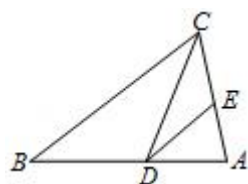


2016 年上海市黄浦区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 如果两个相似三角形的周长比为 1: 4, 那么这两个三角形的相似比为 ()
 A. 1: 2 B. 1: 4 C. 1: 8 D. 1: 16
2. (4 分) 已知线段 a 、 b 、 c , 其中 c 是 a 、 b 的比例中项, 若 $a=9\text{cm}$, $b=4\text{cm}$, 则线段 c 长 ()
 A. 18cm B. 5cm C. 6cm D. $\pm 6\text{cm}$
3. (4 分) 如果向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相反, 且 $3|\vec{a}|=|\vec{b}|$, 那么向量 $\vec{a}$ 用向量 $\vec{b}$ 表示为 ()
 A. $\vec{a}=3\vec{b}$ B. $\vec{a}=-3\vec{b}$ C. $\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{b}$ D. $\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{b}$
4. (4 分) 在直角坐标平面内有一点 $P(3, 4)$, OP 与 x 轴正半轴的夹角为 α , 下列结论正确的是 ()
 A. $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ B. $\cot\alpha=\frac{4}{5}$ C. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ D. $\cos\alpha=\frac{5}{4}$
5. (4 分) 下列函数中不是二次函数的有 ()
 A. $y=x(x-1)$ B. $y=\sqrt{2}x^2-1$
 C. $y=-x^2$ D. $y=(x+4)^2-x^2$
6. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 如果 $DE\parallel BC$, 且 $\angle DCE=\angle B$, 那么下列说法中, 错误的是 ()



- A. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ B. $\triangle ADE \sim \triangle ACD$ C. $\triangle ADE \sim \triangle$

DCB

D. $\triangle DEC \sim \triangle CDB$

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

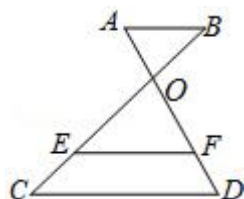
7. (4 分) 如果 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么锐角 $\alpha =$ _____ $^\circ$.

8. (4 分) 已知线段 a 、 b 、 c 、 d , 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{a+c}{b+d} =$ _____.

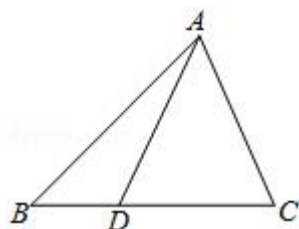
9. (4 分) 计算: $\frac{3}{2}(\vec{a} - 2\vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{a} + 4\vec{b} =$ _____.

10. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $\cot A = \frac{1}{3}$, 则 $BC =$ _____.

11. (4 分) 如图, 已知 AD 、 BC 相交于点 O , $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $CE = 2$, $EB = 4$, $FD = 1.5$, 那么 $AD =$ _____.

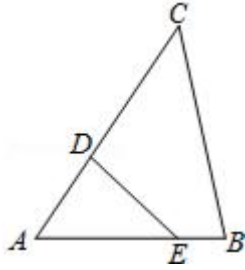


12. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 边上的点, 且 $CD = 2BD$, 如果 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, 那么 $\vec{BC} =$ _____ (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).



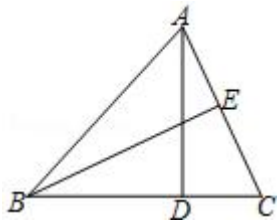
13. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是重心, DE 经过点 O 且平行于 BC 交边 AB 、 AC 于点 D 、 E , 则 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} =$ _____.

14. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是边 AC 、 AB 上的点, 且 $AD = 2$, $DC = 4$, $AE = 3$, $EB = 1$, 则 $DE : BC =$ _____.



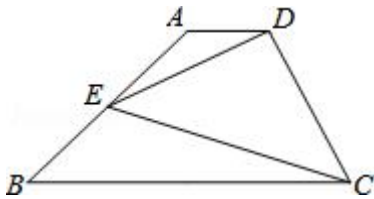
15. (4 分) 某水库水坝的坝高为 10 米, 迎水坡的坡度为 1: 2.4, 则该水库迎水坡的长度为_____米.

16. (4 分) 如图, AD、BE 分别是 $\triangle ABC$ 中 BC、AC 边上的高, AD=4, AC=6, 则 $\sin \angle EBC =$ _____.



17. (4 分) 已知抛物线 $y_1 = a(x - m)^2 + k$ 与 $y_2 = a(x + m)^2 + k$ ($m \neq 0$) 关于 y 轴对称, 我们称 y_1 与 y_2 互为“和谐抛物线”. 请写出抛物线 $y = -4x^2 + 6x + 7$ 的“和谐抛物线”_____.

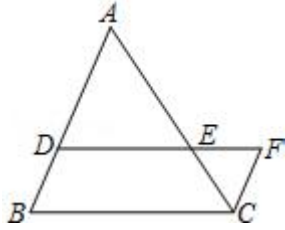
18. (4 分) 如图, 在梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 45^\circ$, 点 E 是 AB 的中点, $DE = DC$, $\angle EDC = 90^\circ$, 若 $AB = 2$, 则 AD 的长是_____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

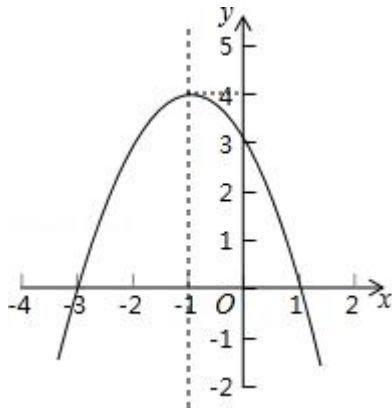
19. (10 分) 计算: $\cos^2 45^\circ - \frac{\tan 30^\circ}{2 \sin 60^\circ} + \cot^2 30^\circ$.

20. (10 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E 分别在边 AB 和 AC 上, $DE \parallel BC$, 点 F 是 DE 延长线上的点, $\frac{AD}{BD} = \frac{DE}{EF}$, 联结 FC, 若 $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$, 求 $\frac{AD}{FC}$ 的值.



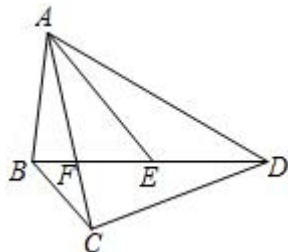
21. (10 分) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 如图所示, 请结合图象中所给信息完成以下问题:

- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 若该抛物线经过一次平移后过原点 O , 请写出一种平移方法, 并写出平移后得到的新抛物线的表达式.



22. (10 分) 如图, 已知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 F , 点 E 是 BD 上一点, 且 $\angle BCA = \angle ADE$, $\angle CAD = \angle BAE$.

- (1) 求证: $\triangle ABC \sim \triangle AED$;
- (2) 求证: $BE \cdot AC = CD \cdot AB$.

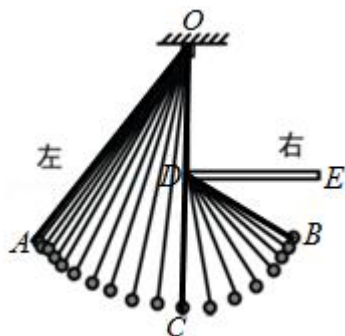


23. (12 分) 如图, 一条细绳系着一个小球在平面内摆动. 已知细绳从悬挂点 O 到球心的长度为 50 厘米, 小球在 A 、 B 两个位置时达到最高点, 且最高点高

度相同 (不计空气阻力), 在 C 点位置时达到最低点. 达到左侧最高点时与最低点时细绳相应所成的角度为 37° , 细绳在右侧达到最高点时与一个水平放置的挡板 DE 所成的角度为 30° . ($\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

(1) 求小球达到最高点位置与最低点位置时的高度差.

(2) 求 OD 这段细绳的长度.

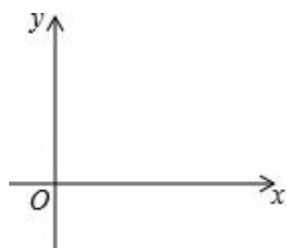


24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 3ax + c$ 与 x 轴交于 A (- 1, 0)、B 两点 (A 点在 B 点左侧), 与 y 轴交于点 C (0, 2).

(1) 求抛物线的对称轴及 B 点的坐标;

(2) 求证: $\angle CAO = \angle BCO$;

(3) 点 D 是射线 BC 上一点 (不与 B、C 重合), 联结 OD, 过点 B 作 $BE \perp OD$, 垂足为 $\triangle BOD$ 外一点 E, 若 $\triangle BDE$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求点 D 的坐标.



25. (14 分) 已知直线 l_1 、 l_2 , $l_1 \parallel l_2$, 点 A 是 l_1 上的点, B、C 是 l_2 上的点, $AC \perp BC$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 4$, O 是 AB 的中点, D 是 CB 延长线上的点, 将 $\triangle DOC$ 沿直线 CO 翻折, 点 D 与 D' 重合.

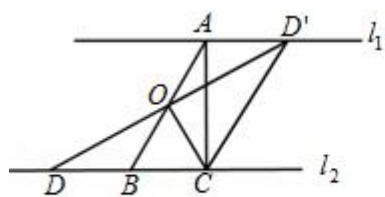


图 1

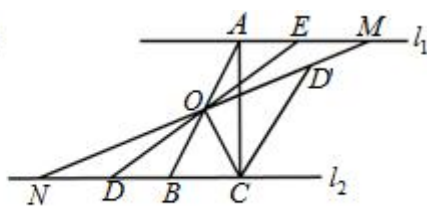


图2

- (1) 如图 1, 当点 D' 落在直线 l_1 上时, 求 DB 的长;
- (2) 延长 DO 交 l_1 于点 E , 直线 OD' 分别交 l_1 、 l_2 于点 M 、 N .
- ①如图 2, 当点 E 在线段 AM 上时, 设 $AE=x$, $DN=y$, 求 y 关于 x 的函数解析式及其定义域;
- ②若 $\triangle DON$ 的面积为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 时, 求 AE 的长.

2016 年上海市黄浦区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 如果两个相似三角形的周长比为 1: 4, 那么这两个三角形的相似比为 ()

- A. 1: 2 B. 1: 4 C. 1: 8 D. 1: 16

【考点】S7: 相似三角形的性质.

【分析】根据相似三角形周长的比等于相似比解答即可.

【解答】解: $\because$ 两个相似三角形的周长比为 1: 4,

$\therefore$ 这两个三角形的相似比为 1: 4,

故选: B.

【点评】本题考查的是相似三角形的性质, 掌握相似三角形周长的比等于相似比是解题的关键.

2. (4 分) 已知线段 a 、 b 、 c , 其中 c 是 a 、 b 的比例中项, 若 $a=9\text{cm}$, $b=4\text{cm}$, 则线段 c 长 ()

- A. 18cm B. 5cm C. 6cm D. $\pm 6\text{cm}$

【考点】S2: 比例线段.

【分析】由 c 是 a 、 b 的比例中项, 根据比例中项的定义, 列出比例式即可得出线段 c 的长, 注意线段不能为负.

【解答】解: 根据比例中项的概念结合比例的基本性质, 得: 比例中项的平方等于两条线段的乘积.

所以 $c^2=4 \times 9$, 解得 $c=\pm 6$ (线段是正数, 负值舍去),

故选: C.

【点评】此题考查了比例线段；理解比例中项的概念，这里注意线段不能是负数.

3. (4分) 如果向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相反，且 $3|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ，那么向量 $\vec{a}$ 用向量 $\vec{b}$ 表示为 ()

A. $\vec{a}=3\vec{b}$

B. $\vec{a}=-3\vec{b}$

C. $\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{b}$

D. $\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{b}$

【考点】LM: *平面向量.

【分析】由向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相反，且 $3|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ，可得 $3\vec{a}=-\vec{b}$ ，继而求得答案.

【解答】解：∵ 向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相反，且 $3|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ，

$$\therefore 3\vec{a}=-\vec{b},$$

$$\therefore \vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{b}.$$

故选：D.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 注意根据题意得到 $3\vec{a}=-\vec{b}$ 是解此题的关键.

4. (4分) 在直角坐标平面内有一点P (3, 4)，OP 与 x 轴正半轴的夹角为 α ，下列结论正确的是 ()

A. $\tan\alpha=\frac{4}{3}$

B. $\cot\alpha=\frac{4}{5}$

C. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$

D. $\cos\alpha=\frac{5}{4}$

【考点】D5: 坐标与图形性质；T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】根据在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边，可得答案.

【解答】解：斜边为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$,

A、 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ ，故 A 正确；

B、 $\cot\alpha=\frac{3}{4}$ ，故 B 错误；

C、 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ，故 C 错误；

D、 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ ，故 D 错误；

故选：A.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

5. (4分) 下列函数中不是二次函数的有 ()

A. $y=x(x-1)$

B. $y=\sqrt{2}x^2-1$

C. $y=-x^2$

D. $y=(x+4)^2-x^2$

【考点】H1: 二次函数的定义.

【分析】依据二次函数的定义回答即可.

【解答】解：A、整理得 $y=x^2-x$ ，是二次函数，与要求不符；

B、 $y=\sqrt{2}x^2-1$ 是二次函数，与要求不符；

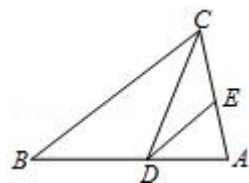
C、 $y=-x^2$ 是二次函数，与要求不符；

D、整理得： $y=8x+16$ 是一次函数，与要求相符.

故选：D.

【点评】本题主要考查的是二次函数的定义，掌握二次函数的定义是解题的关键.

6. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点D、E分别在边AB、AC上，如果 $DE \parallel BC$ ，且 $\angle DCE = \angle B$ ，那么下列说法中，错误的是 ()



A. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

B. $\triangle ADE \sim \triangle ACD$ C. $\triangle ADE \sim \triangle$

DCB

D. $\triangle DEC \sim \triangle CDB$

【考点】S8: 相似三角形的判定.

【分析】由相似三角形的判定方法得出A、B、D正确，C不正确；即可得出结论.

【解答】解： $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$, $\angle BCD = \angle CDE$, $\angle ADE = \angle B$, $\angle AED = \angle ACB$,

$\therefore \angle DCE = \angle B$,

$\therefore \angle ADE = \angle DCE$,

又 $\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD$;

$\therefore \angle BCD = \angle CDE$, $\angle DCE = \angle B$,

$\therefore \triangle DEC \sim \triangle CDB$;

$\therefore \angle B = \angle ADE$,

但是 $\angle BCD < \angle AED$, 且 $\angle BCD \neq \angle A$,

$\therefore \triangle ADE$ 与 $\triangle DCB$ 不相似;

正确的判断是 A、B、D, 错误的判断是 C;

故选: C.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定方法; 熟练掌握相似三角形的判定方法, 由两角相等得出三角形相似是解决问题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 如果 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么锐角 $\alpha = \underline{60}^\circ$.

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 根据特殊角三角函数值, 可得答案.

【解答】 解: 由 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得

锐角 $\alpha = 60^\circ$,

故答案为: 60.

【点评】 本题考查了特殊角三角函数值, 熟记特殊角三角函数值是解题关键.

8. (4分) 已知线段 a 、 b 、 c 、 d , 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{a+c}{b+d} = \frac{2}{3}$.

【考点】S1: 比例的性质.

【分析】根据等比性质: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{3} = \frac{a+c}{b+d}$, 可得答案.

【解答】解: 由等比性质, 得

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{2}{3},$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点评】本题考查了比例的性质, 利用等比性质是解题关键.

9. (4分) 计算: $\frac{3}{2}(\vec{a}-2\vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{a} + 4\vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$.

【考点】LM: *平面向量.

【分析】直接利用平面向量的加减运算法则求解即可求得答案.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: } & \frac{3}{2}(\vec{a}-2\vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{a} + 4\vec{b} \\ &= \frac{3}{2}\vec{a} - 3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + 4\vec{b} \\ &= \vec{a} + \vec{b}. \end{aligned}$$

故答案为: $\vec{a} + \vec{b}$.

【点评】此题考查了平面向量的运算法则. 注意去括号时符号的变化.

10. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=2$, $\cot A = \frac{1}{3}$, 则 $BC = 6$.

【考点】T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】根据余切等于邻边比对边, 可得答案.

【解答】解: $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=2$, $\cot A = \frac{1}{3} = \frac{AC}{BC}$, 得

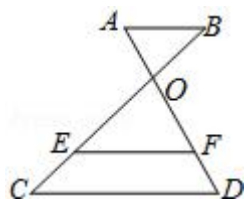
$$BC = 3AC = 3 \times 2 = 6,$$

故答案为: 6.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义及运用: 在直角三角形中, 锐角的正弦为对边比斜边, 余弦为邻边比斜边, 正切为对边比邻边, 余切等于邻边比对边.

11. (4分) 如图, 已知 AD 、 BC 相交于点 O , $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $CE=2$, $EB=4$,

FD=1.5, 那么 AD= 4.5 .



【考点】S4: 平行线分线段成比例.

【分析】根据平行线分线段成比例、比例的基本性质求得 $AF=3$, 则

$AD=AF+FD=4.5$ 即可.

【解答】解: $\because AB \parallel EF$,

$$\therefore \frac{FO}{AF} = \frac{EO}{EB}, \text{ 则 } \frac{FO}{EO} = \frac{AF}{EB},$$

又 $EF \parallel CD$,

$$\therefore \frac{FO}{FD} = \frac{EO}{EC}, \text{ 则 } \frac{FO}{EO} = \frac{FD}{EC},$$

$$\therefore \frac{AF}{EB} = \frac{FD}{EC},$$

$$\text{即 } \frac{AF}{4} = \frac{1.5}{2},$$

解得: $AF=3$,

$$\therefore AD=AF+FD=3+1.5=4.5,$$

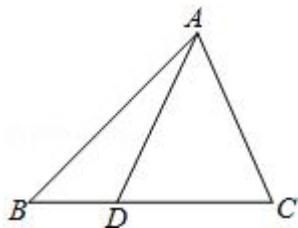
即 AD 的长是 4.5;

故答案为: 4.5.

【点评】本题考查了平行线分线段成比例、比例的性质; 由平行线分线段成比例定理得出比例式求出 AF 是解决问题的关键.

12. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 边上的点, 且 $CD=2BD$, 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BC} = \underline{3\vec{b} - 3\vec{a}}$ (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).



【考点】LM: *平面向量.

【分析】由 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 直接利用三角形法则即可求得 $\overrightarrow{BD}$, 再由 $CD=2BD$, 即可求得答案.

【解答】解: $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 边上的点, 且 $CD=2BD$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BD} = 3\vec{b} - 3\vec{a}.$$

故答案为: $3\vec{b} - 3\vec{a}$.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 注意掌握三角形法则的应用是解此题的关键.

13. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是重心, DE 经过点 O 且平行于 BC 交边 AB、

AC 于点 D、E, 则 $S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = \underline{4: 9}$.

【考点】K5: 三角形的重心.

【分析】根据三角形的重心的性质得到 $\frac{AO}{AF} = \frac{2}{3}$, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方交点即可.

【解答】解: $\because$ 点 O 是重心,

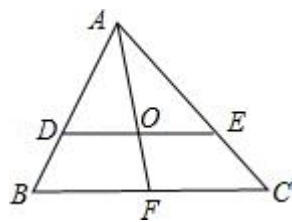
$$\therefore \frac{AO}{AF} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AO}{AF} = \frac{2}{3}, \quad \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

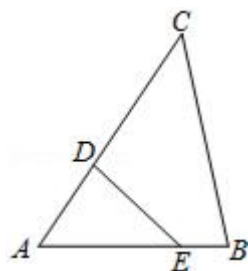
$$\therefore S_{\triangle ADE} : S_{\triangle ABC} = 4: 9,$$

故答案为：4：9.



【点评】 本题考查的是三角形的重心的概念和性质、相似三角形的性质，三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的2倍.

14. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D、E分别是边AC、AB上的点，且 $AD=2$ ， $DC=4$ ， $AE=3$ ， $EB=1$ ，则 $DE:BC=\frac{1}{2}$.



【考点】 S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】 根据已知条件得到 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ ，由于 $\angle A=\angle A$ ，推出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，根据相似三角形的性质即可得到结论.

【解答】 解： $\because AD=2$ ， $DC=4$ ， $AE=3$ ， $EB=1$ ，

$$\therefore AC=6, AB=4,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}, \frac{AE}{AC}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC},$$

$$\because \angle A=\angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore DE:BC=AD:AB=1:2,$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】本题主要考查相似三角形的判定和性质, 掌握相似三角形的判定方法是解题的关键.

15. (4 分) 某水库水坝的坝高为 10 米, 迎水坡的坡度为 1: 2.4, 则该水库迎水坡的长度为 26 米.

【考点】T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】因为 $\tan\alpha$ (坡度) = 垂直距离 $\div$ 水平距离, 可得水平距离为 24 米, 根据勾股定理可得背水面的坡长为 26 米.

【解答】解: $\because$ 大坝高 10 米, 背水坝的坡度为 1: 2.4,

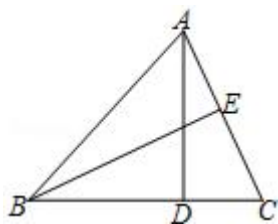
$\therefore$ 水平距离 = $10 \times 2.4 = 24$ (米).

根据勾股定理, 可得背水面的坡长为: $\sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ (米).

故答案为: 26.

【点评】此题主要考查了坡度问题应用, 此题的关键是熟悉且会灵活应用公式: $\tan\alpha$ (坡度) = 垂直距离 $\div$ 水平距离.

16. (4 分) 如图, AD、BE 分别是 $\triangle ABC$ 中 BC、AC 边上的高, AD=4, AC=6, 则 $\sin \angle EBC = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



【考点】T7: 解直角三角形.

【专题】17: 推理填空题.

【分析】根据 AD、BE 分别是 $\triangle ABC$ 中 BC、AC 边上的高, 可以求得 $\angle EBC$ 和 $\angle DAC$ 的关系, AD=4, AC=6, 可以求得 CD 的长, 从而可以求出 $\angle DAC$ 的

三角函数值，进而可以得到 $\angle EBC$ 的三角函数值，本题得以解决.

【解答】解： $\because AD$ 、 BE 分别是 $\triangle ABC$ 中 BC 、 AC 边上的高，

$$\therefore \angle BDA = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle DAC,$$

$$\because \angle ADC = 90^\circ, AD = 4, AC = 6,$$

$$\therefore CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \sin \angle DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore \sin \angle EBC = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

【点评】 本题考查解直角三角形，解题的关键找出各个角之间的关系，利用等角的三角函数值相等，可以求得所求的角的三角函数值.

17. (4 分) 已知抛物线 $y_1 = a(x - m)^2 + k$ 与 $y_2 = a(x + m)^2 + k$ ($m \neq 0$) 关于 y 轴对称, 我们称 y_1 与 y_2 互为“和谐抛物线”. 请写出抛物线 $y = -4x^2 + 6x + 7$ 的“和谐抛物线” $y = -4x^2 - 6x + 7$.

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】 23: 新定义.

【分析】 根据关于 y 轴对称的点的坐标规律: 纵坐标相同, 横坐标互为相反数, 可得答案

【解答】 解: 抛物线 $y = -4x^2 + 6x + 7$ 的“和谐抛物线”是 $y = -4(-x)^2 + 6(-x) + 7$,

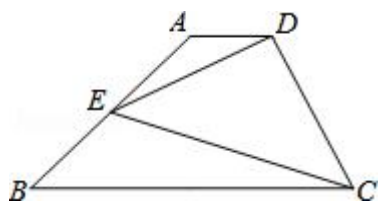
$$\text{化简, 得 } y = -4x^2 - 6x + 7,$$

$$\text{故答案为: } y = -4x^2 - 6x + 7.$$

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换, 利用了关于 y 轴对称的点的坐标

规律.

18. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 45^\circ$, 点 E 是 AB 的中点, $DE = DC$, $\angle EDC = 90^\circ$, 若 $AB = 2$, 则 AD 的长是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

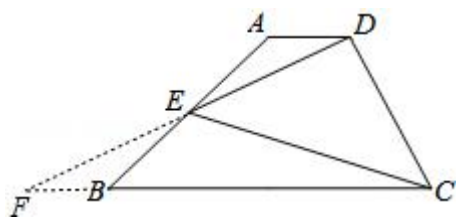


【考点】KD: 全等三角形的判定与性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】11: 计算题; 55D: 图形的相似.

【分析】延长 DE 交 CB 的延长线于点 F , 将 AD 替换成 BF , 再由三角形相似, 借助比的特性, 即能得出结论.

【解答】解: 延长 DE 交 CB 的延长线于点 F , 如图,



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADE = \angle F$,

$\because$ 点 E 是 AB 的中点,

$\therefore AE = BE = 1$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BFE$ 中,
$$\begin{cases} \angle ADE = \angle F \\ \angle AED = \angle BEF \text{ (对顶角)} \\ AE = BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BFE$ (AAS),

$\therefore AD = BF$, $DE = EF$,

$\because \angle B = \angle F + \angle BEF = 45^\circ$, $DE = DC$, $\angle EDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle CED = \angle F + \angle ECF = 45^\circ$, $CE = \sqrt{2}DE$,

$$\therefore \angle BEF = \angle ECF,$$

$$\therefore \angle F = \angle F,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{EF}{CE}, \text{ 即 } \frac{BF}{EF} = \frac{BE}{CE},$$

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{1}{\sqrt{2}DE},$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点评】 本题考查全等三角形的判定和性质以及相似三角形的判定和性质，解题的关键是巧妙的利用比的特性，化未知为已知，从而得出结论.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\cos^2 45^\circ - \frac{\tan 30^\circ}{2 \sin 60^\circ} + \cot^2 30^\circ$.

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 根据特殊角三角函数值, 可得实数的运算, 根据实数的运算, 可得答案.

【解答】 解: 原式 = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} + (\sqrt{3})^2$

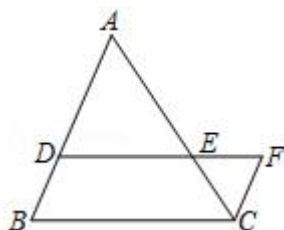
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 3$$

$$= \frac{19}{6}.$$

【点评】 本题考查了特殊角三角函数值, 熟记特殊角三角函数值是解题关键.

20. (10 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E 分别在边 AB 和 AC 上, $DE \parallel BC$,

点 F 是 DE 延长线上的点, $\frac{AD}{BD} = \frac{DE}{EF}$, 联结 FC, 若 $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$, 求 $\frac{AD}{FC}$ 的值.



【考点】S4：平行线分线段成比例.

【分析】由平行线分线段成比例定理和已知条件得出 $\frac{AE}{EC} = \frac{DE}{EF}$ ，证出 $AB \parallel CF$ ，

再由平行线分线段成比例定理和比例的性质即可得出结果.

【解答】解： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC},$$

$$\text{又} \because \frac{AD}{BD} = \frac{DE}{EF},$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{DE}{EF},$$

$$\therefore \angle AED = \angle CEF,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle CEF,$$

$$\therefore \angle A = \angle ECF,$$

$$\therefore AB \parallel CF,$$

$$\therefore \frac{AD}{FC} = \frac{AE}{EC},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{2}{1} = 2,$$

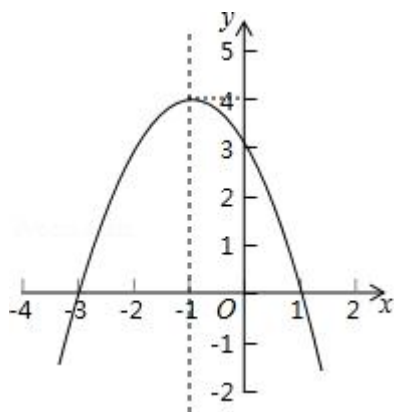
$$\therefore \frac{AD}{FC} = 2.$$

【点评】本题考查了平行线分线段成比例定理以及逆定理；熟练掌握平行线分线段成比例定理，证明 $AB \parallel CF$ 是解决问题的关键.

21. (10 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 如图所示，请结合图象中所给信息完成以下问题：

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 若该抛物线经过一次平移后过原点 O ，请写出一种平移方法，并写出平移后得到的新抛物线的表达式.



【考点】H6：二次函数图象与几何变换；H8：待定系数法求二次函数解析式.

【分析】(1) 根据题意和图形列出三元一次方程组，解方程组得到答案.

(2) 由于平移前后的二次项系数不变，而平移后的抛物线过原点，则平移后的抛物线解析式中常数项为 0，然后根据这两个条件写出一个解析式即可.

【解答】解：(1) 由题意得
$$\begin{cases} c=3 \\ 9a-3b+c=0, \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} a=-1 \\ b=-2. \\ c=3 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数的解析式为： $y = -x^2 - 2x + 3$;

(2) 平移抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ ，使它经过原点，则平移后的抛物线解析式可为 $y = -x^2 - 2x$.

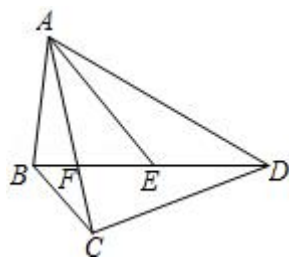
故向下平移 3 个单位，即可得到过原点 O 的抛物线.

【点评】本题考查的是待定系数法求二次函数的解析式和二次函数图象与交换变换，掌握待定系数法和平移的规律是解题的关键.

22. (10 分) 如图，已知四边形 ABCD 的对角线 AC、BD 交于点 F，点 E 是 BD 上一点，且 $\angle BCA = \angle ADE$ ， $\angle CAD = \angle BAE$.

(1) 求证： $\triangle ABC \sim \triangle AED$;

(2) 求证： $BE \cdot AC = CD \cdot AB$.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】14: 证明题.

【分析】(1) 根据已知条件和角的和差得到 $\angle BAC = \angle DAE$, 由于 $\angle ACB = \angle ADE$, 即可得到结论;

(2) 根据相似三角形的性质得到 $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$, 由 $\angle BAE = \angle CAD$, 推出 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$, 由相似三角形的性质即可得到结论.

【解答】证明: (1) $\because \angle BAE = \angle DAC$, $\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$, $\angle DAE = \angle DAC - \angle CAE$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAE$,

$\because \angle ACB = \angle ADE$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED$;

(2) $\because \triangle ABC \sim \triangle AED$,

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$,

$\because \angle BAE = \angle CAD$,

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD$,

$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC}$,

即: $BE \cdot AC = CD \cdot AB$.

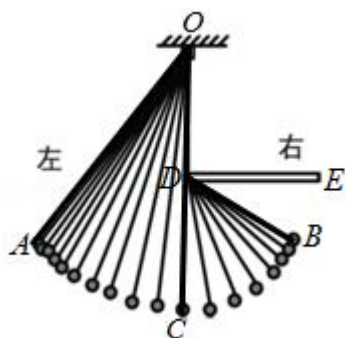
【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的判定和性

质是解题的关键.

23. (12 分) 如图, 一条细绳系着一个小球在平面内摆动. 已知细绳从悬挂点 O 到球心的长度为 50 厘米, 小球在 A 、 B 两个位置时达到最高点, 且最高点高度相同 (不计空气阻力), 在 C 点位置时达到最低点. 达到左侧最高点时与最低点时细绳相应所成的角度为 37° , 细绳在右侧达到最高点时与一个水平放置的挡板 DE 所成的角度为 30° . ($\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$)

(1) 求小球达到最高点位置与最低点位置时的高度差.

(2) 求 OD 这段细绳的长度.



【考点】T8: 解直角三角形的应用.

【分析】(1) 根据题意得出 $CF = OC - OF = OC - OA \cos 37^\circ$, 进而得出答案;

(2) 根据题意得出 $CF = CD - DF = BD - BD \cdot \cos 60^\circ = 10$, 进而得出 DB 的长, 进而得出答案.

【解答】解: (1) 连接 AB 交 OC 于点 F , 可知, $AB \perp OC$,

由题意可得: $\angle AOC = 37^\circ$,

则 $CF = OC - OF = OC - OA \cos 37^\circ = 50 - 50 \times 0.8 = 10$ (cm),

故 A , C 之间的高度差为 10cm;

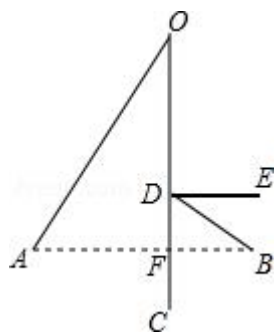
(2) 由 (1) 知, B , C 的高度差也是 10cm,

故 $CF = CD - DF = BD - BD \cdot \cos 60^\circ = 10$ (cm),

解得：BD=20，

则 OD=OC - BD=50 - 20=30 (cm)，

答：OD 这段细绳的长度为 30cm.



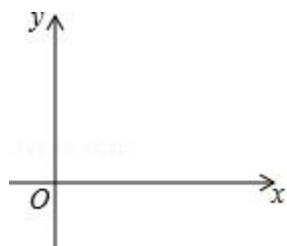
【点评】此题主要考查了解直角三角形的应用，根据题意得出 OF 与 OA 的关系是解题关键.

24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-3ax+c$ 与 x 轴交于 A (-1, 0)、B 两点 (A 点在 B 点左侧)，与 y 轴交于点 C (0, 2).

(1) 求抛物线的对称轴及 B 点的坐标；

(2) 求证： $\angle CAO = \angle BCO$ ；

(3) 点 D 是射线 BC 上一点 (不与 B、C 重合)，联结 OD，过点 B 作 $BE \perp OD$ ，垂足为 $\triangle BOD$ 外一点 E，若 $\triangle BDE$ 与 $\triangle ABC$ 相似，求点 D 的坐标.



【考点】HF：二次函数综合题.

【分析】(1) 根据待定系数法，可得函数解析式，根据配方法，可得对称轴，根据函数值相等的两点关于对称轴对称，可得 B 点坐标；

(2) 根据正切函数值相等的两锐角相等，可得答案；

(3) 根据两角对应相等的两个三角形相似，可得① $\angle EBD = \angle CBA$ ，根据余角的性质，可得 $\angle EDB = \angle CAB = \angle OCD = \angle ODC$ ，根据等腰三角形的判定，可得 OD 的长，根据勾股定理，可得 a 的值，根据 a 的值 OH 的长，可得 D 点坐标；

②根据等腰三角形的判定，可得 OD 的长，根据勾股定理，可得 m 的值，根据自变量与函数值的对应关系，可得答案.

【解答】解：(1) 将 A、C 点坐标代入函数解析式，得

$$\begin{cases} a+3a+c=0 \\ c=2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ c=2 \end{cases}$$

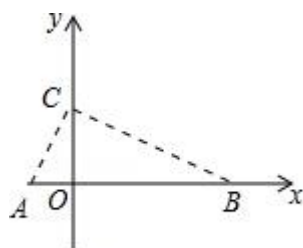
$$\text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{8},$$

$$\text{对称轴为 } x = \frac{3}{2},$$

$$A \text{ 到对称轴的距离是 } \frac{3}{2} - (-1) = \frac{5}{2},$$

$$B \text{ 点的横坐标为, } \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4,$$

B 点坐标为 (4, 0);



(2) 证明：如图 1  1 ,

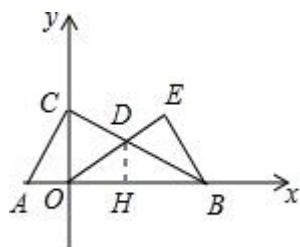
$$\therefore AO=1, OC=2, BO=4,$$

$$\therefore \tan \angle CAO = \frac{CO}{AO} = 2, \tan \angle BCO = \frac{OB}{OC} = 2,$$

$$\therefore \tan \angle CAO = \tan \angle BCO,$$

$$\therefore \angle CAO = \angle BCO;$$

(3) 垂足为 $\triangle BOD$ 外一点 E，得 $\triangle BOD$ 为钝角三角形， $\angle BED = \angle ACB = 90^\circ$,



① $\angle EBD = \angle CBA$ 时, 如图 2 ,

过 D 作 $DH \perp OB$ 于 H,

$$\angle EDB = \angle CAB = \angle OCD = \angle ODC,$$

$$OD = OC = 2.$$

$$\tan \angle CBO = \frac{OC}{OB} = \frac{DH}{HB} = \frac{1}{2},$$

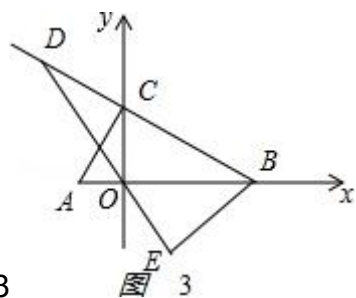
$$\text{设 } DH = a, HB = 2a, OH = 4 - 2a,$$

$$OD^2 = OH^2 + DH^2, \text{ 即 } 4 = (4 - 2a)^2 + a^2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{6}{5}, a = 2 \text{ (舍)},$$

$$\text{当 } a = \frac{6}{5} \text{ 时, } OH = 4 - 2a = \frac{8}{5},$$

$$D \text{ 点坐标为 } \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5} \right);$$



② $\angle EDB = \angle CBA$ 时, 如图 3 ,

$$\text{此时 } OD = OB = 4,$$

$$BC: y = -\frac{1}{2}x + 2,$$

$$\text{设 } D \left(m, -\frac{1}{2}m + 2 \right),$$

$$m^2 + \left(-\frac{1}{2}m + 2 \right)^2 = 16, \text{ 解得 } m = -\frac{12}{5}, m = 4 \text{ (舍)},$$

$$\text{当 } m = -\frac{12}{5} \text{ 时, } -\frac{1}{2}m + 2 = \frac{16}{5},$$

$$D(-\frac{12}{5}, \frac{16}{5}),$$

综上所述：D 点坐标为 $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$, $(-\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$.

【点评】 本题考查了二次函数综合题，利用待定系数法求函数解析式；利用正切函数值相等的两锐角相等是解题关键；利用两角对应相等的两个三角形相似得出① $\angle EBD = \angle CBA$ ，② $\angle EDB = \angle CBA$ 是解题关键，又利用了勾股定理.

25. (14 分) 已知直线 l_1 、 l_2 ， $l_1 \parallel l_2$ ，点 A 是 l_1 上的点，B、C 是 l_2 上的点， $AC \perp BC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = 4$ ，O 是 AB 的中点，D 是 CB 延长线上的点，将 $\triangle DOC$ 沿直线 CO 翻折，点 D 与 D' 重合.

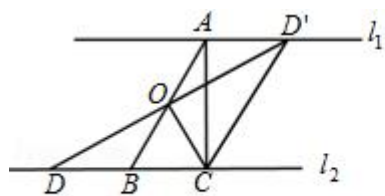


图 1

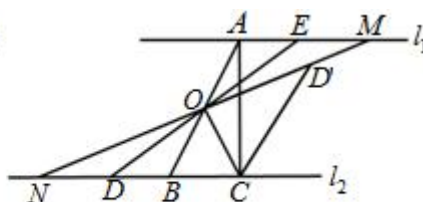


图 2

(1) 如图 1，当点 D' 落在直线 l_1 上时，求 DB 的长；

(2) 延长 DO 交 l_1 于点 E，直线 OD' 分别交 l_1 、 l_2 于点 M、N.

①如图 2，当点 E 在线段 AM 上时，设 $AE = x$ ， $DN = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式及其定义域；

②若 $\triangle DON$ 的面积为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 时，求 AE 的长.

【考点】 SO：相似形综合题.

【专题】 15：综合题；55D：图形的相似.

【分析】 (1) 过 D' 作 $D'H \perp l_2$ ，如图 1 所示，可得 $DH = AC$ ，由折叠的性质及平角定义得到 $\angle D'CH = 60^\circ$ ， $D'C = DC$ ，求出 $D'C$ 的长，即为 DC 的长，再由三角形 BOC 为等边三角形，且 OC 等于斜边 AB 的一半，求出 BC 的长，由 $DC - BC$ 求出 BD 的长即可；

出关系式, 即可确定出 y 与 x 的函数解析式, 并求出定义域即可;

DN 的长, 分两种情况考虑: 当点 E 在线段 AM 上时, 如图 3 所示, 根据 DN 的长, 求出 AE 的长即可; 当点 E 在线段 AM 的延长线上时, 如图 4 所示, 同理可得 $\triangle BOD \sim \triangle CND'$, 由相似得比例求出此时 AE 的长即可.

【解答】解: (1) 过 D' 作 $D'H \perp l_2$, 如图 1 所示, 可得 $D'H = AC = 2\sqrt{3}$.

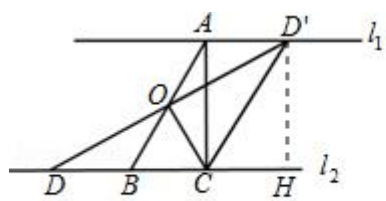


图 1

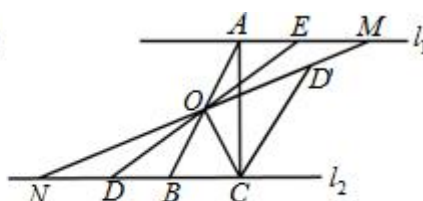


图2

$$\therefore \angle DCO = \angle D'CO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle D'CH = 60^\circ.$$

$$\therefore CD=CD'=4,$$

$$\therefore \angle DCO = \angle ABC = \angle D'CO = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形, 即 $BO=CO=BC$,

$\therefore O$ 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中点,

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = 2, \text{ 即 } BC = 2,$$

$$\therefore BD = CD - BC = 2;$$

(2) ① $\because \angle DCO = \angle D'CO = \angle BOC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle OBD = \angle NCD' = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle ODC',$$

$$\therefore \triangle BOD \sim \triangle CND'$$

$$\therefore \frac{BO}{CN} = \frac{BD}{CD'}, \text{ 即 } \frac{2}{2+x+y} = \frac{x}{x+2},$$

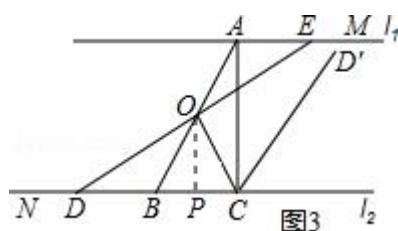
$$\text{则 } y = \frac{4}{x} - x \quad (0 < x \leq 2);$$

②过 O 作 $OP \perp BC$, 如图 3 所示,

$$\therefore S_{\triangle DON} = \frac{1}{2} DN \cdot OP = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad OP = \sqrt{3},$$

$$\therefore DN = 3,$$

当点 E 在线段 AM 上时, 如图 3 所示,

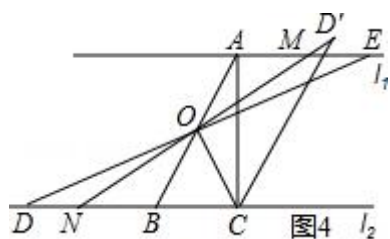


可得 $DN = y = 3$,

$$\therefore \frac{4}{x} - x = 3,$$

解得: $x = 1$ (负值舍去), 即 $AE = 1$;

当点 E 在线段 AM 的延长线上时, 如图 4 所示,



同理可得 $\triangle BOD \sim \triangle CND'$,

$$\therefore \frac{BO}{CN} = \frac{BD}{CD'}, \text{ 即 } \frac{2}{2+AE-3} = \frac{AE}{AE+2},$$

解得: $AE = 4$,

综上, AE 的长为 1 或 4.

【点评】 此题属于相似形综合题, 涉及的知识有: 等边三角形的判定与性质, 直角三角形斜边上的中线性, 相似三角形的判定与性质, 利用了分类讨论的思想, 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解本题的关键.