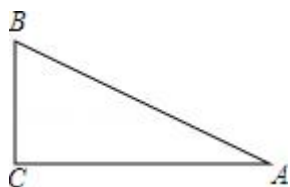


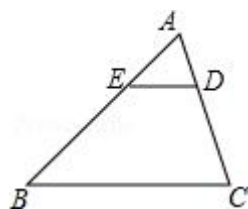
2016 年上海市宝山区中考数学一模试卷

一.选择题

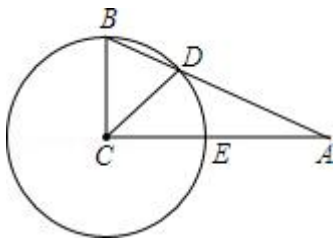
1. (2 分) 如图, 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=1$, $\tan A=\frac{1}{2}$, 下列判断正确的是 ()



- A. $\angle A=30^\circ$ B. $AC=\frac{1}{2}$ C. $AB=2$ D. $AC=2$
2. (2 分) 抛物线 $y=-4x^2+5$ 的开口方向 ()
- A. 向上 B. 向下 C. 向左 D. 向右
3. (2 分) 如图, D、E 在 $\triangle ABC$ 的边上, 如果 $ED \parallel BC$, $AE:BE=1:2$, $BC=6$, 那么 $\overrightarrow{DE}$ 的模为 ()

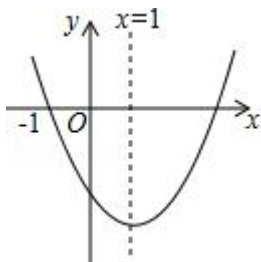


- A. -2 B. -3 C. 2 D. 3
4. (2 分) 已知 $\odot O$ 是以坐标原点 O 为圆心, 5 为半径的圆, 点 M 的坐标为 $(-3, 4)$, 则点 M 与 $\odot O$ 的位置关系为 ()
- A. M 在 $\odot O$ 上 B. M 在 $\odot O$ 内
- C. M 在 $\odot O$ 外 D. M 在 $\odot O$ 右上方
5. (2 分) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=26^\circ$, 以点 C 为圆心, BC 为半径的圆分别交 AB 、 AC 于点 D 、点 E , 则弧 BD 的度数为 ()



- A. 26° B. 64° C. 52° D. 128°

6. (2分) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 则下列结论中正确的是 ()



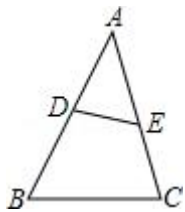
- A. $ac > 0$ B. 当 $x > -1$ 时, $y < 0$
C. $b=2a$ D. $9a+3b+c=0$

二.填空题

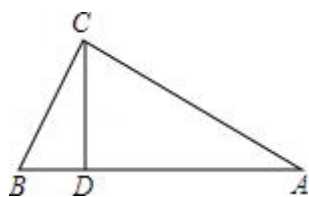
7. (5分) 如果: $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, 那么: $\frac{a-b}{b} =$ _____.

8. (5分) 两个相似比为 1:4 的相似三角形的一组对应边上的中线比为_____.

9. (5分) 如图, D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点, 则使 $\triangle AED \sim \triangle ABC$ 的条件是_____.

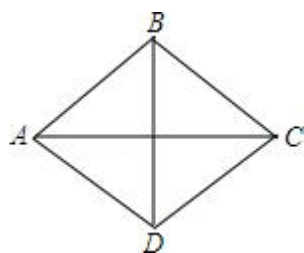


10. (5分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若 $CD \perp AB$ 于 D, 且 $BD=4$, $AD=9$, 则 $CD=$ _____.



11. (5分) 计算: $2(3\vec{a}+4\vec{b}) - 5\vec{a} =$ _____.

12. (5分) 如图, 菱形 ABCD 的边长为 10, $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$, 则对角线 AC 的长为_____.



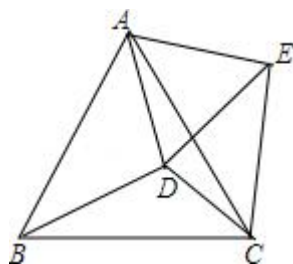
13. (5分) 抛物线 $y = -2(x-3)^2 + 4$ 的顶点坐标是_____.

14. (5分) 若 A (1, 2), B (3, 2), C (0, 5), D (m, 5) 是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 图象上的四点, 则 $m =$ _____.

15. (5分) 已知 A (4, y_1)、B (-4, y_2) 是抛物线 $y = (x+3)^2 - 2$ 的图象上两点, 则 y_1 _____ y_2 .

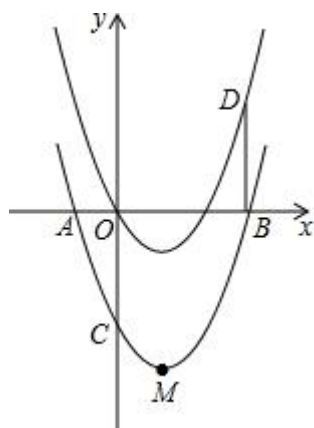
16. (5分) 已知 $\odot O$ 中一条长为 24 的弦的弦心距为 5, 则此圆的半径长为_____.

17. (5分) 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 内有一点 D, $AD=5$, $BD=6$, $CD=4$, 将 $\triangle ABD$ 绕 A 点逆时针旋转, 使 AB 与 AC 重合, 点 D 旋转至点 E, 则 $\angle CDE$ 的正弦值为_____.



18. (5分) 如图, 抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 交 x 轴于 A (-1, 0)、B (3, 0), 交 y

轴于 $C(0, -3)$, M 是抛物线的顶点, 现将抛物线沿平行于 y 轴的方向向上平移三个单位, 则曲线 CMB 在平移过程中扫过的面积为_____ (面积单位).



三.解答题 (8+8+8+8+10+10+12+14)

19. (8 分) 计算: $\frac{\tan 45^\circ}{3\tan 30^\circ - 2\sin 45^\circ} - \frac{\cos^2 30^\circ}{\cot 30^\circ}$.

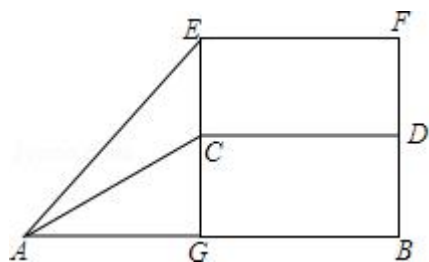
20. (8 分) 已知某二次函数的对称轴平行于 y 轴, 图象顶点为 $A(1, 0)$, 且与 y 轴交于点 $B(0, 1)$

(1) 求该二次函数的解析式;

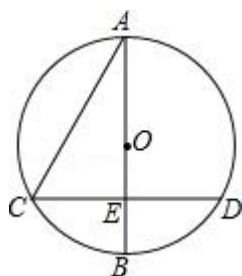
(2) 设 C 为该二次函数图象上横坐标为 2 的点, 记 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$.

21. (8 分) 如图是某个大型商场的自动扶梯侧面示意图, 已知自动扶梯 AC 的坡度为 1:2, AC 的长度为 $5\sqrt{5}$ 米, AB 为底楼地面, CD 为二楼侧面, EF 为二楼楼顶, 当然有 $EF \parallel AB \parallel CD$, E 为自动扶梯 AC 的最高端 C 的正上方, 过 C 的直线 $EG \perp AB$ 于 G , 在自动扶梯的底端 A 测得 E 的仰角为 42° , 求该商场二楼的楼高 CE .

(参考数据: $\sin 42^\circ = \frac{2}{3}$, $\cos 42^\circ = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan 42^\circ = \frac{2\sqrt{5}}{5}$)

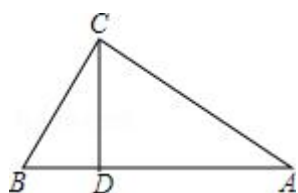


22. (8 分) 如图, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 与弦 CD 相交于点 E , 若 $AC=2\sqrt{3}$, $AE=3$, $CE=\sqrt{3}$, 求弧 BD 的长度. (保留 π)



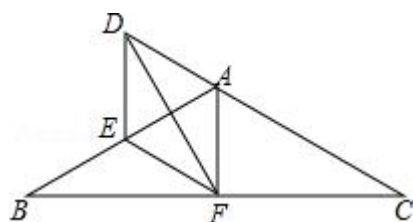
23. (10 分) 如图, D 为 $\triangle ABC$ 边 AB 上一点, 且 CD 分 $\triangle ABC$ 为两个相似比为 $1:\sqrt{3}$ 的一对相似三角形; (不妨如图假设左小右大), 求:

- (1) $\triangle BCD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积比;
- (2) $\triangle ABC$ 的各内角度数.



24. (10 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=6$, F 为 BC 的中点, D 为 CA 延长线上一点, $\angle DFE=\angle B$.

- (1) 求证: $\frac{CD}{DF} = \frac{BF}{EF}$;
- (2) 若 $EF \parallel CD$, 求 DE 的长度.

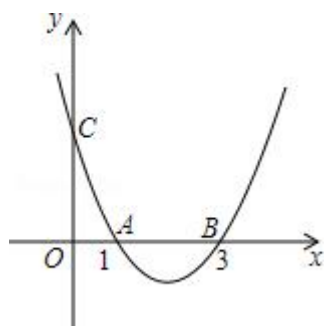


25. (12 分) (1) 已知二次函数 $y = (x - 1)(x - 3)$ 的图象如图, 请根据图象直接写出该二次函数图象经过怎样的左右平移, 新图象通过坐标原点?

(2) 在关于二次函数图象的研究中, 秦篆晔同学发现抛物线 $y = ax^2 - bx + c$ ($a \neq 0$) 和抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 关于 y 轴对称, 基于协作共享, 秦同学将其发现口诀化“ a 、 c 不变, b 相反”供大家分享, 而在旁边补笔记的胡庄韵同学听成了“ a 、 c 相反, b 不变”, 并按此法误写, 然而按此误写的抛物线恰巧与原抛物线也对称, 请你写出小胡同学所写的与原抛物 $y = (x - 1)(x - 3)$ 的对称图形的解析式, 并研究其与原抛物线的具体对称情况;

(3) 抛物线 $y = (x - 1)(x - 3)$ 与 x 轴从左到右交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于点 C , M 是其对称轴上一点, 点 N 在 x 轴上, 当点 N 满足怎样的条件, 以点 N 、 B 、 C 为顶点的三角形与 $\triangle MAB$ 有可能相似, 请写出所有满足条件的点 N 的坐标;

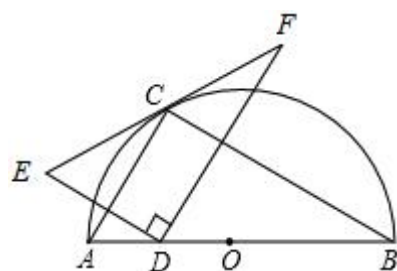
(4) E 、 F 为抛物线 $y = (x - 1)(x - 3)$ 上两点, 且 E 、 F 关于 $D(\frac{3}{2}, 0)$ 对称, 请直接写出 E 、 F 两点的坐标.



26. (14 分) 如图点 C 在以 AB 为直径的半圆的圆周上, 若 $AB=4$, $\angle ABC=30^\circ$, D 为边 AB 上一动点, 点 E 和 D 关于 AC 对称, 当 D 与 A 重合时, F 为 EC 的延长线上满足 $CF=EC$ 的点, 当 D 与 A 不重合时, F 为 EC 的延长线与过 D 且垂直于 DE 的直线的交点,

(1) 当 D 与 A 不重合时, $CF=EC$ 的结论是否成立? 试证明你的判断.

- (2) 设 $AD=x$, $EF=y$ 求 y 关于 x 的函数及其定义域;
- (3) 如存在 E 或 F 恰好落在弧 AC 或弧 BC 上时, 求出此时 AD 的值; 如不存在, 则请说明理由.
- (4) 请直接写出当 D 从 A 运动到 B 时, 线段 EF 扫过的面积.

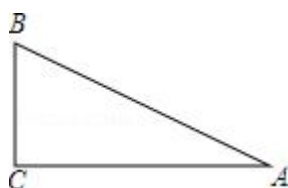


2016 年上海市宝山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一.选择题

1. (2 分) 如图, 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=1$, $\tan A=\frac{1}{2}$, 下列判断正确的是 ()



- A. $\angle A=30^\circ$ B. $AC=\frac{1}{2}$ C. $AB=2$ D. $AC=2$

【考点】T7: 解直角三角形.

【专题】2B: 探究型.

【分析】根据在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=1$, $\tan A=\frac{1}{2}$, 可以得到 AC 、 BC 的长, 同时 $\tan A=\frac{1}{2}$, $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 可以判断 $\angle A$ 是否等于 30° , 从而可以得到问题的答案.

【解答】解: $\because$ 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=1$, $\tan A=\frac{1}{2}$, $\tan A=\frac{BC}{AC}$,

$$\therefore AC=\frac{BC}{\tan A}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,$$

$$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},$$

$$\because \tan A=\frac{1}{2}, \tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle A \neq 30^\circ,$$

故选: D.

【点评】本题考查解直角三角形, 解题的关键是明确题意, 找出各边之间的关系, 进而判断选项是否正确.

2. (2 分) 抛物线 $y=-4x^2+5$ 的开口方向 ()

- A. 向上 B. 向下 C. 向左 D. 向右

【考点】H3: 二次函数的性质.

【专题】2B: 探究型.

【分析】根据抛物线 $y = -4x^2 + 5$, 可知二次项系数是 -4 , 从而可以得到该函数的开口方向.

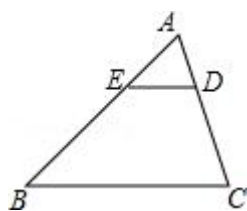
【解答】解: $\because$ 抛物线 $y = -4x^2 + 5$, $-4 < 0$,

$\therefore$ 该抛物线的开口向下,

故选: B.

【点评】本题考查二次函数的性质, 解题的关键是由二次项系数可以判断抛物线的开口方向.

3. (2 分) 如图, D、E 在 $\triangle ABC$ 的边上, 如果 $ED \parallel BC$, $AE: BE = 1: 2$, $BC = 6$, 那么 $\overrightarrow{DE}$ 的模为 ()



- A. -2 B. -3 C. 2 D. 3

【考点】LM: *平面向量.

【分析】由 $ED \parallel BC$, 可证得 $\triangle AED \sim \triangle ABC$, 然后根据相似三角形的对应边成比例, 求得 $ED: BC = 1: 3$, 则可得 $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 又由 $BC = 6$, 即可求得 $\overrightarrow{DE}$ 的模.

【解答】解: $\because ED \parallel BC$,

$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC$,

$\therefore ED: BC = AE: AB$,

$\because AE: BE = 1: 2$,

$$\therefore AE: AB=1: 3,$$

$$\therefore ED: BC=1: 3,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},$$

$$\therefore BC=6,$$

$$\therefore |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{BC}| = 2.$$

故选：C.

【点评】此题考查了平面向量的知识以及相似三角形的判定与性质. 注意利用相似三角形的性质, 求得 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ 是解此题的关键.

4. (2 分) 已知 $\odot O$ 是以坐标原点 O 为圆心, 5 为半径的圆, 点 M 的坐标为 $(-3, 4)$, 则点 M 与 $\odot O$ 的位置关系为 ()

A. M 在 $\odot O$ 上

B. M 在 $\odot O$ 内

C. M 在 $\odot O$ 外

D. M 在 $\odot O$ 右上方

【考点】D5: 坐标与图形性质; M8: 点与圆的位置关系.

【分析】根据勾股定理, 可得 OM 的长, 根据点与圆心的距离 d , 则 $d > r$ 时, 点在圆外; 当 $d = r$ 时, 点在圆上; 当 $d < r$ 时, 点在圆内.

【解答】解: $OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$

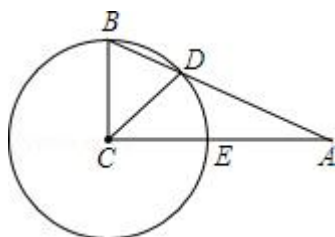
$$OM = r = 5.$$

故选: A.

【点评】本题考查了对点与圆的位置关系的判断. 关键要记住若半径为 r , 点到圆心的距离为 d , 则有: 当 $d > r$ 时, 点在圆外; 当 $d = r$ 时, 点在圆上, 当 $d < r$ 时, 点在圆内.

5. (2 分) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 26^\circ$, 以点 C 为圆心, BC 为

半径的圆分别交 AB 、 AC 于点 D 、点 E ，则弧 BD 的度数为 ()



- A. 26° B. 64° C. 52° D. 128°

【考点】 M4: 圆心角、弧、弦的关系.

【分析】 先利用互余计算出 $\angle B=64^\circ$ ，再利用半径相等和等腰三角形的性质得到 $\angle CDB=\angle B=64^\circ$ ，则根据三角形内角和定理可计算出 $\angle BCD$ ，然后根据圆心角的度数等于它所对弧的度数求解.

【解答】 解: $\because \angle C=90^\circ$, $\angle A=26^\circ$,

$$\therefore \angle B=64^\circ,$$

$$\because CB=CD,$$

$$\therefore \angle CDB=\angle B=64^\circ,$$

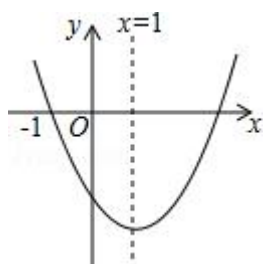
$$\therefore \angle BCD=180^\circ - 64^\circ - 64^\circ=52^\circ,$$

$$\therefore \widehat{BD} \text{ 的度数为 } 52^\circ.$$

故选: C.

【点评】 本题考查了圆心角、弧、弦的关系: 在同圆或等圆中, 如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等, 那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

6. (2 分) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 则下列结论中正确的是 ()



A. $ac > 0$

B. 当 $x > -1$ 时, $y < 0$

C. $b=2a$

D. $9a+3b+c=0$

【考点】H4: 二次函数图象与系数的关系.

【分析】A、由抛物线的开口方向, 抛物线与 y 轴交点的位置即可确定 a 、 c 的符号;

B、根据抛物线与 x 轴的交点, 可得出 $y < 0$ 时, x 的取值范围;

C、根据抛物线的对称轴直接得出答案;

D、根据抛物线与 x 轴的交点和抛物线的对称轴, 即可得出抛物线与 x 轴的另一个交点, 然后把 $x=3$ 代入方程即可求得相应的 y 的符号.

【解答】解: A、由抛物线的开口向上, 得 $a > 0$, 抛物线与 y 轴负半轴相交, 得 $c < 0$, 则 $ac < 0$, 故本选项错误;

B、根据抛物线与 x 轴的交点, 可得出 $y < 0$ 时, $-1 < x < 3$, 故本选项错误;

C、根据抛物线的对称轴 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 直接得出 $b = -2a$, 故本选项错误;

D、根据抛物线与 x 轴的一个交点 $(-1, 0)$ 和抛物线的对称轴 $x=1$, 即可得出抛物线与 x 轴的另一个交点 $(3, 0)$, 然后把 $x=3$ 代入方程即 $9a+3b+c=0$, 故本选项正确;

故选: D.

【点评】本题考查了二次函数图象与系数的关系. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$)

系数符号由抛物线开口方向、对称轴、抛物线与 y 轴的交点抛物线与 x 轴交点的个数确定.

二.填空题

7. (5 分) 如果: $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, 那么: $\frac{a-b}{b} = \frac{1}{2}$.

【考点】65: 分式的基本性质.

【专题】11：计算题.

【分析】由已知可知， $2a=3b$ ，再代入所求式进行化简.

【解答】解： $\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$,

$$\therefore 2a=3b,$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{2a-2b}{2b} = \frac{3b-2b}{2b} = \frac{1}{2}.$$

故答案为 $\frac{1}{2}$.

【点评】本题的关键是找到 a ， b 的关系.

8. (5 分) 两个相似比为 1: 4 的相似三角形的一组对应边上的中线比为 1: 4.

【考点】S7: 相似三角形的性质.

【分析】根据相似三角形对应中线的比等于相似比解答即可.

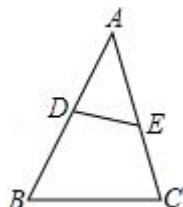
【解答】解： $\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 1: 4,

$\therefore$ 这两个相似三角形的一组对应边上的中线比为 1: 4,

故答案为: 1: 4.

【点评】本题考查的是相似三角形的性质，掌握相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比是解题的关键.

9. (5 分) 如图， D 、 E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上的点，则使 $\triangle AED \sim \triangle ABC$ 的条件是 $\angle AED = \angle B$ 或 $\angle ADE = \angle C$ 或 $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$.



【考点】S8: 相似三角形的判定.

【专题】16: 压轴题; 26: 开放型.

【分析】由本题图形相似已经有一个公共角，再找一组对应角相等或公共角的两边对应成比例即可.

【解答】解： $\because \angle A = \angle A$ ，当 $\angle AED = \angle B$ ，

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC,$$

$$\because \angle A = \angle A, \text{ 当 } \angle ADE = \angle C,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC,$$

$$\because \angle A = \angle A, \text{ 当 } \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB},$$

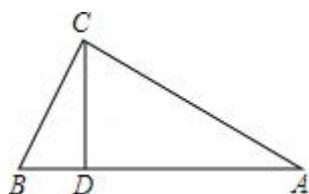
$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC,$$

故答案为： $\angle AED = \angle B$ 或 $\angle ADE = \angle C$ 或 $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$.

【点评】此题主要考查学生对相似三角形的判定方法的掌握情况.

10. (5 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $CD \perp AB$ 于 D ，且 $BD = 4$ ， $AD = 9$ ，

则 $CD = \underline{6}$.



【考点】SE：射影定理.

【分析】根据射影定理得到等积式，代入已知数据计算即可.

【解答】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，

$$\therefore CD^2 = BD \cdot AD = 36,$$

$$\therefore CD = 6.$$

故答案为：6.

【点评】本题考查的是射影定理的应用，掌握直角三角形中，斜边上的高是两直角边在斜边上射影的比例中项是解题的关键.

11. (5 分) 计算： $2(3\vec{a} + 4\vec{b}) - 5\vec{a} = \underline{\vec{a} + 8\vec{b}}$.

【考点】LM: *平面向量.

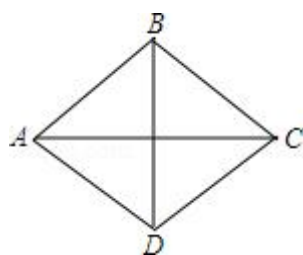
【分析】直接利用平面向量的加减运算法则求解即可求得答案.

【解答】解: $2(3\vec{a}+4\vec{b})-5\vec{a}=6\vec{a}+8\vec{b}-5\vec{a}=\vec{a}+8\vec{b}$.

故答案为: $\vec{a}+8\vec{b}$.

【点评】此题考查了平面向量的运算法则. 注意掌握去括号法则是解此题的关键.

12. (5 分) 如图, 菱形 ABCD 的边长为 10, $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$, 则对角线 AC 的长为 16.



【考点】L8: 菱形的性质.

【分析】根据菱形的性质可知 $AC \perp BD$, 解三角形求出 BO 的长, 利用勾股定理求出 AO 的长, 即可求出 AC 的长.

【解答】解: 如图所示:

$\because$ 四边形 ABCD 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, $AO=CO$,

在 $Rt\triangle AOB$ 中, $\because AB=10$, $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$,

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{BO}{AB} = \frac{3}{5},$$

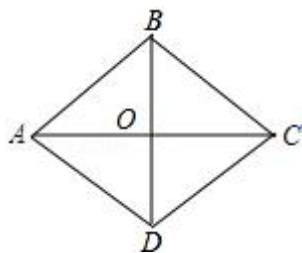
$$\therefore BO = \frac{3}{5} \times 10 = 6,$$

$$\therefore AB^2 = OB^2 + AO^2,$$

$$\therefore AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\therefore AC = 2AO = 16.$$

故答案为: 16.



【点评】 本题主要考查了菱形的性质、勾股定理、解直角三角形的知识；解答本题的关键是掌握菱形的对角线互相垂直平分，此题难度不大.

13. (5 分) 抛物线 $y = -2(x - 3)^2 + 4$ 的顶点坐标是 (3, 4).

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【分析】 已知解析式为顶点式，可直接根据顶点式的坐标特点，求顶点坐标，从而得出对称轴.

【解答】 解: $y = -2(x - 3)^2 + 4$ 是抛物线的顶点式，

根据顶点式的坐标特点可知，顶点坐标为 (3, 4).

故答案为: (3, 4).

【点评】 此题主要考查了二次函数的性质，关键是熟记: 顶点式 $y = a(x - h)^2 + k$ ，顶点坐标是 (h, k)，对称轴是 $x = h$.

14. (5 分) 若 A (1, 2), B (3, 2), C (0, 5), D (m, 5) 是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 图象上的四点，则 $m =$ 4.

【考点】 H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 根据对称点 A (1, 2), B (3, 2) 得到抛物线的对称轴为直线 $x = 2$ ，然后根据对称点 C (0, 5), D (m, 5) 得出 $\frac{0+m}{2} = 2$ ，即可求得 m 的值.

【解答】 解: $\because$ A (1, 2), B (3, 2) 是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 图象上的点，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{1+3}{2} = 2$,

$\because$ C (0, 5), D (m, 5) 是对称点，

$\therefore \frac{0+m}{2} = 2$,

解得 $m=4$

故答案为 4.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：根据对称点 (x_1, m) 、 (x_2, m) 得到抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

15. (5 分) 已知 A $(4, y_1)$ 、B $(-4, y_2)$ 是抛物线 $y = (x+3)^2 - 2$ 的图象上两点，则 y_1 > y_2 .

【考点】 H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 先求得函数 $y = (x+3)^2 - 2$ 的对称轴为 $x = -3$ ，再判断 A $(4, y_1)$ 、B $(-4, y_2)$ 离对称轴的远近，从而判断出 y_1 与 y_2 的大小关系.

【解答】 解：由 $y = (x+3)^2 - 2$ 可知抛物线的对称轴为直线 $x = -3$,

$\therefore$ 抛物线开口向上，而点 A $(4, y_1)$ 到对称轴的距离比 B $(-4, y_2)$ 远，

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为 >.

【点评】 此题主要考查了二次函数图象上点的特征，利用已知解析式得出对称轴进而利用二次函数增减性得出是解题关键.

16. (5 分) 已知 $\odot O$ 中一条长为 24 的弦的弦心距为 5, 则此圆的半径长为 13.

【考点】 KQ: 勾股定理; M2: 垂径定理.

【分析】 利用垂径定理得到 C 为 AB 的中点，由 AB 的长求出 AC 的长，在直角三角形 AOC 中，由 AC 与 OC 的长，利用勾股定理求出 OA 的长即可.

【解答】 解：如图所示，

$\therefore OC \perp AB$,

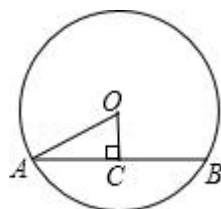
$\therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB = 12$,

在 $Rt\triangle AOC$ 中， $AC=12$ ， $OC=5$,

根据勾股定理得： $AO = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$,

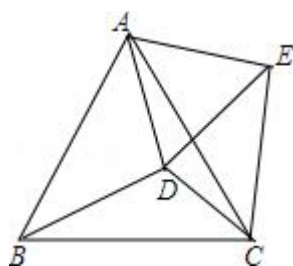
即此圆的半径长为 13;

故答案为： 13.



【点评】 此题考查了垂径定理以及勾股定理；熟练掌握垂径定理，由勾股定理求出 AO 是解本题的关键.

17. (5 分) 如图，在等边 $\triangle ABC$ 内有一点 D， $AD=5$ ， $BD=6$ ， $CD=4$ ， 将 $\triangle ABD$ 绕 A 点逆时针旋转， 使 AB 与 AC 重合， 点 D 旋转至点 E， 则 $\angle CDE$ 的正弦值为 $\frac{3\sqrt{7}}{8}$.



【考点】 R2： 旋转的性质.

【专题】 11： 计算题.

【分析】 先根据等边三角形的性质得 $AB=AC$ ， $\angle BAC=60^\circ$ ， 再根据旋转的性质得 $\angle DAE=\angle BAC=60^\circ$ ， $AD=AE$ ， $CE=BD=6$ ， 于是可判断 $\triangle ADE$ 为等边三角形， 所以 $DE=AD=5$ ， 作 $CH \perp DE$ 于 H， 如图， 设 $DH=x$ ， 则 $HE=DE - DH=5 - x$

， 利用勾股定理得到 $4^2 - x^2 = 6^2 - (5 - x)^2$ ， 解得 $x = \frac{1}{2}$ ， 则可计算出 $CH = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ ， 然后根据正弦的定义求解.

【解答】 解： $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AB=AC$, $\angle BAC=60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 绕 A 点逆时针旋转, 使 AB 与 AC 重合, 点 D 旋转至点 E ,

$\therefore \angle DAE=\angle BAC=60^\circ$, $AD=AE$, $CE=BD=6$,

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形,

$\therefore DE=AD=5$,

作 $CH \perp DE$ 于 H , 如图, 设 $DH=x$, 则 $HE=DE-DH=5-x$

在 $Rt\triangle CDH$ 中, $CH^2=CD^2-DH^2=4^2-x^2$,

在 $Rt\triangle CEH$ 中, $CH^2=CE^2-EH^2=6^2-(5-x)^2$,

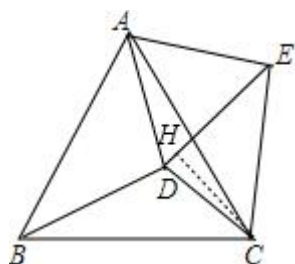
$\therefore 4^2-x^2=6^2-(5-x)^2$, 解得 $x=\frac{1}{2}$,

在 $Rt\triangle CDH$ 中, $CH=\sqrt{4^2-(\frac{1}{2})^2}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$,

$\therefore \sin \angle CDH=\frac{CH}{CD}=\frac{\frac{3\sqrt{7}}{2}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$,

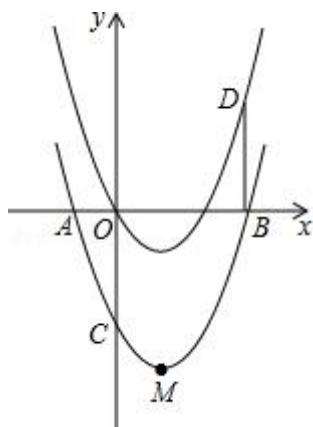
即 $\sin \angle CDH=\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

故答案为 $\frac{3\sqrt{7}}{8}$.



【点评】 本题考查了旋转的性质: 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角; 旋转前、后的图形全等. 解决本题的关键是求 C 点到 DE 的距离.

18. (5 分) 如图, 抛物线 $y=x^2-2x-3$ 交 x 轴于 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$, 交 y 轴于 $C(0, -3)$, M 是抛物线的顶点, 现将抛物线沿平行于 y 轴的方向向上平移三个单位, 则曲线 CMB 在平移过程中扫过的面积为 9 (面积单位).



【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【分析】由图象可知曲线 CMB 在平移过程中扫过的面积=平行四边形 OCB D 的面积，求得四边形 OCB D 的面积即可.

【解答】解：∵ 曲线 CMB 在平移过程中扫过的面积=平行四边形 OCB D 的面积，

$$\therefore \text{曲线 CMB 在平移过程中扫过的面积} = \frac{1}{2}OC \cdot OB + \frac{1}{2}OC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 9,$$

故答案为 9.

【点评】题考查了二次函数图象与几何变换，由图象可知曲线 CMB 在平移过程中扫过的面积=平行四边形 OCB D 的面积是解题的关键.

三.解答题 (8+8+8+8+10+10+12+14)

19. (8 分) 计算: $\frac{\tan 45^\circ}{3 \tan 30^\circ - 2 \sin 45^\circ} - \frac{\cos^2 30^\circ}{\cot 30^\circ}.$

【考点】T5：特殊角的三角函数值.

【分析】将特殊角的三角函数值代入求解.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= \frac{1}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \sqrt{2}.$$

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值，解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值.

20. (8 分) 已知某二次函数的对称轴平行于 y 轴，图象顶点为 $A(1, 0)$ ，且与 y 轴交于点 $B(0, 1)$

(1) 求该二次函数的解析式；

(2) 设 C 为该二次函数图象上横坐标为 2 的点，记 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ，试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OC}$.

【考点】 H8: 待定系数法求二次函数解析式；LM: *平面向量.

【分析】 (1) 由图象顶点为 $A(1, 0)$ ，首先可设该二次函数的解析式为： $y = a$

$(x - 1)^2$ ，又由与 y 轴交于点 $B(0, 1)$ ，可利用待定系数法求得答案；

(2) 首先求得点 C 的坐标，然后根据题意作出图形，易求得 $\overrightarrow{BC}$ ，然后由三角形法则，求得答案.

【解答】 解：(1) 设该二次函数的解析式为： $y = a(x - 1)^2$ ，

$\therefore$ 与 y 轴交于点 $B(0, 1)$ ，

$\therefore a = 1$ ，

$\therefore$ 该二次函数的解析式为： $y = (x - 1)^2$ ；

(2) $\therefore C$ 为该二次函数图象上横坐标为 2 的点，

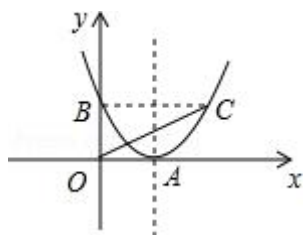
$\therefore y = (2 - 1)^2 = 1$ ，

$\therefore C$ 点坐标为： $(2, 1)$ ，

$\therefore BC \parallel x$ 轴，

$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OA} = 2\vec{a}$ ，

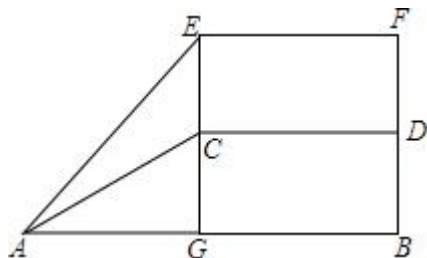
$$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + 2\vec{a}.$$



【点评】 此题考查了平面向量的知识、待定系数法求函数的解析式以及点与二次函数的关系. 注意结合题意画出图形, 利用图形求解是关键.

21. (8 分) 如图是某个大型商场的自动扶梯侧面示意图, 已知自动扶梯 AC 的坡度为 1: 2, AC 的长度为 $5\sqrt{5}$ 米, AB 为底楼地面, CD 为二楼侧面, EF 为二楼楼顶, 当然有 $EF \parallel AB \parallel CD$, E 为自动扶梯 AC 的最高端 C 的正上方, 过 C 的直线 $EG \perp AB$ 于 G, 在自动扶梯的底端 A 测得 E 的仰角为 42° , 求该商场二楼的楼高 CE.

(参考数据: $\sin 42^\circ = \frac{2}{3}$, $\cos 42^\circ = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan 42^\circ = \frac{2\sqrt{5}}{5}$)



【考点】 TA: 解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题.

【分析】 根据 AC 的坡度得出 $AG=2CG$, 由勾股定理得出 $CG^2+AG^2=AC^2$, 求出 CG、AG, 再由三角函数得出 EG, 即可得出结果.

【解答】 解: 根据题意得: $AG=2CG$,

$$\therefore \angle AGE=90^\circ,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得: } CG^2+AG^2=AC^2,$$

$$\text{即 } CG^2+(2CG)^2=(5\sqrt{5})^2,$$

解得：CG=5（米），

∴ AG=10 米，

$$\therefore \tan \angle EAG = \frac{EG}{AG},$$

∴ EG=AG•tan42°，

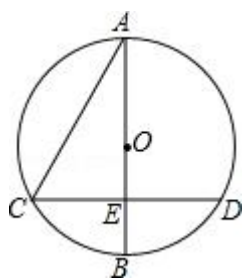
$$\therefore CE=EG - CG=AG \cdot \tan 42^\circ - CG=10 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} - 5=4\sqrt{5} - 5 \text{（米）}；$$

答：该商场二楼的楼高 CE 为 $(4\sqrt{5} - 5)$ 米.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角、坡度、勾股定理、三角函数；

由勾股定理求出 AG 是解决问题的关键.

22. (8 分) 如图，以 AB 为直径的⊙O 与弦 CD 相交于点 E，若 $AC=2\sqrt{3}$ ， $AE=3$ ， $CE=\sqrt{3}$ ，求弧 BD 的长度.（保留π）



【考点】 KQ：勾股定理；M2：垂径定理；MN：弧长的计算.

【分析】 连接 OC，先根据勾股定理的逆定理得出△ACE 是直角三角形，再由垂径定理得出 CE=DE， $\widehat{BC}=\widehat{BD}$ ，由三角函数求出 $\angle A=30^\circ$ ，由圆周角定理求出 $\angle BOC$ ，由弧长公式得出 $\widehat{BD}$ 的长度= $\widehat{BC}$ 的长度= $\frac{2}{3}\pi$ 即可.

【解答】 解：∵ $AC=2\sqrt{3}$ ， $AE=3$ ， $CE=\sqrt{3}$ ，

$$\therefore AE^2 + CE^2 = AC^2,$$

∴ △ACE 是直角三角形， $\angle AEC=90^\circ$ ，

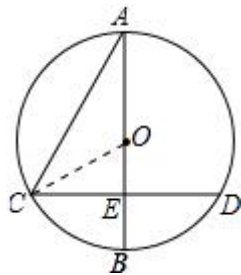
$$\therefore CD \perp AB, \sin \angle A = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{2},$$

∴ $\widehat{BC}=\widehat{BD}$ ， $\angle A=30^\circ$ ，

连接 OC，如图所示：

$$\text{则 } \angle BOC = 2\angle A = 60^\circ, \quad OC = \frac{CE}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,$$

$$\therefore \widehat{BD} \text{ 的长度} = \widehat{BC} \text{ 的长度} = \frac{60\pi \times 2}{180} = \frac{2}{3}\pi.$$



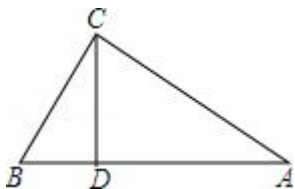
【点评】 本题考查的是垂径定理、勾股定理的逆定理、三角函数、弧长公式等知识；

熟练掌握勾股定理的逆定理，由垂径定理得出 $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ 是解决问题的关键。

23. (10 分) 如图，D 为 $\triangle ABC$ 边 AB 上一点，且 CD 分 $\triangle ABC$ 为两个相似比

为 $1: \sqrt{3}$ 的一对相似三角形；(不妨如图假设左小右大)，求：

- (1) $\triangle BCD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积比；
- (2) $\triangle ABC$ 的各内角度数.



【考点】 S7：相似三角形的性质；T7：解直角三角形.

【分析】 (1) 根据相似三角形面积的比等于相似比的平方解答；

(2) 根据锐角三角函数的概念解答即可.

【解答】 解：(1) $\because \triangle BCD$ 和 $\triangle CAD$ 的相似比为 $1: \sqrt{3}$,

$\therefore \triangle BCD$ 和 $\triangle CAD$ 的面积比为 $1: 3$;

(2) $\because \triangle BCD \sim \triangle CAD$,

$\therefore \angle BDC = \angle ADC = 90^\circ$,

$$\tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\tan B = \frac{CD}{BD} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

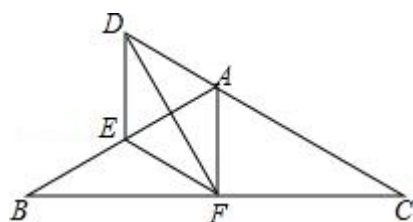
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

【点评】 本题考查的是相似三角形的性质，掌握相似三角形面积的比等于相似比的平方以及锐角三角函数的概念是解题的关键.

24. (10 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=6$ ， F 为 BC 的中点， D 为 CA 延长线上一点， $\angle DFE = \angle B$.

(1) 求证： $\frac{CD}{DF} = \frac{BF}{EF}$;

(2) 若 $EF \parallel CD$ ，求 DE 的长度.



【考点】 S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 根据外角的性质得到 $\angle EFB = \angle FDC$ ，由等腰三角形的性质得到 $\angle C = \angle B$ ，证得 $\triangle CDF \sim \triangle BFE$ ，根据相似三角形的性质得到 $\frac{CD}{DF} = \frac{BF}{EF}$;

(2) 根据平行线的性质得到 $\angle EFD = \angle FDC$ ， $\angle C = \angle EFB$ ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle C$ ，等量代换得到 $\angle FDC = \angle C$ ，推出 $DF = CF$ ，得到 $BF = DF$ ，推出 $\triangle DFE \cong \triangle BFE$ ，根据全等三角形的性质得到结论.

【解答】 (1) 证明： $\because \angle DFB = \angle DFE + \angle EFB = \angle C + \angle FDC$,

$$\therefore \angle EFB = \angle FDC,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle C = \angle B,$$

$$\therefore \triangle CDF \sim \triangle BFE,$$

$$\therefore \frac{CD}{DF} = \frac{BF}{EF};$$

$$(2) \text{ 解: } \because EF \parallel CD,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle FDC, \quad \angle C = \angle EFB,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle FDC = \angle C,$$

$$\therefore DF = CF,$$

$$\therefore BF = DF,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC = 3, \quad \angle DFE = \angle BFE,$$

在 $\triangle DFE$ 与 $\triangle BFE$ 中,

$$\begin{cases} DF = BF \\ \angle DFE = \angle BFE, \\ EF = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DFE \cong \triangle BFE,$$

$$\therefore DE = BE = 3.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，平行线的性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

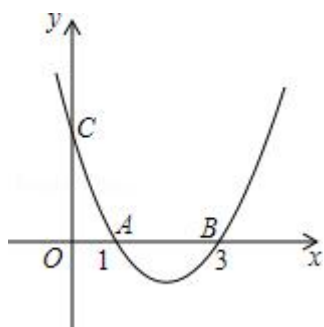
25. (12 分) (1) 已知二次函数 $y = (x - 1)(x - 3)$ 的图象如图，请根据图象直接写出该二次函数图象经过怎样的左右平移，新图象通过坐标原点？

(2) 在关于二次函数图象的研究中，秦篆晔同学发现抛物线 $y = ax^2 - bx + c$ ($a \neq 0$) 和抛物线 $y = ax^2 - bx + c$ ($a \neq 0$) 关于 y 轴对称，基于协作共享，秦同学将其发现口诀化“ a 、 c 不变， b 相反”供大家分享，而在旁边补笔记的胡庄韵

同学听成了“**a、c 相反，b 不变**”，并按此法误写，然而按此误写的抛物线恰巧与原抛物线也对称，请你写出小胡同学所写的与原抛物 $y = (x - 1)(x - 3)$ 的对称图形的解析式，并研究其与原抛物线的具体对称情况；

(3) 抛物线 $y = (x - 1)(x - 3)$ 与 x 轴从左到右交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ， M 是其对称轴上一点，点 N 在 x 轴上，当点 N 满足怎样的条件，以点 N 、 B 、 C 为顶点的三角形与 $\triangle MAB$ 有可能相似，请写出所有满足条件的点 N 的坐标；

(4) E 、 F 为抛物线 $y = (x - 1)(x - 3)$ 上两点，且 E 、 F 关于 $D(\frac{3}{2}, 0)$ 对称，请直接写出 E 、 F 两点的坐标.



【考点】 HF：二次函数综合题.

【分析】 (1) 首先求得抛物线与 x 轴的交点，即可求得平移的方向和距离；

(2) 根据“**a、c 相反，b 不变**”，即可求得对应的函数解析式，然后确定顶点即可判断；

(3) $\triangle MAB$ 中 M 是在抛物线的对称轴上，则 $\triangle MAB$ 为等腰三角形，则 $\triangle NBC$ 是等腰三角形，同时根据 $\angle OBC = 45^\circ$ ，即已知等腰 $\triangle NBC$ 的一个角的度数，据此即可讨论，求解；

(4) 设 E 的坐标是 $(a, a^2 - 4a + 3)$ ，由点 E 与 F 关于点 $D(\frac{3}{2}, 0)$ 对称，则可得 F 的坐标，然后根据点 E 和点 F 的纵坐标互为相反数即可列方程求解.

【解答】 解：(1) 二次函数 $y = (x - 1)(x - 3)$ 与 x 轴的交点是 $(1, 0)$ 和 $(3,$

0).

抛物线向左平移 1 个单位长度或 3 个单位长度即可使新图象经过坐标原点;

$$(2) y = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3.$$

$\therefore$ 小胡同学听成了 a 与 c 相反, b 不变.

$$\therefore y = -x^2 - 4x - 3 = -(x+2)^2 + 1, \text{ 顶点坐标是 } (-2, 1),$$

故与原抛物线关于原点对称;

(3) $\therefore \triangle MAB$ 中 M 是在抛物线的对称轴上,

$\therefore MA=MB$, 即 $\triangle MAB$ 为等腰三角形,

又 $\therefore \triangle MAB$ 与 $\triangle NBC$ 相似,

$\therefore \triangle NBC$ 是等腰三角形.

$\therefore N$ 在 x 轴上,

$\therefore \angle CBN = 45^\circ$ 或 135° .

当 $\angle CBN = 135^\circ$ 时, 即 N 点在 B 的右侧且 $BC=BN$, 则 N 的坐标是 $(3+3\sqrt{2}, 0)$;

当 $\angle CBN = 45^\circ$ 时, 即 N 在点 B 的左侧,

若 $\triangle MAB$ 的底角为 45° , 此时三角形为等腰直角三角形, 则 N 的坐标是 $(0, 0)$

或 $(-3, 0)$;

若 $\triangle MAB$ 的顶角是 45° 时, 在 $\triangle NBC$ 中, $BC=BN=3\sqrt{2}$, 则 N 的坐标是 $(3-3\sqrt{2}, 0)$;

(4) 设 E 的坐标是 $(a, a^2 - 4a + 3)$,

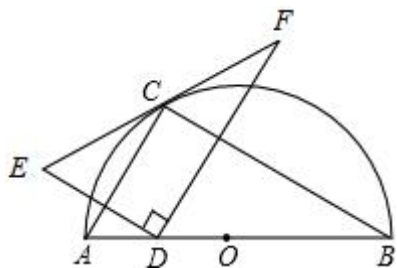
由点 E 与 F 关于点 $D(\frac{3}{2}, 0)$ 对称, 则可得 $F(3-a, a^2 - 2a)$,

$\therefore$ 点 E 和点 F 的纵坐标互为相反数, 即 $a^2 - 4a + 3 + a^2 - 2a = 0$,

$$\text{解得: } a_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}, a_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \text{ (舍去),}$$

【点评】 本题考查了二次函数与等腰三角形的性质，相似三角形的性质，正确理解 $\triangle NBC$ 是等腰三角形是本题的关键.

- (1) 当 D 与 A 不重合时, $CF=EC$ 的结论是否成立? 试证明你的判断.
- (2) 设 $AD=x$, $EF=y$ 求 y 关于 x 的函数及其定义域;
- (3) 如存在 E 或 F 恰好落在弧 AC 或弧 BC 上时, 求出此时 AD 的值; 如不存在, 则请说明理由.
- (4) 请直接写出当 D 从 A 运动到 B 时, 线段 EF 扫过的面积.



【分析】(1) 设 DE 交 AC 于 M , DF 交 BC 于 N . 由轴对称图形的性质可知 $EM=DM$, $ED \perp AC$, 然后可证明 $AC \parallel DF$, 由平行线分线成比例定理可知 $\frac{CE}{CF} = \frac{EM}{MD} = 1$;

第 29 页 (共 34 页)

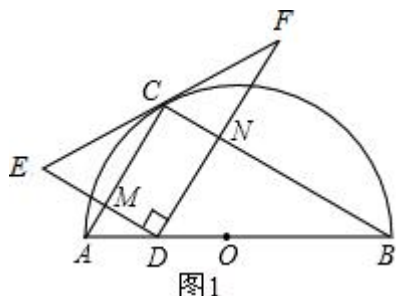
可求得 y 与 x 的函数关系式；②当 D 与 A 重合时， $y=2AC=4$ ；

(3) ①当点 E 在弧 AC 上时. 由题意可知 $\angle CAD=60^\circ$ ，由点 E 与点 D 关于 AC 对称可知： $\angle EAD=120^\circ$ ，故此点 E 不在弧 AC 上，故当且仅当点 D 与点 A 重合是，点 E 也与点 A 重合时，成立；②当点 F 在 $\widehat{BC}$ 上时，如图 3 所示，连接 BF 、 AF . 由题意可知 $\angle FDB=60^\circ$ ，由 (2) 可知 $DF=2DN$ ， $DB=2DN$ ，故此 $DF=DB$ ，从而可证明 $\triangle DFB$ 为等边三角形，于是得到 $DB=DF$ ，然后再证明 $AD=DF$ ，从而可知点 D 与点 O 重合，于是得到 $AD=\frac{1}{2}AB=2$ ；

(4) 由 (2) 可知 $\angle EAD=2\angle CAD=120^\circ$ ，故此点 E 运动的轨迹为一条线段，由 (3) 可知 $\angle FBD=60^\circ$ ，故此点 F 运动的轨迹也是一条线段，然后画出图形，最后利用三角形的面积公式即可求得答案.

【解答】 解：(1) 成立.

如图 1 所示：设 DE 交 AC 于 M ， DF 交 BC 于 N .



$\because$ 点 E 与点 D 关于 AC 对称，

$\therefore EM=DM$ ， $ED \perp AC$.

又 $\because DE \perp DF$ ，

$\therefore AC \parallel DF$.

$\therefore \frac{CE}{CF} = \frac{EM}{MD} = 1$.

$\therefore CE=CF$.

(2) ①当 D 与 A 不重合时.

$$\therefore \angle CMD = \angle MDN = \angle MCN = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 CNDM 是矩形.

$$\therefore MD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle ADM = \angle ABC = 30^\circ.$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AMD$ 中, $\angle ADM = 30^\circ$,

$$\therefore MD = \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

$$\therefore ED = \sqrt{3} x.$$

在 $\text{Rt}\triangle BDN$ 中, $\angle DBN = 30^\circ$,

$$\therefore DN = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times (4 - x) = 2 - \frac{1}{2} x.$$

$$\therefore MD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{FN}{DN} = 1.$$

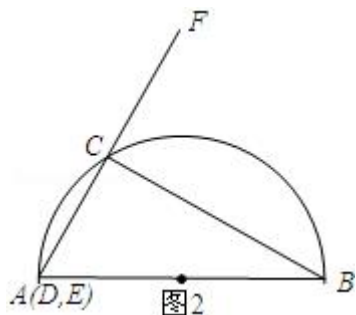
$$\therefore DN = NF.$$

$$\therefore DF = 2DN = 4 - x.$$

在 $\text{Rt}\triangle EDF$ 中, 由勾股定理可知

$$EF = y = \sqrt{ED^2 + DF^2} = \sqrt{(\sqrt{3}x)^2 + (4-x)^2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 4} \quad (0 < x \leq 4);$$

②当 D 与 A 重合时, 如图 2 所示;



$$\therefore CF = EF,$$

$$\therefore y = 2AC = 4.$$

(3) ①当点 E 在弧 AC 上时.

$\because \angle CAD=60^\circ$, 点 E 与点 D 关于 AC 对称,

$\therefore \angle EAD=\angle DAM=60^\circ$.

$\therefore \angle EAD=120^\circ$.

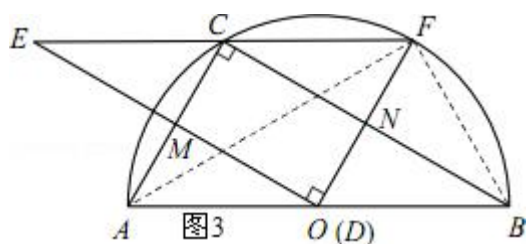
$\because$ 当点 E 在弧 AC 上时, $\angle EAD \leq 90^\circ$,

$\therefore$ 此种情况不成立.

故当且仅当点 D 与点 A 重合是, 点 E 也与点 A 重合时, 成立.

$\therefore AD=0$.

②当点 F 在 $\widehat{BC}$ 上时, 如图 3 所示, 连接 BF、AF.



$\because \angle DBN=30^\circ$, $\angle BND=90^\circ$,

$\therefore \angle FDB=60^\circ$.

$\because$ 由 (2) 可知 $DF=2DN$, $DB=2DN$,

$\therefore DF=DB$.

$\therefore \triangle DFB$ 为等边三角形.

$\therefore \angle DBF=60^\circ$, $\angle DFB=60^\circ$.

$\therefore \angle AFD=30^\circ$.

$\because AB$ 是圆 O 的直径,

$\therefore \angle AFB=90^\circ$.

$\because \angle CFA=\angle CBA=30^\circ$,

$$\therefore \angle CFB = 120^\circ.$$

$$\therefore \angle CFB + \angle FBD = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle CF \parallel DB.$$

$$\therefore \angle FAD = \angle CFA = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle FAD = \angle AFD = 30^\circ.$$

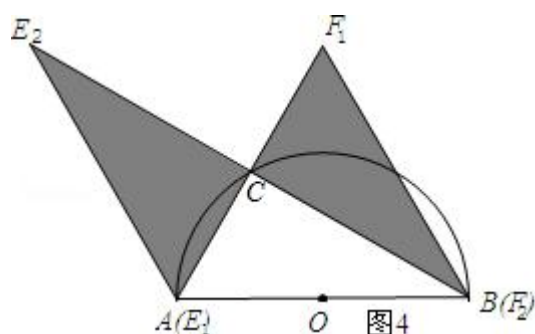
$$\therefore AD = DF = DB.$$

$\therefore$ 点 D 与点 O 重合.

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AB = 2.$$

综上所述, $AD=0$ 或 $AD=2$.

(4) 如图 4 所示; E、F 的初始位置为 E_1 、 F_1 , E_1 与 A 点重合, E、F 的终止位置为 E_2 、 F_2 , F_2 与 B 点重合.



$\therefore$ 由 (2) 可知 $\angle EAD = 2\angle CAD = 120^\circ$,

$\therefore$ 点 E 运动的轨迹为线段 AE_1 .

$\therefore$ 由 (3) 可知 $\angle FBD = 60^\circ$,

$\therefore$ 点 F 运动的轨迹为线段 BF_2 .

$$\therefore \text{阴影部分的面积即为所求, } S = 2 \times \frac{1}{2} \times AC \cdot BC = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 4\sqrt{3}.$$

【点评】 本题主要考查的是圆的综合应用, 解答本题主要应用了轴对称图形的性质、平行线分线段成比例定理、等边三角形的性质和判定、等腰三角形的性质和判定, 根据 $\angle EAD$ 和 $\angle FBD$ 为固定值, 判断点 E、F 运动的轨迹都是一

条线段是解题的关键.