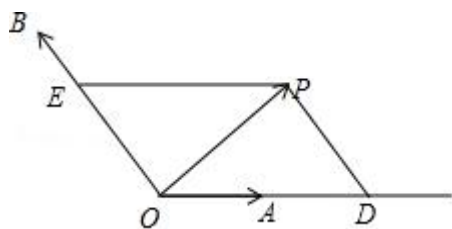
【考点】 LM: *平面向量.

【分析】 (1) 根据向量加法的平行四边形法则, 分别过 P 作 OA 、 OB 的平行线, 交 OA 于 D , 交 OB 于 E ;

(2) 易得 $\triangle OAQ \sim \triangle PEQ$, 根据相似三角形对应边成比例得出 $\frac{AQ}{EQ} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{OA}{PE} = \frac{1}{2}$, 那么 $\overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{AO} = -2\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{p}$. 再求出 $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DP} = \vec{p} - 2\vec{a}$, 然后根据 $\overrightarrow{QE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OQ}$ 即可求解.

【解答】 解: (1) 如图, 分别过 P 作 OA 、 OB 的平行线, 交 OA 于 D , 交 OB 于 E ,

则向量 $\overrightarrow{OP}$ 分别在 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 方向上的分向量是 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$;



(2) 如图, $\because$ 四边形 ODPE 是平行四边形,

$\therefore PE \parallel DO, PE = DO,$

$\therefore \triangle OAQ \sim \triangle PEQ,$

$$\therefore \frac{AQ}{EQ} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{OA}{PE},$$

$\because$ 点 A 是线段 OD 的中点,

$$\therefore OA = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}PE,$$

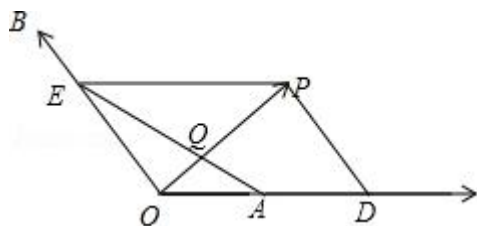
$$\therefore \frac{AQ}{EQ} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{OA}{PE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{AO} = -2\vec{a}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{p}.$$

$$\therefore \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD} = \vec{p} - 2\vec{a},$$

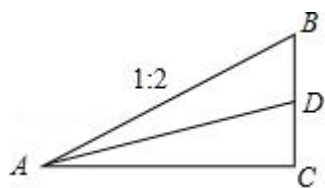
$$\therefore \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{DP} = \vec{p} - 2\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{QE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OQ} = \vec{p} - 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{p} = \frac{2}{3}\vec{p} - 2\vec{a}.$$



【点评】 本题考查了平面向量, 相似三角形的判定与性质, 平行四边形的性质, 掌握向量加法的平行四边形法则正确作出图形是解题的关键.

22. (10 分) 一段斜坡路面的截面图如图所示, $BC \perp AC$, 其中坡面 AB 的坡比 $i_1 = 1:2$, 现计划削坡放缓, 新坡面的坡角为原坡面坡角的一半, 求新坡面 AD 的坡比 i_2 (结果保留根号)



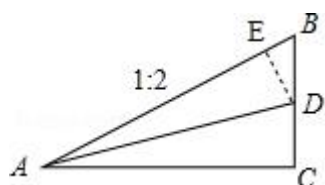
【考点】T9: 解直角三角形的应用 – 坡度坡角问题.

【分析】作 $DE \perp AB$ ，可得 $\angle BDE = \angle BAC$ ，即可知 $\tan \angle BAC = \tan \angle BDE$ ，即

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BE}{DE} = \frac{1}{2}, \text{ 设 } DC = 2x, \text{ 由角平分线性质得 } DE = DC = 2x, \text{ 再分别表示出 } BD、$$

AC 的长，最后由坡比定义可得答案.

【解答】解：过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E，



$$\therefore \angle DEB = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BAC,$$

$$\therefore \tan \angle BAC = \tan \angle BDE, \text{ 即 } \frac{BC}{AC} = \frac{BE}{DE} = \frac{1}{2},$$

设 $DC = 2x$,

$$\therefore \angle DAC = \angle DAE, \angle DEB = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = DC = 2x,$$

$$\text{则 } BE = x, BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{5}x,$$

$$\therefore BC = CD + BD = (2 + \sqrt{5})x,$$

$$\therefore AC = 2BC = (4 + 2\sqrt{5})x,$$

$$\therefore \text{新坡面 AD 的坡比 } i_2 = \frac{CD}{AC} = \frac{2x}{(4 + 2\sqrt{5})x} = 1 : (\sqrt{5} + 2).$$

【点评】本题主要考查解直角三角形的应用 – 坡角坡比问题，根据题意表示出所

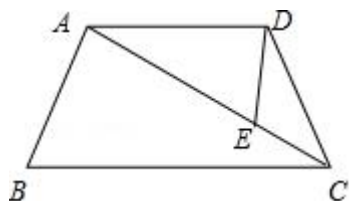
需线段的长度是解题的切入点和关键.

23. (12 分) 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \angle CDA$, $AB = DC = \sqrt{ab}$,

$CE = a$, $AC = b$, 求证:

(1) $\triangle DEC \sim \triangle ADC$;

(2) $AE \cdot AB = BC \cdot DE$.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似, 据此进行证明即可;

(2) 先根据相似三角形的性质, 得出 $\angle BAC = \angle EDA$, $\frac{DE}{AB} = \frac{AD}{AC}$, 再根据两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似, 进行证明即可.

【解答】 证明: (1) $\because DC = \sqrt{ab}$, $CE = a$, $AC = b$,

$$\therefore CD^2 = CE \times CA,$$

$$\text{即 } \frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CA},$$

$$\text{又 } \because \angle ECD = \angle DCA,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle ADC;$$

$$(2) \because \triangle DEC \sim \triangle ADC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CDE,$$

$$\because \angle BAD = \angle CDA,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle EDA,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle ADC,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{DC}{AC},$$

$$\therefore DC = AB,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{AB}{AC}, \text{ 即 } \frac{DE}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{AE}{CB} = \frac{DE}{AB},$$

$$\text{即 } AE \cdot AB = BC \cdot DE.$$

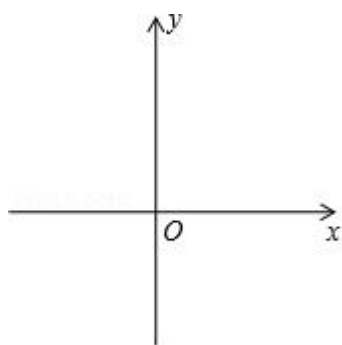
【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质的综合应用，解题时注意：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似.

24. (12 分) 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(4, 0)$ 是抛物线 $y = ax^2 + 2x - c$ 上的一点，将此抛物线向下平移 6 个单位后经过点 $B(0, 2)$ ，平移后所得的新抛物线的顶点记为 C ，新抛物线的对称轴与线段 AB 的交点记为 P .

(1) 求平移后所得到的新抛物线的表达式，并写出点 C 的坐标；

(2) 求 $\angle CAB$ 的正切值；

(3) 如果点 Q 是新抛物线对称轴上的一点，且 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle ACP$ 相似，求点 Q 的坐标.



【考点】 HF：二次函数综合题.

【分析】 (1) 先根据点 $B(0, 2)$ 向上平移 6 个单位得到点 $B'(0, 8)$ ，将 $A(4, 0)$ ， $B'(0, 8)$ 分别代入 $y = ax^2 + 2x - c$ ，得原抛物线为 $y = -x^2 + 2x + 8$ ，向下

平移 6 个单位后所得的新抛物线为 $y = -x^2 + 2x + 2$ ，据此求得顶点 C 的坐标；

(2) 根据 A (4, 0), B (0, 2), C (1, 3)，得到 $AB^2 = 20$, $AC^2 = 18$, $BC^2 = 2$ ，

进而得出 $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ，根据 $\angle ACB = 90^\circ$ ，求得 $\tan \angle CAB$ 的值即可；

(3) 先设抛物线的对称轴 $x = 1$ 与 x 轴交于点 H，根据 $\frac{PH}{AH} = \frac{BO}{AO} = \frac{1}{2}$ ，求得

$PH = \frac{1}{2}AH = \frac{3}{2}$ ，进而得到 P (1, $\frac{3}{2}$)，再由 $HA = HC = 3$ ，得 $\angle HCA = 45^\circ$ ，根据

当点 Q 在点 C 下方时， $\angle BCQ = \angle ACP$ ，因此 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle ACP$ 相似分两种

情况，根据相似三角形的性质即可得到点 Q 的坐标.

【解答】解：(1) 点 B (0, 2) 向上平移 6 个单位得到点 B' (0, 8)，

将 A (4, 0), B' (0, 8) 分别代入 $y = ax^2 + 2x - c$ ，得

$$\begin{cases} 16a + 8 - c = 0 \\ c = 8 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ c = 8 \end{cases},$$

$\therefore$ 原抛物线为 $y = -x^2 + 2x + 8$ ，向下平移 6 个单位后所得的新抛物线为 $y = -x^2 + 2x + 2$ ，

$\therefore$ 顶点 C 的坐标为 (1, 3)；

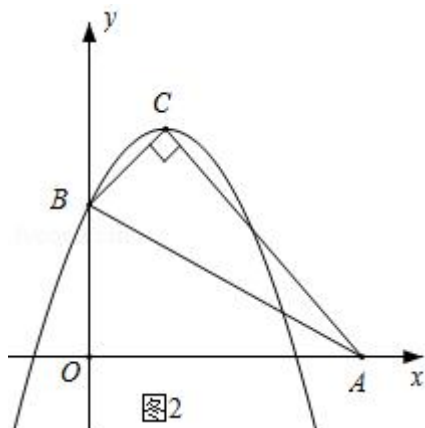
(2) 如图 2，由 A (4, 0), B (0, 2), C (1, 3)，得

$AB^2 = 20$, $AC^2 = 18$, $BC^2 = 2$ ，

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$ ，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \tan \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$ ；



(3) 如图 3, 设抛物线的对称轴 $x=1$ 与 x 轴交于点 H ,

由 $\frac{PH}{AH} = \frac{BO}{AO} = \frac{1}{2}$, 得 $PH = \frac{1}{2}AH = \frac{3}{2}$,

$\therefore P(1, \frac{3}{2})$,

由 $HA=HC=3$, 得 $\angle HCA=45^\circ$,

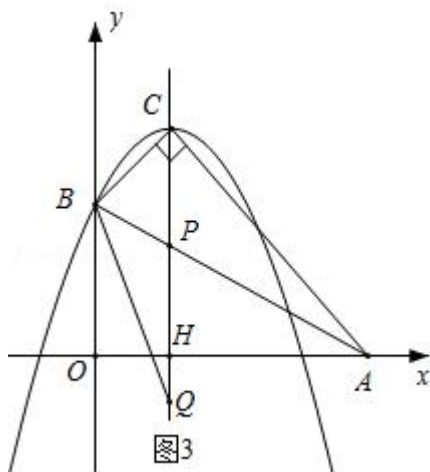
$\therefore$ 当点 Q 在点 C 下方时, $\angle BCQ = \angle ACP$,

因此 $\triangle BCQ$ 与 $\triangle ACP$ 相似分两种情况:

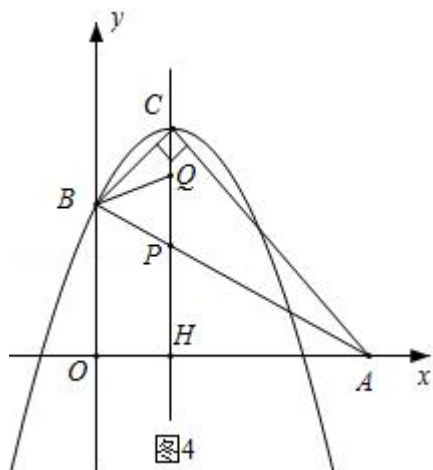
① 如图 3, 当 $\frac{CQ}{CB} = \frac{CA}{CP}$ 时, $\frac{CQ}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{3}{2}}$,

解得 $CQ=4$,

此时 $Q(1, -1)$;

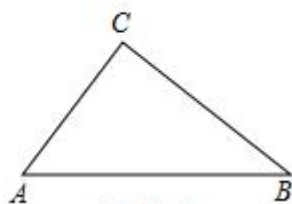


此时 $Q(1, \frac{5}{2})$.



25. (14 分) 如图, 在直角三角形 ABC 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AB=10$, $\sin B=\frac{3}{5}$,

(3) 如果 $\triangle OMN$ 是以 OM 为腰的等腰三角形, 请直接写出线段 CM 的长.



【考点】RB: 几何变换综合题.

(2) 如图 2 中, 作 $NG \perp OB$ 于 G . 首先证明 $\angle 1 = \angle 2$, 根据 $\tan \angle 1 = \tan \angle 2$, 可得 $\frac{MH}{OH} = \frac{NG}{OG}$, 由此即可解决问题.

【解答】解: (1) 如图 1 中, 作 $OH \perp BC$ 于 H .


$$\therefore AC=6, \quad BC=8,$$
$$\because AO=OB, \quad OH \parallel AC,$$
$$\therefore \text{CH}=\text{HB}=4, \quad \text{OH}=3,$$
$$\therefore CM=2,$$

$$\therefore CM=HM=2,$$

在 $\triangle DCM$ 和 $\triangle OHM$ 中,

$$\begin{cases} \angle CMD=\angle OMH \\ \angle DCM=\angle OHM=90^\circ, \\ CM=MH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DCM \cong \triangle OHM,$$

$$\therefore CD=OH=3.$$

(2) 如图2中, 作 $NG \perp OB$ 于 G .

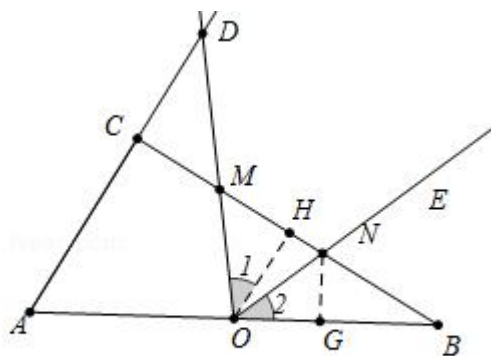


图2

$$\therefore \angle HOB = \angle A = \angle MON,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle BNG$ 中, $BN=y$, $\sin B = \frac{3}{5}$,

$$\therefore GN = \frac{3}{5}y, \quad BG = \frac{4}{5}y,$$

$$\therefore \tan \angle 1 = \tan \angle 2,$$

$$\therefore \frac{MH}{OH} = \frac{NG}{OG},$$

$$\therefore \frac{4-x}{3} = \frac{\frac{3}{5}y}{5-\frac{4}{5}y},$$

$$\therefore y = \frac{100-25x}{25-4x}, \quad (0 < x < 4).$$

(3) ①如图 3 中, 当 $OM=ON$ 时, OH 垂直平分 MN ,

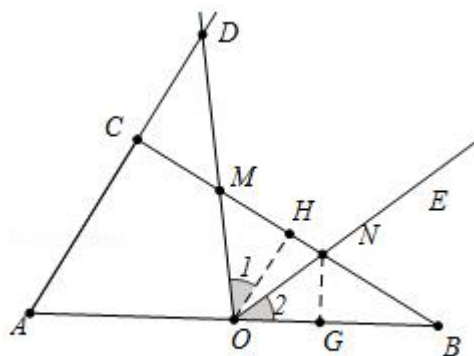


图 3

$$\therefore BN=CM=x,$$

$$\therefore \triangle OMH \cong \triangle ONG,$$

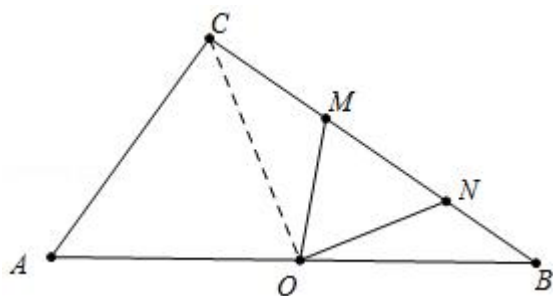
$$\therefore NG=HM=4-x,$$

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{4-x}{x} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore CM=x=\frac{5}{2}.$$

②如图 4 中, 当 $OM=MN$ 时. 连接 CO ,



$$\therefore OA=OB, OM=MN,$$

$$\therefore CO=OA=OB,$$

$$\therefore \angle MON = \angle MNO = \angle A = \angle OCA,$$

$$\therefore \triangle MON \sim \triangle OAC,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle OMN,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle CMO, \because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle CMO \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \frac{CO}{CB} = \frac{CM}{CO},$$

$$\therefore 8x = 5^2,$$

$$\therefore x = \frac{25}{8}.$$

综上所述， $\triangle OMN$ 是以 OM 为腰的等腰三角形时，线段 CM 的长为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{25}{8}$.

【点评】 本题考查几何变换综合题、全等三角形的判定和性质、锐角三角函数、相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活应用所学知识解决问题，学会添加常用辅助线，构造相似三角形或全等三角形，属于中考压轴题.