

2016 年上海市长宁区中考数学二模试卷

一、选择题

1. (3 分) 在下列二次根式中, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()
A. $\sqrt{2a}$ B. $\sqrt{4}$ C. $\sqrt{8}$ D. $\sqrt{12}$
2. (3 分) 如果一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一象限, 且与 y 轴负半轴相交, 那么 ()
A. $k>0, b>0$ B. $k>0, b<0$ C. $k<0, b>0$ D. $k<0, b<0$
3. (3 分) 如果关于 x 的方程 $mx^2+mx+1=0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 等于 ()
A. 4 或 0 B. $\frac{1}{4}$ C. 4 D. ± 4
4. (3 分) 一组数据 1、2、3、4、5、15 的平均数和中位数分别是 ()
A. 5、5 B. 5、4 C. 5、3.5 D. 5、3
5. (3 分) 在以下几何图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()
A. 等边三角形 B. 等腰梯形 C. 平行四边形 D. 圆
6. (3 分) 下列命题中, 真命题是 ()
A. 两个无理数相加的和一定是无理数
B. 三角形的三条中线一定交于一点
C. 菱形的对角线一定相等
D. 同圆中相等的弦所对的弧一定相等

二、填空题

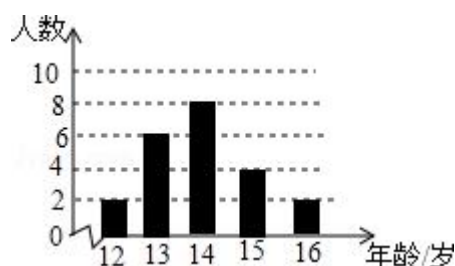
7. (3 分) $3^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. (3 分) 因式分解: $x^2 - 9y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. (3 分) 方程 $\sqrt{2-x} = x$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. (3分) 函数 $y = \frac{1}{2-x}$ 的定义域是_____.

11. (3分) 把直线 $y = -x + 2$ 向上平移 3 个单位, 得到的直线表达式是_____.

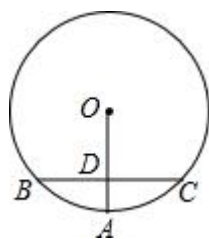
12. (3分) 如果抛物线 $y = ax^2 + 2a^2x - 1$ 的对称轴是直线 $x = -1$, 那么实数 $a =$ _____.

13. (3分) 某校为了发展校园足球运动, 组建了校足球队, 队员年龄分布如图所示, 则这些队员年龄的众数是_____.

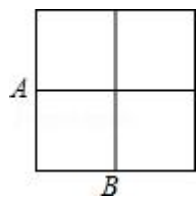


14. (3分) 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, 如果用向量 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 表示向量 $\overrightarrow{AO}$, 那么 $\overrightarrow{AO} =$ _____.

15. (3分) 如图, OA 是 $\odot O$ 的半径, BC 是 $\odot O$ 的弦, $OA \perp BC$, 垂足为 D 点, 如果 $OD = 3$, $DA = 2$, 那么 $BC =$ _____.



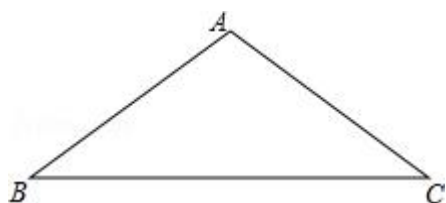
16. (3分) 如图, 在 2×2 的正方形网格中四个小正方形的顶点叫格点, 已经取定格点 A 和 B , 在余下的格点中任取一点 C , 使 $\triangle ABC$ 为直角三角形的概率是_____.



17. (3分) 已知 AB 、 AC 分别是同一个圆的内接正方形和内接正六边形的边,

那么 $\angle BAC$ 的度数是_____度.

18. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=8$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 B 旋转的 $\triangle A'BC'$, 点 A 的对应点 A' , 点 C 的对应点 C' . 如果点 A' 在 BC 边上, 那么点 C 和点 C' 之间的距离等于多少_____.



三、解答题

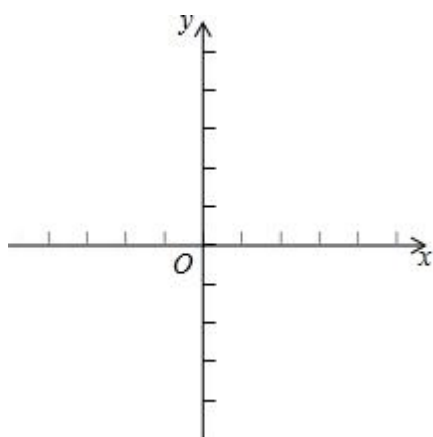
19. $(\sin 45^\circ)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 - 12^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{3}-1)^{-1} + \cot 30^\circ$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x-2y=3 \\ x^2+xy-2y^2=0 \end{cases}$$

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(2, 0)$, 点 $P(1, m)$ ($m > 0$) 和点 Q 关于 x 轴对称.

(1) 求证: 直线 $OP \parallel$ 直线 AQ ;

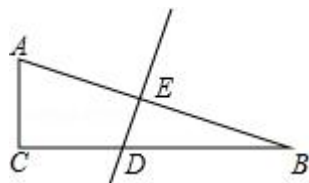
(2) 过点 P 作 $PB \parallel x$ 轴, 与直线 AQ 交于点 B , 如果 $AP \perp BO$, 求点 P 的坐标.



22. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 斜边 AB 的垂直平分线分别交 AB 、 BC 于点 E 和点 D , 已知 $BD:CD=2:\sqrt{3}$.

(1) 求 $\angle ADC$ 的度数;

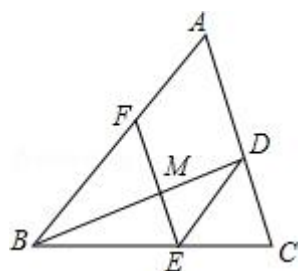
(2) 利用已知条件和第 (1) 小题的结论求 $\tan 15^\circ$ 的值 (结果保留根号).



23. 如图, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 点 E 、 F 分别在边 BC 、 AB 上, 且 $DE \parallel AB$, $\angle DEF = \angle A$.

(1) 求证: $BE = AF$;

(2) 设 BD 与 EF 交于点 M , 联结 AE 交 BD 于点 N , 求证: $BN \cdot MD = BD \cdot ND$.

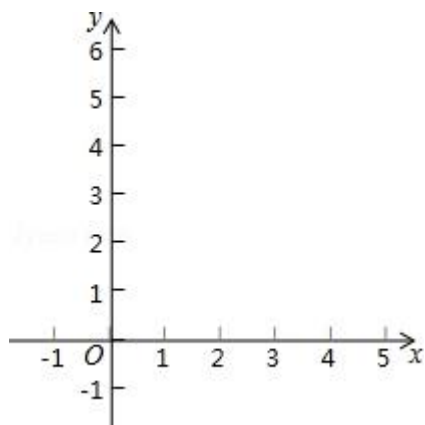


24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于点 A 和点 B , 已知点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 与 y 轴相交于点 $C(0, 3)$, 抛物线的顶点为 P .

(1) 求这条抛物线的解析式, 并写出顶点 P 的坐标;

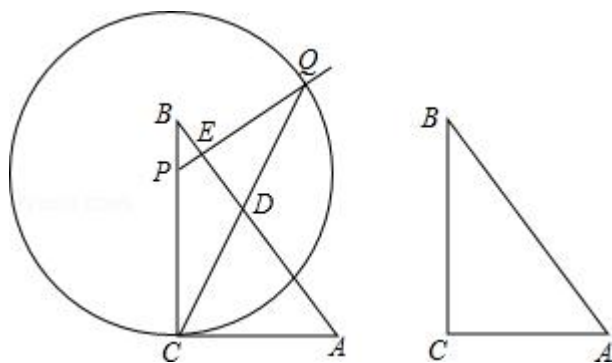
(2) 如果点 D 在此抛物线上, $DF \perp x$ 轴于点 F , DF 与直线 PB 相交于点 E , 设点 D 的横坐标为 t ($t > 3$), 且 $DE : EF = 2 : 1$, 求点 D 的坐标;

(3) 在第 (2) 小题的条件下, 求证: $\angle DPE = \angle BDE$.



25. 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $\sin A=\frac{4}{5}$ ，点 P 是边 BC 上的一点， $PE \perp AB$ ，垂足为 E ，以点 P 为圆心， PC 为半径的圆与射线 PE 相交于点 Q ，线段 CQ 与边 AB 交于点 D 。

- (1) 求 AD 的长；
- (2) 设 $CP=x$ ， $\triangle PCQ$ 的面积为 y ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；
- (3) 过点 C 作 $CF \perp AB$ ，垂足为 F ，联结 PF 、 QF ，如果 $\triangle PQF$ 是以 PF 为腰的等腰三角形，求 CP 的长。



2016 年上海市长宁区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题

1. (3 分) 在下列二次根式中, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{2a}$

B. $\sqrt{4}$

C. $\sqrt{8}$

D. $\sqrt{12}$

【考点】 77: 同类二次根式.

【分析】 直接利用同类二次根式的定义分析得出答案.

【解答】 解: A、 $\sqrt{2a}$, 无法化简, 故与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

B、 $\sqrt{4}=2$, 故与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

C、 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, 故与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式;

D、 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, 故与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

故选: C.

【点评】 此题主要考查了同类二次根式的定义, 正确化简二次根式是解题关键.

2. (3 分) 如果一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一象限, 且与 y 轴负半轴相交, 那么 ()

A. $k>0$, $b>0$

B. $k>0$, $b<0$

C. $k<0$, $b>0$

D. $k<0$, $b<0$

【考点】 F7: 一次函数图象与系数的关系.

【分析】 因为一次函数 $y = kx+b$ 的图象经过第一象限, 且与 y 轴负半轴相交,

即函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、三、四象限, 即可确定 k , b 的符号.

【解答】 解: 由题意得, 函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、三、四象限, $k>0$, $b<0$.

故选: B.

【点评】 一次函数 $y=kx+b$ 的图象有四种情况:

- ①当 $k > 0$, $b > 0$, 函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、三象限, y 的值随 x 的值增大而增大;
- ②当 $k > 0$, $b < 0$, 函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、三、四象限, y 的值随 x 的值增大而增大;
- ③当 $k < 0$, $b > 0$ 时, 函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、四象限, y 的值随 x 的值增大而减小;
- ④当 $k < 0$, $b < 0$ 时, 函数 $y=kx+b$ 的图象经过第二、三、四象限, y 的值随 x 的值增大而减小.

3. (3 分) 如果关于 x 的方程 $mx^2+mx+1=0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 等于 ()

A. 4 或 0

B. $\frac{1}{4}$

C. 4

D. ± 4

【考点】 A1: 一元二次方程的定义; AA: 根的判别式.

【分析】 若一元二次方程有两不等根, 则根的判别式 $\Delta=b^2-4ac=0$, 建立关于 m 的方程, 求出 m 的取值, 同时还要考虑二次项的系数不能为 0.

【解答】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $mx^2+mx+1=0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=0, \text{ 即 } m^2-4 \times m \times 1=0,$$

解得: $m=0$ 或 $m=4$,

又 $\because$ 二次项的系数不能为 0,

$$\therefore m=4,$$

故选: C.

【点评】 本题主要考查一元二次方程的定义及根的判别式, 一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系: ① $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根; ② $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根; ③ $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根. 且注意一元二次方程的二次项系数不为 0.

4. (3分) 一组数据 1、2、3、4、5、15 的平均数和中位数分别是 ()

- A. 5、5 B. 5、4 C. 5、3.5 D. 5、3

【考点】W1: 算术平均数; W4: 中位数.

【分析】根据平均数和中位数的定义结合选项选出正确答案即可.

【解答】解: 这组数据按从小到大的顺序排列为: 1、2、3、4、5、15,

故平均数为: $(1+2+3+4+5+15) \div 6=5$;

中位数为: $(3+4) \div 2=3.5$.

故选: C.

【点评】本题考查了中位数和平均数的知识, 属于基础题, 解题的关键是熟练掌握其概念.

5. (3分) 在以下几何图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 等边三角形 B. 等腰梯形 C. 平行四边形 D. 圆

【考点】P3: 轴对称图形; R5: 中心对称图形.

【专题】1: 常规题型.

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【解答】解: A、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 不符合题意;

B、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 不符合题意;

C、不是轴对称图形, 是中心对称图形, 不符合题意;

D、既是轴对称图形, 也是中心对称图形, 符合题意.

故选: D.

【点评】本题考查了中心对称及轴对称的知识, 解题时掌握好中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合, 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180 度后两部分重合.

6. (3分) 下列命题中, 真命题是 ()

- A. 两个无理数相加的和一定是无理数
- B. 三角形的三条中线一定交于一点
- C. 菱形的对角线一定相等
- D. 同圆中相等的弦所对的弧一定相等

【考点】O1: 命题与定理.

【分析】根据菱形的性质、无理数的性质、三角形中线的性质以及同圆中相等的弦所对的弧不一定相等即可判断.

【解答】解: A、错误. 例如 $1+\sqrt{2}$ 与 $1-\sqrt{2}$ 都是无理数, 它们的和是有理数.

B、正确.

C、错误. 菱形的对角线不一定相等.

D、错误. 应该是同圆中相等的弦所对的劣弧或优弧相等.

故选: B.

【点评】本题考查命题与定理、无理数的性质、三角形中线的性质、菱形的性质、圆的有关知识, 解题的关键是正确理解概念, 记住这些基本性质, 属于中考常考题型.

二、填空题

7. (3 分) $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

【考点】6F: 负整数指数幂.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据幂的负整数指数运算法则计算.

【解答】解: 原式 $= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

故答案为: $\frac{1}{9}$.

【点评】本题考查的是幂的负整数指数运算, 先把底数化成其倒数, 然后将负整数指数幂当成正的进行计算.

8. (3 分) 因式分解: $x^2 - 9y^2 = \underline{(x+3y)(x-3y)}$.

【考点】54: 因式分解 - 运用公式法.

【分析】直接利用平方差公式分解即可.

【解答】解: $x^2 - 9y^2 = (x+3y)(x-3y)$.

【点评】本题主要考查利用平方差公式分解因式, 熟记公式结构是解题的关键.

9. (3 分) 方程 $\sqrt{2-x}=x$ 的根是 $\underline{x=1}$.

【考点】AG: 无理方程.

【分析】把方程两边平方去根号后即可转化成整式方程, 解方程即可求得 x 的值, 然后进行检验即可.

【解答】解: 两边平方得: $2-x=x^2$,

整理得: $x^2+x-2=0$,

解得: $x=1$ 或 -2 .

经检验: $x=1$ 是方程的解, $x=-2$ 不是方程的解.

故答案是: $x=1$.

【点评】在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法, 本题用了平方法.

10. (3 分) 函数 $y = \frac{1}{2-x}$ 的定义域是 $\underline{x \neq 2}$.

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】根据分母不等于 0 列式计算即可得解.

【解答】解: 由题意得, $2-x \neq 0$,

解得 $x \neq 2$.

故答案为: $x \neq 2$.

【点评】本题考查了函数自变量的范围, 一般从三个方面考虑:

(1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数;

(2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；

(3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

11. (3 分) 把直线 $y = -x + 2$ 向上平移 3 个单位，得到的直线表达式是 $y = -x + 5$.

【考点】F9: 一次函数图象与几何变换.

【分析】利用上下平移时 k 的值不变，只有 b 发生变化，由上加下减得出即可.

【解答】解：直线 $y = -x + 2$ 向上平移 2 个单位长度得到了新直线，那么新直线解析式为 $y = -x + 2 + 3 = -x + 5$.

故答案为： $y = -x + 5$.

【点评】本题考查了一次函数图象与几何变换，熟记直线解析式平移的规律：“上加下减，左加右减”是解题的关键.

12. (3 分) 如果抛物线 $y = ax^2 + 2a^2x - 1$ 的对称轴是直线 $x = -1$ ，那么实数 $a =$ 1.

【考点】H3: 二次函数的性质.

【分析】直接利用二次函数对称轴公式求出 a 的值.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + 2a^2x - 1$ 的对称轴是直线 $x = -1$,

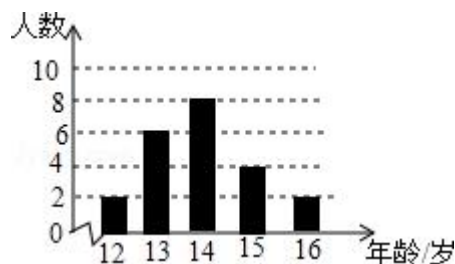
$$\therefore -1 = -\frac{2a^2}{2a}$$

解得： $a = 1$.

故答案为： 1.

【点评】此题主要考查了二次函数的性质，正确记忆二次函数对称轴公式是解题关键.

13. (3 分) 某校为了发展校园足球运动，组建了校足球队，队员年龄分布如图所示，则这些队员年龄的众数是 14.



【考点】VC: 条形统计图; W5: 众数.

【分析】根据条形统计图找到最高的条形图所表示的年龄数即为众数.

【解答】解: 观察条形统计图知: 为 14 岁的最多, 有 8 人,

故众数为 14 岁,

故答案为: 14.

【点评】考查了众数的定义及条形统计图的知识, 解题的关键是能够读懂条形统计图及了解众数的定义, 难度较小.

14. (3 分) 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{\pi}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, 如果用向量 $\vec{\pi}$ 、 $\vec{n}$ 表示向量 $\overrightarrow{AO}$, 那么 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{\pi} + \frac{1}{2}\vec{n}$.

【考点】LM: *平面向量.

【分析】首先根据题意画出图形, 然后由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 求得 $\overrightarrow{AC}$, 继而求得答案.

【解答】解: 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

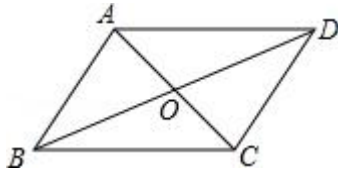
$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{\pi}, \quad \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \vec{n},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{\pi} + \vec{n},$$

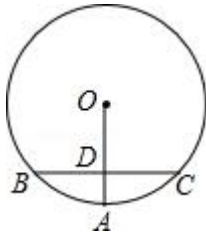
$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\vec{\pi} + \vec{n}) = \frac{1}{2}\vec{\pi} + \frac{1}{2}\vec{n}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}\vec{\pi} + \frac{1}{2}\vec{n}$.



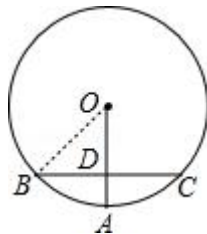
【点评】此题考查了平面向量的知以及平行四边形的性质. 注意掌握三角形法则与平行四边形法则的应用是解此题的关键.

15. (3 分) 如图, OA 是 $\odot O$ 的半径, BC 是 $\odot O$ 的弦, $OA \perp BC$, 垂足为 D 点, 如果 $OD=3$, $DA=2$, 那么 $BC=$ 8.



【考点】KQ: 勾股定理; M2: 垂径定理.

【分析】连接 OB , 求出 OB , 根据垂径定理求出 $BC=2BD$, 根据勾股定理求出 BD 即可.



【解答】解: 如图,

连接 OB ,

$\because OA \perp BC$, OA 过 O ,

$\therefore BC=2BD$, $\angle ODB=90^\circ$,

$\because OD=3$, $DA=2$,

$\therefore OA=2+3=5$,

$\therefore OB=OA=5$,

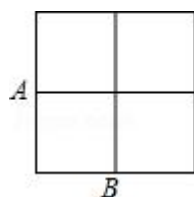
在 $Rt\triangle ODB$ 中, 由勾股定理得: $BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,

$\therefore BC=2BD=8$,

故答案为：8.

【点评】本题考查了垂径定理和勾股定理的应用，能根据垂径定理得出 $BC=2BD$ 是解此题的关键.

16. (3 分) 如图，在 2×2 的正方形网格中四个小正方形的顶点叫格点，已经取定格点 A 和 B，在余下的格点中任取一点 C，使 $\triangle ABC$ 为直角三角形的概率是 $\frac{4}{7}$.



【考点】KQ: 勾股定理; KS: 勾股定理的逆定理; X4: 概率公式.

【专题】24: 网格型.

【分析】由取定点 A 和 B，在余下的 7 个点中任取一点 C，使 $\triangle ABC$ 为直角三角形的有 4 种情况，直接利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】解： $\because$ 取定点 A 和 B，在余下的 7 个点中任取一点 C，使 $\triangle ABC$ 为直角三角形的有 4 种情况，

$\therefore$ 使 $\triangle ABC$ 为直角三角形的概率是： $\frac{4}{7}$.

故答案为： $\frac{4}{7}$.

【点评】此题考查了概率公式的应用. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

17. (3 分) 已知 AB、AC 分别是同一个圆的内接正方形和内接正六边形的边，那么 $\angle BAC$ 的度数是 15 或 105 度.

【考点】MM: 正多边形和圆.

【分析】有两种情形：①如图 1 中， $\angle BAC = \angle CAO - \angle BAO$ ，②如图 2 中， $\angle$

$\angle BAC = \angle BAE + \angle EAC$, 分别计算即可.

【解答】解: 如图 1 中, $\angle BAC = \angle CAO - \angle BAO = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$,

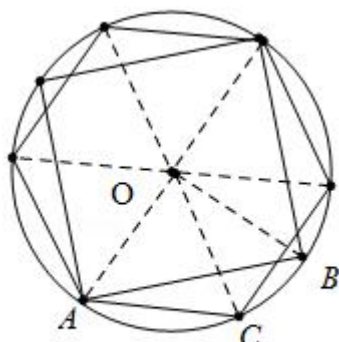


图1

如图 2 中, $\angle BAC = \angle BAE + \angle EAC = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$,

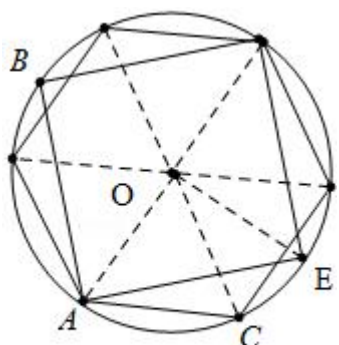
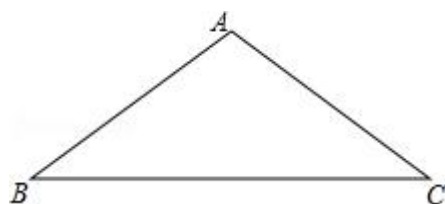


图2

故答案为 15 或 105.

【点评】本题考查正多边形与圆的有关知识, 解题的关键是正确画出图形, 考虑问题要全面, 不能漏解, 属于中考常考题型.

18. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 B 旋转的 $\triangle A'BC'$, 点 A 的对应点 A' , 点 C 的对应点 C' . 如果点 A' 在 BC 边上, 那么点 C 和点 C' 之间的距离等于多少 $\frac{8\sqrt{10}}{5}$.



【考点】R2: 旋转的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】作 $AD \perp BC$ 于 D , $C'E \perp BC$ 于 E , 如图 1, 先利用等腰三角形的性质得到 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=4$, 再利用勾股定理计算出 $AD=4$, 接着利用旋转的性质得 $A'B=A'C'=AB=5$, $\triangle A'BC' \cong \triangle ABC$, 则利用面积法可求出 $C'E$, 然后在 $Rt\triangle A'C'E$ 中利用勾股定理计算 $A'E$, 于是可在 $Rt\triangle C'CE$ 中利用勾股定理计算出 CC' .

【解答】解: 作 $AD \perp BC$ 于 D , $C'E \perp BC$ 于 E , 如图 1,

$$\because AB=AC,$$

$$\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC=4,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } AD=\sqrt{5^2-3^2}=4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \times 3 \times 8=12,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 绕着点 } B \text{ 旋转的 } \triangle A'BC',$$

$$\therefore A'B=A'C'=AB=5, \triangle A'BC' \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore A'C=3, S_{\triangle A'BC'}=12,$$

$$\text{而 } S_{\triangle A'BC'}=\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot C'E,$$

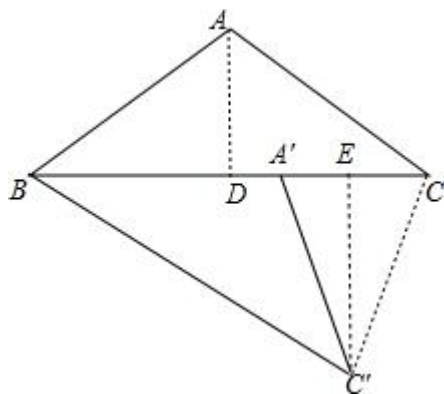
$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot C'E=12, \text{ 解得 } C'E=\frac{24}{5},$$

$$\text{在 } Rt\triangle A'C'E \text{ 中, } A'E=\sqrt{5^2-(\frac{24}{5})^2}=\frac{7}{5},$$

$$\therefore CE=3-\frac{7}{5}=\frac{8}{5},$$

$$\text{在 } Rt\triangle C'CE \text{ 中, } CC'=\sqrt{(\frac{8}{5})^2+(\frac{24}{5})^2}=\frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{8\sqrt{10}}{5}.$$



【点评】 本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．解决本题的关键是 Rt△CC'E，利用勾股定理计算 CC' 的长．

三、解答题

19. $(\sin 45^\circ)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 - 12^{\frac{1}{2}} \cdot (\sqrt{3}-1)^{-1} + \cot 30^\circ$.

【考点】 6E：零指数幂；6F：负整数指数幂；79：二次根式的混合运算；T5：特殊角的三角函数值．

【分析】 依据特殊角的三角函数值、零指数幂、分数值数幂、负整数指数幂化简各式，再根据分式的性质、分母有理化进一步化简可得．

【解答】 解：原式 $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \sqrt{12} \times \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \sqrt{3}$
 $= \frac{1}{2} + 1 - 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \sqrt{3}$
 $= \frac{3}{2} - \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) + \sqrt{3}$
 $= \frac{3}{2} - 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3}$
 $= -\frac{3}{2}$.

【点评】 本题主要考查分式的混合运算能力，掌握混合运算的运算顺序是根本、前提，准确计算特殊角的三角函数值、零指数幂、分数值数幂、负整数指数幂是解题的关键．

20. 解方程组：
$$\begin{cases} x-2y=3 \\ x^2+xy-2y^2=0 \end{cases}$$

【考点】AF：高次方程.

【分析】用代入法求解，将方程①变为 $x=2y+3$ ，代入到②中解方程可得.

【解答】解：解方程
$$\begin{cases} x-2y=3 & \text{①} \\ x^2+xy-2y^2=0 & \text{②} \end{cases}$$

由方程①，得： $x=3+2y$ ③，

把③代入②，得： $(3+2y)^2 + (3+2y)y - 2y^2 = 0$,

整理，得： $4y^2 + 15y + 9 = 0$

解得： $y_1 = -\frac{3}{4}$, $y_2 = -3$

把 $y_1 = -\frac{3}{4}$ 代入③得： $x_1 = \frac{3}{2}$,

把 $y_2 = -3$ 代入③，得： $x_2 = -3$.

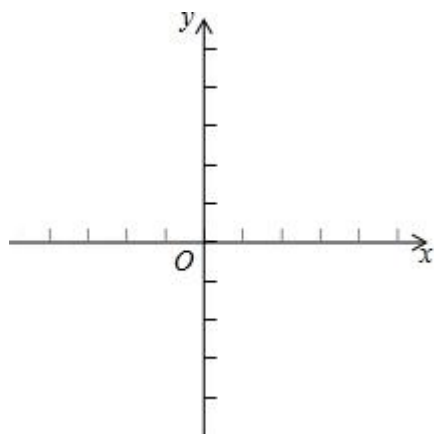
故原方程组的解是：
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}.$$

【点评】本题主要考查解高次方程的能力，用代入法把二元二次方程组转成一元二次方程来解是关键.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(2, 0)$ ，点 $P(1, m)$ ($m > 0$) 和点 Q 关于 x 轴对称.

(1) 求证：直线 $OP \parallel$ 直线 AQ ;

(2) 过点 P 作 $PB \parallel x$ 轴，与直线 AQ 交于点 B ，如果 $AP \perp BO$ ，求点 P 的坐标.



【考点】FA: 待定系数法求一次函数解析式; LA: 菱形的判定与性质.

【分析】(1) 设直线 OP 和 AQ 的解析式分别为 $y=k_1x$ 和 $y=k_2x+b_2$. 由题意得

$$\text{出点 Q 的坐标为 } (1, -m), k_1=m, \begin{cases} k_2+b_2=-m \\ 2k_2+b_2=0 \end{cases}, \text{ 解方程组得出 } \begin{cases} k_2=m \\ b_2=-2m \end{cases},$$

得出 $k_1=k_2=m$ 即可,

(2) 证明四边形 POAQ 是菱形, 得出 $PO=AO$, 由勾股定理得出 $\sqrt{1+m^2}=2$, 得

出 $m=\sqrt{3}$, 即可点 P 的坐标.

【解答】(1) 证明: 设直线 OP 和直线 AQ 的解析式分别为 $y=k_1x$ 和 $y=k_2x+b_2$.

根据题意, 得: 点 Q 的坐标为 $(1, -m)$, $k_1=m$, $\begin{cases} k_2+b_2=-m \\ 2k_2+b_2=0 \end{cases}$,

$$\text{解得: } \begin{cases} k_2=m \\ b_2=-2m \end{cases},$$

$$\therefore k_1=k_2=m,$$

$\therefore$ 直线 OP // 直线 AQ;

(2) 解: $\therefore OP // AQ$, $PB // OA$, $AP \perp BO$,

$\therefore$ 四边形 POAQ 是菱形,

$$\therefore PO=AO,$$

$$\therefore \sqrt{1+m^2}=2,$$

$$\therefore m=\pm\sqrt{3}.$$

$$\therefore m>0,$$

$$\therefore m=\sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(1, \sqrt{3})$.

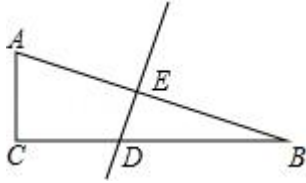
【点评】本题考查了菱形的判定与性质、一次函数的解析式、勾股定理、坐标与图形性质; 熟练掌握菱形的判定与性质, 由勾股定理求出 m 是解决问题 (2)

的关键.

22. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 斜边 AB 的垂直平分线分别交 AB 、 BC 于点 E 和点 D , 已知 $BD:CD=2:\sqrt{3}$.

(1) 求 $\angle ADC$ 的度数;

(2) 利用已知条件和第 (1) 小题的结论求 $\tan 15^\circ$ 的值 (结果保留根号).



【考点】KG: 线段垂直平分线的性质; T7: 解直角三角形.

【专题】11: 计算题.

【分析】(1) 连接 AD , 设 $BD=2k$, 则 $CD=\sqrt{3}k$, 根据垂直平分线的性质可得

$AD=BD=2k$, 然后只需在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中运用三角函数就可解决问题;

(2) 当 $\angle ACD=30^\circ$ 时, 易得 $\angle B=15^\circ$, 要求 $\tan 15^\circ$ 的值, 只需求 $\frac{AC}{BC}$, 只需用 k

的代数式分别表示出 AC 和 BC 就可解决问题.

【解答】解: (1) 连接 AD , 如图.

设 $BD=2k$, 则 $CD=\sqrt{3}k$.

$\because DE$ 垂直平分 AB ,

$\therefore AD=BD=2k$.

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,

$\because \angle C=90^\circ$,

$$\therefore \cos \angle ADC = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore \angle ADC=30^\circ$;

$$(2) \because AD=BD,$$

$$\therefore \angle B = \angle DAB.$$

$$\because \angle ADC = 30^\circ, \angle B + \angle DAB = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle B = \angle DAB = 15^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

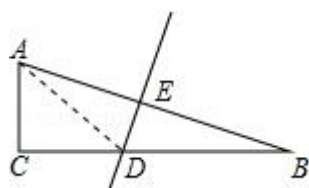
$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = k.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{k}{\sqrt{3}k + 2k} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

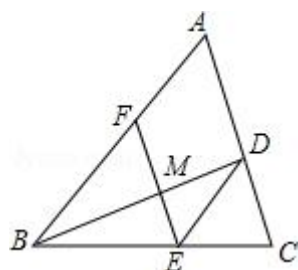


【点评】 本题主要考查了三角函数的定义、特殊角的三角函数值、勾股定理等知识，利用已知条件和第 (1) 小题的结论是解决第 (2) 小题的关键.

23. 如图，BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 E、F 分别在边 BC、AB 上，且 $DE \parallel AB$ ， $\angle DEF = \angle A$.

(1) 求证：BE=AF;

(2) 设 BD 与 EF 交于点 M，联结 AE 交 BD 于点 N，求证：BN•MD=BD•ND.



【考点】L7: 平行四边形的判定与性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】14: 证明题.

【分析】(1) 先证明四边形 ADEF 为平行四边形得到 $AF=DE$, 再证明 $\angle DBE=$

$\angle BDE$ 得到 $BE=DE$, 则 $BE=AF$;

(2) 如图, 根据平行线分线段成比例定理, 由 $EF \parallel AC$ 得到 $AF: AB=DM: BD$,

等线段代换得 $DE: AB=DM: BD$, 再由 $DE \parallel AB$ 得到 $DE: AB=DN: BN$,

则 $DM: BD=DN: BN$, 然后利用比例的性质即可得到结论.

【解答】证明: (1) $\because DE \parallel AB$,

$\therefore \angle A + \angle ADE = 180^\circ$,

$\because \angle DEF = \angle A$,

$\therefore \angle DEF + \angle ADE = 180^\circ$,

$\therefore EF \parallel AD$,

$\therefore$ 四边形 ADEF 为平行四边形,

$\therefore AF = DE$,

$\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$\therefore \angle DBE = \angle ABD$,

$\because DE \parallel AB$,

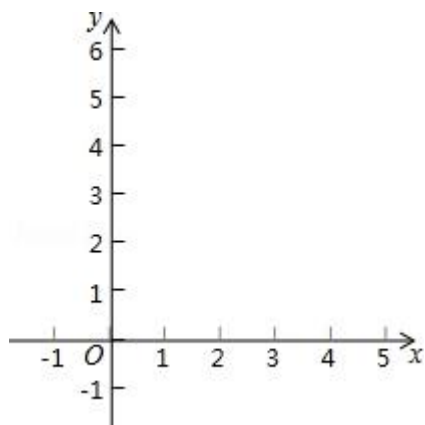
$\therefore \angle ABD = \angle BDE$,

$\therefore \angle DBE = \angle BDE$,

$\therefore BE = DE$,

$\therefore BE = AF$;

(2) 如图, $\because EF \parallel AC$,



【考点】HF：二次函数综合题.

【分析】(1) 将 A (1, 0)、C (0, 3) 代入抛物线的解析式可求得关于 b、c 的方程组，解得 b、c 的值可求得抛物线的解析式，最后依据配方法可求得抛物线的顶点坐标；

(2) 过点 P 作 $PG \perp AB$ ，垂足为 G. 先求得点 B 的坐标，由点 B 和点 P 的坐标可知 $\triangle PBG$ 为等腰直角三角形，从而可证明 $\triangle BEF$ 为等腰直角三角形，设点 D 的坐标为 $(t, t^2 - 4t + 3)$ ，然后求得 EF，DF 的长（用含 t 的式子表示），最后根据 PF 与 EF 的数量关系列出关于 t 的一元二次方程，从而可求得 t 的值；

(3) 先求得 DE，BE，PE 的长，接下来再证明 $DE^2 = BE \cdot PE$ ，从而可得到 $\triangle EBD \sim \triangle EDP$ ，最后依据相似三角形的性质可求得 $\angle DPE = \angle BDE$.

【解答】解：(1) $\therefore$ 将 A (1, 0)、C (0, 3) 代入得：
$$\begin{cases} c=3 \\ 1+b+c=0 \end{cases},$$

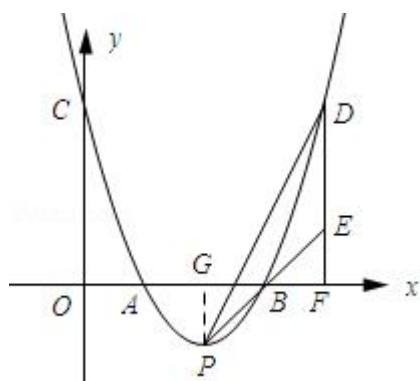
解得： $b = -4$ ， $c = 3$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$.

$\therefore y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 (2, -1).

(2) 过点 P 作 $PG \perp AB$ ，垂足为 G.



$\therefore$ 令 $y=0$ 得: $x^2 - 4x + 3 = 0$, 解得 $x_1=1$, $x_2=3$,

$\therefore B(3, 0)$.

又 $\because P(2, -1)$,

$\therefore PG=BG=1$.

$\therefore \angle GBP=45^\circ$.

$\therefore \angle EBF=45^\circ$.

又 $\because \angle EFB=90^\circ$,

$\therefore \angle EBF=\angle FEB=45^\circ$.

$\therefore BF=EF$.

设 $D(t, t^2 - 4t + 3)$, 则 $DF=t^2 - 4t + 3$, 则 $BF=t - 3$.

$\therefore DE:EF=2:1$,

$\therefore DF=3EF=3(t - 3)$.

$\therefore t^2 - 4t + 3 = 3(t - 3)$.

解得: $t_1=4$, $t_2=3$ (舍去).

$\therefore D(4, 3)$.

(3) $\because t=4$,

$\therefore EF=BF=4 - 3=1$.

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(4, 1)$.

$$\therefore BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{2}, \quad ED = DF - EF = 3 - 1 = 2, \quad PE = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\therefore DE^2 = 2^2 = 4, \quad BE \cdot PE = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4.$$

$$\therefore DE^2 = BE \cdot PE.$$

$$\text{又} \because \angle DEB = \angle PED,$$

$$\therefore \triangle EBD \sim \triangle EDP.$$

$$\therefore \angle DPE = \angle BDE.$$

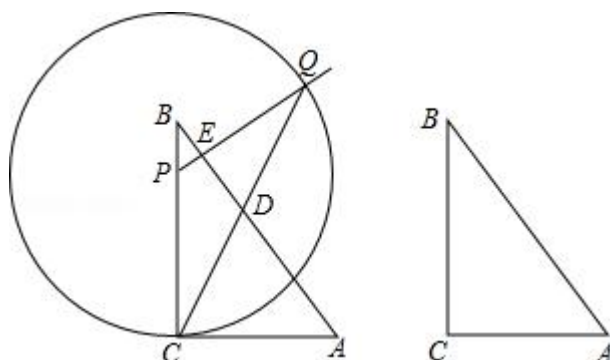
【点评】 本题主要考查的是二次函数的综合应用，解答本题主要利用了待定系数法求二次函数的解析式、等腰直角三角形的性质和判定、一元二次方程的解法、勾股定理以及相似三角形的性质和判定，证得 $DE^2 = BE \cdot PE$ 从而得到 $\triangle EBD \sim \triangle EDP$ 是解题的关键.

25. 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $\sin A = \frac{4}{5}$ ，点 P 是边 BC 上的一点， $PE \perp AB$ ，垂足为 E ，以点 P 为圆心， PC 为半径的圆与射线 PE 相交于点 Q ，线段 CQ 与边 AB 交于点 D .

(1) 求 AD 的长；

(2) 设 $CP = x$ ， $\triangle PCQ$ 的面积为 y ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；

(3) 过点 C 作 $CF \perp AB$ ，垂足为 F ，联结 PF 、 QF ，如果 $\triangle PQF$ 是以 PF 为腰的等腰三角形，求 CP 的长.



【考点】 KQ: 勾股定理; MR: 圆的综合题; T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】15: 综合题; 32: 分类讨论.

【分析】(1) 易证 $AD=AC$, 只需运用三角函数和勾股定理求出 AC 即可;

(2) 过点 Q 作 $QH \perp BC$ 于 H , 如图 1, 只需用 x 的代数式表示 QH 就可解决问题;

(3) 由于 $\triangle PQF$ 是以 PF 为腰的等腰三角形, 故需分 $PF=PQ$ 和 $PF=FQ$ 两种情况讨论, 只需将等腰三角形的性质和三角函数相结合, 就可解决问题.

【解答】解: (1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中,

$$\because \angle ACB=90^\circ, AB=5, \sin A=\frac{4}{5},$$

$$\therefore BC=AB \cdot \sin A=5 \times \frac{4}{5}=4,$$

$$\therefore AC=\sqrt{5^2-4^2}=3.$$

$$\because PC=PQ, \therefore \angle PCQ=\angle PQC.$$

$$\because PE \perp AB \text{ 即 } \angle QED=90^\circ,$$

$$\therefore \angle EQD+\angle EDQ=90^\circ.$$

$$\because \angle ACD+\angle PCQ=90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDQ=\angle ACD.$$

$$\because \angle CDA=\angle EDQ,$$

$$\therefore \angle ACD=\angle CDA,$$

$$\therefore AD=AC=3;$$

(2) 过点 Q 作 $QH \perp BC$ 于 H , 如图 1,

$$\because \angle PBE+\angle BPE=90^\circ, \angle PBE+\angle A=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPE=\angle A,$$

$$\therefore \sin \angle HPQ=\sin \angle A=\frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin \angle HPQ = \frac{QH}{PQ} = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore PQ = PC = x, \therefore QH = \frac{4}{5}x,$$

$$\therefore S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}PC \cdot QH = \frac{1}{2}x \cdot \frac{4}{5}x = \frac{2}{5}x^2 \quad \left(\frac{3}{2} \leq x < 4\right);$$

(当 E、Q、D 共线时, 可得 x 最小值, 根据 $\frac{x}{4-x} = \frac{3}{5}$, 解得 $x = \frac{3}{2}$.)

(3) ①当 $PF = PQ$ 时, 则有 $PF = PQ = x = PC$.

过点 P 作 $PG \perp CF$ 于 G, 如图 2,

$$\text{则 } CG = \frac{1}{2}CF.$$

$$\therefore CF \perp AB,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CF,$$

$$\therefore CF = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5},$$

$$\therefore CG = \frac{6}{5}.$$

$$\therefore \angle PCG = 90^\circ - \angle FCA = \angle A,$$

$$\therefore \cos \angle PCG = \cos \angle A = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \cos \angle PCG = \frac{CG}{PC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore x = PC = \frac{5}{3}CG = \frac{5}{3} \times \frac{6}{5} = 2;$$

②当 $PF = FQ$ 时,

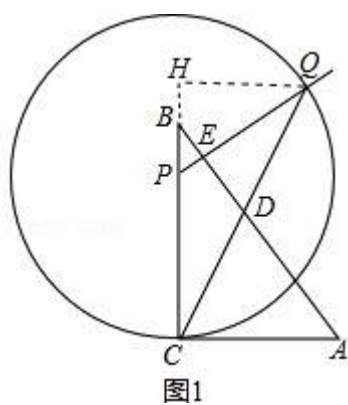
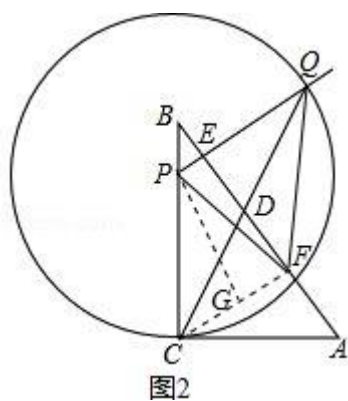
$$\therefore FE \perp PQ,$$

$$\therefore PE = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \cos \angle BPE = \frac{PE}{BP} = \frac{\frac{1}{2}x}{4-x} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore x = \frac{24}{11}.$$

综上所述: 当 $\triangle PQF$ 是以 PF 为腰的等腰三角形, CP 的长为 2 或 $\frac{24}{11}$.



【点评】 本题主要考查了等腰三角形的判定与性质、三角函数、同角或等角的余角相等、勾股定理等知识，运用分类讨论的思想是解决第（3）小题的关键.