

2015 年上海市虹口区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 计算 $(a^2)^3$ 的结果是 ()
A. a^5 B. a^6 C. a^8 D. $3a^2$
2. (4 分) 下列代数式中, $\sqrt{x+1}$ 的一个有理化因式是 ()
A. $\sqrt{x+1}$ B. $\sqrt{x-1}$ C. $\sqrt{x+1}$ D. $\sqrt{x}-1$
3. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ 的解集是 ()
A. $x \geq -\frac{1}{2}$ B. $x < 1$ C. $-\frac{1}{2} \leq x < 1$ D. $-\frac{1}{2} < x < 1$
4. (4 分) 下列事件中, 是确定事件的是 ()
A. 上海明天会下雨
B. 将要过马路时恰好遇到红灯
C. 有人把石头孵成了小鸭
D. 冬天, 盆里的水结成了冰
5. (4 分) 下列正多边形中, 中心角等于内角的是 ()
A. 正三角形 B. 正四边形 C. 正六边形 D. 正八边形
6. (4 分) 下列命题中, 真命题是 ()
A. 有两边和一角对应相等的两个三角形全等
B. 有两边和第三边上的高对应相等的两个三角形全等
C. 有两边和其中一边上的高对应相等的两个三角形全等
D. 有两边和第三边上的中线对应相等的两个三角形全等

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 据报道, 截止 2015 年 3 月, 某市网民规模达 5180000 人. 请将数据

5180000 用科学记数法表示为_____.

8. (4 分) 分解因式: $2x^2 - 8x =$ _____.

9. (4 分) 如果关于的方程 $x^2 + 3x - a = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 $a =$ _____.

10. (4 分) 方程 $\sqrt{2-x} = x$ 的根是_____.

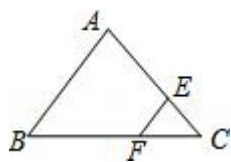
11. (4 分) 函数 $y = \sqrt{x+1}$ 的定义域是_____.

12. (4 分) 在反比例函数 $y = \frac{2k-3}{x}$ 的图象所在的每个象限中, 如果函数值 y 随自变量的 x 值增大而增大, 那么常数 k 的取值范围是_____.

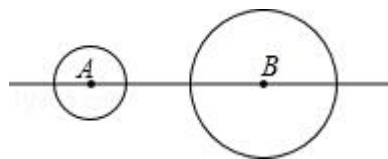
13. (4 分) 为了了解某中学学生的上学方式, 从该校全体学生 900 名中, 随机抽查了 60 名学生, 结果显示有 15 名学生“步行上学”. 由此, 估计该校全体学生中约有_____名学生“步行上学”.

14. (4 分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 G 是 $Rt\triangle ABC$ 的重心, 如果 $CG = 6$, 那么斜边 AB 的长等于_____.

15. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 E 、 F 分别在边 AC 、 BC 上, $EF \parallel AB$, $CE = \frac{1}{2}AE$, 若 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{EF} =$ _____.



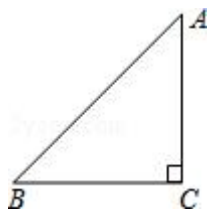
16. (4 分) 如图, $\odot A$ 、 $\odot B$ 的半径分别为 1cm、2cm, 圆心距 AB 为 5cm. 将 $\odot A$ 由图示位置沿直线 AB 向右平移, 当该圆与 $\odot B$ 内切时, $\odot A$ 平移的距离是_____cm.



17. (4 分) 定义 $[a, b, c]$ 为函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的“特征数”. 如: 函数 $y = x^2 + 3x$

-2 的“特征数”是 $[1, 3, -2]$ ，函数 $y = -x + 4$ 的“特征数”是 $[0, -1, 4]$ 。如果将“特征数”是 $[2, 0, 4]$ 的函数图象向下平移 3 个单位，得到一个新函数图象，那么这个新函数的解析式是_____。

18. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC = \sqrt{2}$ (如图)，若将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针方向旋转 60° 到 $\triangle AB'C'$ 的位置，联结 $C'B$ ，则 $C'B$ 的长为_____。

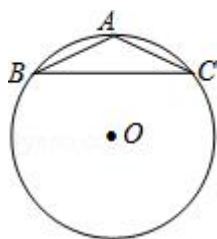


三、解答题 (本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10 分) 先化简，再求值 $(\frac{x^2}{x^2-9} - \frac{x+1}{x+3}) \div \frac{1}{x-3}$ ，其中 $x = \sqrt{3} - 3$ 。

20. (10 分) 解方程组：
$$\begin{cases} x^2 + 6xy + 9y^2 = 1 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

21. (12 分) 如图，等腰 $\triangle ABC$ 内接于半径为 5 的 $\odot O$ ， $AB = AC$ ， $\tan \angle ABC = \frac{1}{3}$ 。求 BC 的长。

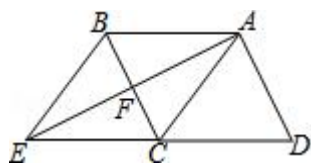


22. (12 分) 某商店试销一种成本为 10 元的文具。经试销发现，每天销售件数 y (件) 是每件销售价格 x (元) 的一次函数，且当每件按 15 元的价格销售时，每天能卖出 50 件；当每件按 20 元的价格销售时，每天能卖出 40 件。
- (1) 试求 y 关于 x 的函数解析式 (不用写出定义域)；
 - (2) 如果每天要通过销售该种文具获得 450 元的利润，那么该种文具每件的销售价格应该定为多少元？ (不考虑其他因素)

23. (6分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 E 为 DC 延长线上一点, 联结 AE , 交 BC 边于点 F , 联结 BE .

(1) 求证: $AB \cdot AD = BF \cdot ED$;

(2) 若 $CD = CA$, 且 $\angle DAE = 90^\circ$, 求证: 四边形 $ABEC$ 是菱形.

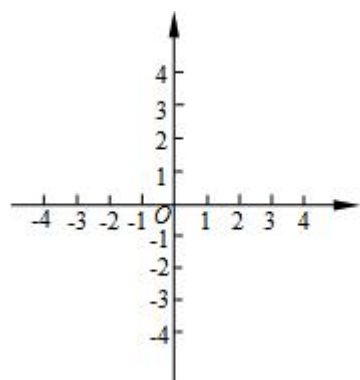


24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(2, 3)$ 三点, 且与 y 轴交于点 D .

(1) 求该抛物线的表达式, 并写出该抛物线的对称轴;

(2) 分别联结 AD 、 DC , CB , 直线 $y = 4x + m$ 与线段 DC 交于点 E , 当此直线将四边形 $ABCD$ 的面积平时时, 求 m 的值;

(3) 设点 F 为该抛物线对称轴上的一点, 当以点 A 、 B 、 C 、 F 为顶点的四边形是梯形时, 请直接写出所有满足条件的点 F 的坐标.

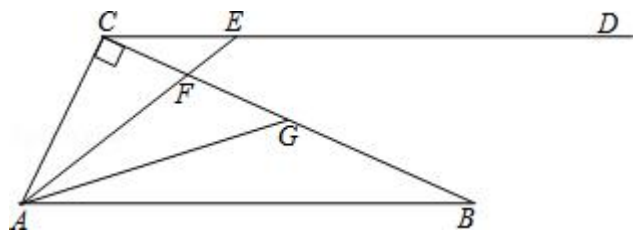


25. (16分) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$. $AB = 13$, $CD \parallel AB$. 点 E 为射线 CD 上一动点 (不与点 C 重合), 联结 AE , 交边 BC 于点 F , $\angle BAE$ 的平分线交 BC 于点 G .

(1) 当时 $CE = 3$, 求 $S_{\triangle CEF} : S_{\triangle CAF}$ 的值;

(2) 设 $CE = x$, $AE = y$, 当 $CG = 2GB$ 时, 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(3) 当 $AC=5$ 时，联结 EG ，若 $\triangle AEG$ 为直角三角形，求 BG 的长.



2015 年上海市虹口区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 计算 $(a^2)^3$ 的结果是 ()

- A. a^5 B. a^6 C. a^8 D. $3a^2$

【考点】47：幂的乘方与积的乘方.

【分析】根据幂的乘方，底数不变，指数相乘，计算后直接选取答案.

【解答】解： $(a^2)^3 = a^6$.

故选：B.

【点评】本题考查了幂的乘方的性质，熟练掌握性质是解题的关键.

2. (4 分) 下列代数式中， $\sqrt{x+1}$ 的一个有理化因式是 ()

- A. $\sqrt{x+1}$ B. $\sqrt{x-1}$ C. $\sqrt{x}+1$ D. $\sqrt{x}-1$

【考点】76：分母有理化.

【分析】根据有理化因式的定义进行求解即可. 两个含有根式的代数式相乘，如果它们的积不含有根式，那么这两个代数式相互叫做有理化因式.

【解答】解： $\because$ 由平方差公式， $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) = x-1$,

$\therefore \sqrt{x+1}$ 的有理化因式是 $\sqrt{x}-1$,

故选：D.

【点评】本题主要考查了对有理化因式的理解，正确选择两个二次根式，使它们的积符合平方差公式是解答问题的关键.

3. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ 的解集是 ()

- A. $x \geq -\frac{1}{2}$ B. $x < 1$ C. $-\frac{1}{2} \leq x < 1$ D. $-\frac{1}{2} < x < 1$

【考点】CB：解一元一次不等式组.

【分析】先解不等式组中的每一个不等式的解集，再利用求不等式组解集的方法得出解集.

【解答】解：解不等式①的 $x \geq -\frac{1}{2}$,

解不等式②得 $x < 1$,

所以不等式的解集是 $-\frac{1}{2} \leq x < 1$.

故选：C.

【点评】此题考查了一元一次不等式解集的求法，其简便求法就是用口诀求解. 求不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）.

4. (4分) 下列事件中，是确定事件的是（ ）

- A. 上海明天会下雨
- B. 将要过马路时恰好遇到红灯
- C. 有人把石头孵成了小鸭
- D. 冬天，盆里的水结成了冰

【考点】X1：随机事件.

【分析】利用确定事件包括必然事件和不可能事件. 必然事件就是一定发生的事件，即发生的概率是1的事件. 不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件，进而判断得出即可.

【解答】解：A，B，D都不一定发生，属于不确定事件.

有人把石头孵成了小鸭，是不可能事件.

故选：C.

【点评】本题考查了随机事件，理解概念是解决这类基础题的主要方法. 必然事件指在一定条件下，一定发生的事件；不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件；不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件.

5. (4分) 下列正多边形中, 中心角等于内角的是 ()

- A. 正三角形 B. 正四边形 C. 正六边形 D. 正八边形

【考点】MM: 正多边形和圆.

【分析】设正边形的边数是 n , 根据内角根据中心角等于内角, 就可以得到一个关于 n 的方程, 解方程就可以解得 n 的值

【解答】解: 设正边形的边数是 n .

根据题意得: $180 - \frac{360}{n} = \frac{360}{n}$,

解得: $n=4$.

故选: B.

【点评】本题考查了正多边形和圆, 考查正多边形的中心角和内角和的知识, 正确利用 n 表示出正多边形的中心角和内角是关键.

6. (4分) 下列命题中, 真命题是 ()

- A. 有两边和一角对应相等的两个三角形全等
B. 有两边和第三边上的高对应相等的两个三角形全等
C. 有两边和其中一边上的高对应相等的两个三角形全等
D. 有两边和第三边上的中线对应相等的两个三角形全等

【考点】KB: 全等三角形的判定; O1: 命题与定理.

【分析】根据三角形全等的判定方法对 A、D 进行判断; 利用三角形高的位置不同可对 B、C 进行判断.

【解答】解: A、有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等, 所以 A 选项错误;

B、有两边和第三边上的高对应相等的两个锐三角形全等, 所以 B 选项错误;

C、有两边和其中一边上的高对应相等的两个锐三角形全等, 所以 C 选项错误;

D、有两边和第三边上的中线对应相等的两个三角形全等，所以 D 选项正确.

故选：D.

【点评】 本题考查了命题与定理：判断一件事情的语句，叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项，一个命题可以写成“如果...那么...”形式. 有些命题的正确性是用推理证实的，这样的真命题叫做定理.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 据报道，截止 2015 年 3 月，某市网民规模达 5180000 人. 请将数据 5180000 用科学记数法表示为 5.18×10^6 .

【考点】 11: 科学记数法—表示较大的数.

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】 解：将 5180000 用科学记数法表示为 5.18×10^6 .

故答案为： 5.18×10^6 .

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

8. (4 分) 分解因式： $2x^2 - 8x =$ $2x(x - 4)$.

【考点】 53: 因式分解—提公因式法.

【分析】 直接提取公因式 $2x$ ，进而得出答案.

【解答】 解：原式 $= 2x(x - 4)$.

故答案为： $2x(x - 4)$.

【点评】此题主要考查了提取公因式法分解因式，正确找出公因式是解题关键.

9. (4 分) 如果关于的方程 $x^2+3x-a=0$ 有两个相等的实数根, 那么 $a=\underline{-\frac{9}{4}}$.

【考点】AA: 根的判别式.

【分析】根据方程 $x^2+3x-a=0$ 有两个相等的实数根可得 $\Delta=3^2-4(-a)$
 $=9+4a=0$, 求出 a 的值即可.

【解答】解: $\because$ 关于的方程 $x^2+3x-a=0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta=0,$$

$$\therefore 3^2-4(-a)=9+4a=0,$$

$$\therefore a=-\frac{9}{4},$$

故答案为: $-\frac{9}{4}$.

【点评】本题主要考查了根的判别式的知识, 解答本题的关键是掌握一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系: $\Delta=0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根, 此题难度不大.

10. (4 分) 方程 $\sqrt{2-x}=x$ 的根是 $\underline{x=1}$.

【考点】AG: 无理方程.

【分析】把方程两边平方去根号后即可转化成整式方程, 解方程即可求得 x 的值, 然后进行检验即可.

【解答】解: 两边平方得: $2-x=x^2$,

整理得: $x^2+x-2=0$,

解得: $x=1$ 或 -2 .

经检验: $x=1$ 是方程的解, $x=-2$ 不是方程的解.

故答案是: $x=1$.

【点评】在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法, 本题用了平方法.

11. (4 分) 函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的定义域是 $x \geq -1$.

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】根据被开方数大于等于 0 列式计算即可得解.

【解答】解: 由题意得, $x+1 \geq 0$,

解得 $x \geq -1$.

故答案为: $x \geq -1$.

【点评】本题考查的知识点为: 二次根式的被开方数是非负数.

12. (4 分) 在反比例函数 $y=\frac{2k-3}{x}$ 的图象所在的每个象限中, 如果函数值 y 随自变量的 x 值增大而增大, 那么常数 k 的取值范围是 $k < \frac{3}{2}$.

【考点】G4: 反比例函数的性质.

【分析】先根据函数 $y=\frac{2k-3}{x}$ 的图象在其所在的每一象限内, 函数值 y 随自变量 x 的增大而增大列出关于 m 的不等式, 求出 m 的取值范围即可.

【解答】解: $\because$ 函数 $y=\frac{2k-3}{x}$ 的图象在其所在的每一象限内, 函数值 y 随自变量 x 的增大而增大,

$\therefore 2k-3 < 0$,

解得 $k < \frac{3}{2}$.

故答案为: $k < \frac{3}{2}$.

【点评】本题考查的是反比例函数的性质, 熟知反比例函数的增减性是解答此题的关键.

13. (4 分) 为了了解某中学学生的上学方式, 从该校全体学生 900 名中, 随机抽查了 60 名学生, 结果显示有 15 名学生“步行上学”. 由此, 估计该校全体学生中约有 225 名学生“步行上学”.

【考点】V5: 用样本估计总体.

【分析】 先通过样本计算“步行上学”的学生所占百分比，然后估计整体中“步行上学”的学生人数.

【解答】 解： $\because$ 从该校全体学生 900 名中，随机抽查了 60 名学生，结果显示有 15 名学生“步行上学”，

$\therefore$ “步行上学”的学生所占百分比为 $\frac{15}{60} \times 100\% = 25\%$,

$\therefore$ 估计该校全体学生中“步行上学”的人数为 $900 \times 25\% = 225$.

故答案为 225.

【点评】 本题考查了用样本的数据特征来估计总体的数据特征，利用样本中的数据对整体进行估算是统计学中最常用的估算方法.

14. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，点 G 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心，如果 $CG=6$ ，那么斜边 AB 的长等于 18.

【考点】 K5： 三角形的重心.

【专题】 11： 计算题.

【分析】 CD 为斜边上的中线，如图，根据重心的性质得到 $DG = \frac{1}{2}CG = 3$ ，则 $CD=9$ ，

然后根据直角三角形斜边上的中线性质的性质即可得到 AB 的长.

【解答】 解： CD 为斜边上的中线，如图，

$\because$ 点 G 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心，

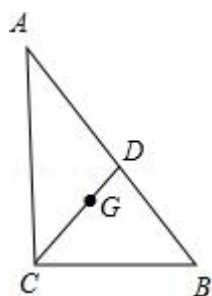
$\therefore CG:GD=2:1$,

$\therefore DG = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2} \times 6 = 3$,

$\therefore CD = 3 + 6 = 9$,

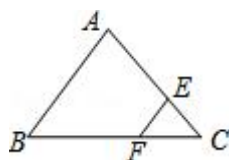
$\therefore AB = 2CD = 18$.

故答案为 18.



【点评】 本题考查了三角形重心：三角形的重心是三角形三边中线的交点，重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2：1．也考查了直角三角形斜边上的中线性质的性质．

15. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 E、F 分别在边 AC、BC 上， $EF \parallel AB$ ， $CE = \frac{1}{2}AE$ ，若 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ ．



【考点】 LM：*平面向量．

【分析】 由 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，利用三角形法则，即可求得 $\overrightarrow{AB}$ ，然后由 $EF \parallel AB$ ，可证得 $\triangle CEF \sim \triangle CAB$ ，再利用相似三角形的对应边成比例，即可求得答案．

【解答】 解： $\because \overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\because EF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{CA},$$

$$\because CE = \frac{1}{2}AE,$$

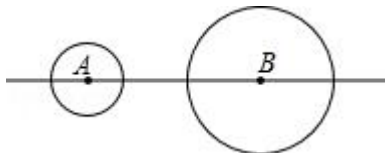
$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$$

【点评】 此题考查了平面向量的知识以及相似三角形的判定与性质，注意掌握三

角形法则的应用.

16. (4分) 如图, $\odot A$ 、 $\odot B$ 的半径分别为 1cm、2cm, 圆心距 AB 为 5cm. 将 $\odot A$ 由图示位置沿直线 AB 向右平移, 当该圆与 $\odot B$ 内切时, $\odot A$ 平移的距离是 4 或 6 cm.



【考点】MJ: 圆与圆的位置关系; Q2: 平移的性质.

【分析】可根据圆心距与半径之间的数量关系判断 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的位置关系.

【解答】解: 当内切时, 圆心距为 $2 - 1 = 1$,

当点 A 在点 B 的左侧时, 移动的距离为 $5 - 1 = 4$ cm;

当点 A 在点 B 的右侧时, 移动的距离为 $5 + 1 = 6$ cm;

所以向右移动 4 或 6cm 时两圆内切,

故答案为: 4 或 6.

【点评】考查了圆与圆的位置关系, 解此题的关键是熟练掌握由数量关系来判断两圆位置关系的方法. 设两圆的半径分别为 R 和 r , 且 $R \geq r$, 圆心距为 P ;
外离 $P > R + r$; 外切 $P = R + r$; 相交 $R - r < P < R + r$; 内切 $P = R - r$; 内含 $P < R - r$.

17. (4分) 定义 $[a, b, c]$ 为函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的“特征数”. 如: 函数 $y = x^2 + 3x - 2$ 的“特征数”是 $[1, 3, -2]$, 函数 $y = -x + 4$ 的“特征数”是 $[0, -1, 4]$. 如果将“特征数”是 $[2, 0, 4]$ 的函数图象向下平移 3 个单位, 得到一个新函数图象, 那么这个新函数的解析式是 $y = 2x^2 + 1$.

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】23: 新定义.

【分析】根据“特征数”的定义得到：“特征数”是 $[2, 0, 4]$ 的函数的解析式为：

$y=2x^2+4$ ，则该抛物线的顶点坐标是 $(0, 4)$ ，根据平移规律得到新函数解析式.

【解答】解：依题意得：“特征数”是 $[2, 0, 4]$ 的函数解析式为： $y=2x^2+4$ ，其顶

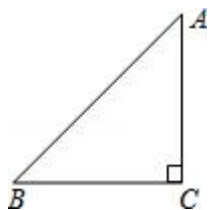
点坐标是 $(0, 4)$ ，向下平移 3 个单位后得到的顶点坐标是 $(0, 1)$ ，

所以新函数的解析式为： $y=2x^2+1$.

故答案是： $y=2x^2+1$.

【点评】主要考查了函数图象的平移，抛物线与坐标轴的交点坐标的求法，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减. 并用规律求函数解析式.

18. (4 分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=BC=\sqrt{2}$ (如图)，若将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针方向旋转 60° 到 $\triangle AB'C'$ 的位置，联结 $C'B$ ，则 $C'B$ 的长为 $\sqrt{3}-1$.



【考点】R2：旋转的性质.

【分析】连接 BB' ，根据旋转的性质可得 $AB=AB'$ ，判断出 $\triangle ABB'$ 是等边三角形，根据等边三角形的三条边都相等可得 $AB=BB'$ ，然后利用“边边边”证明 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle B'BC'$ 全等，根据全等三角形对应角相等可得 $\angle ABC'=\angle B'BC'$ ，延长 BC' 交 AB' 于 D，根据等边三角形的性质可得 $BD \perp AB'$ ，利用勾股定理列式求出 AB，然后根据等边三角形的性质和等腰直角三角形的性质求出 BD、 $C'D$ ，然后根据 $BC'=BD - C'D$ 计算即可得解.

【解答】解：如图，连接 BB' ，

$\therefore \triangle ABC$ 绕点 A 顺时针方向旋转 60° 得到 $\triangle AB'C'$ ，

$$\therefore AB=AB', \angle BAB'=60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形,

$$\therefore AB=BB',$$

在 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle B'BC'$ 中,

$$\begin{cases} AB=BB' \\ AC'=B'C' \\ BC'=BC' \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABC' \cong \triangle B'BC' \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle ABC' = \angle B'BC',$$

延长 BC' 交 AB' 于 D ,

则 $BD \perp AB'$,

$$\because \angle C=90^\circ, AC=BC=\sqrt{2},$$

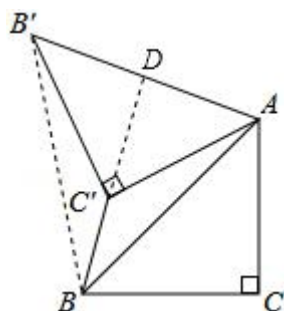
$$\therefore AB=2,$$

$$\therefore BD=2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$C'D = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$$\therefore BC' = BD - C'D = \sqrt{3} - 1.$$

故答案为 $\sqrt{3} - 1$.



【点评】 本题考查了旋转的性质，全等三角形的判定与性质，等边三角形的判定与性质，等腰直角三角形的性质，作辅助线构造出全等三角形并求出 BC' 在等边三角形的高上是解题的关键，也是本题的难点.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 先化简, 再求值 $(\frac{x^2}{x^2-9} - \frac{x+1}{x+3}) \div \frac{1}{x-3}$, 其中 $x=\sqrt{3}-3$.

【考点】6D: 分式的化简求值.

【分析】先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再求出 x 的值代入进行计算即可.

【解答】解: 原式 $= [\frac{x^2}{(x+3)(x-3)} - \frac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}] \cdot (x-3)$
 $= \frac{x^2 - x^2 + 2x + 3}{(x+3)(x-3)} \cdot (x-3)$
 $= \frac{2x+3}{x+3},$

当 $x=\sqrt{3}-3$ 时, 原式 $= \frac{2(\sqrt{3}-3)+3}{\sqrt{3}-3+3} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$

【点评】本题考查的是分式的化简求值, 熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

20. (10 分) 解方程组: $\begin{cases} x^2+6xy+9y^2=1 \\ x-y-3=0 \end{cases}.$

【考点】AF: 高次方程.

【分析】把①化为 $x+3y=1$ 和 $x+3y=-1$, 再把 $x+3y=1$ 和 $x+3y=-1$ 分别与 $x-y-3=0$ 组成方程组, 解出方程组得到答案.

【解答】解: $\begin{cases} x^2+6xy+9y^2=1 & \text{①} \\ x-y-3=0 & \text{②} \end{cases},$

由①得, $(x+3y)^2=1$

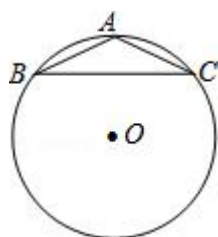
即 $x+3y=1$, $x+3y=-1$,

得到方程组 $\begin{cases} x+3y=1 \\ x-y-3=0 \end{cases}, \begin{cases} x+3y=-1 \\ x-y-3=0 \end{cases},$

分别解这两个方程组, 得原方程组的解: $\begin{cases} x_1=2\frac{1}{2} \\ y_1=-\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-1 \end{cases}.$

【点评】 本题考查的是二元二次方程组的解法，把二元二次方程通过因式分解化为两个二元一次方程，再把这两个二元一次方程分别与另一个方程组成二元一次方程组，解方程组即可.

21. (12 分) 如图，等腰 $\triangle ABC$ 内接于半径为 5 的 $\odot O$, $AB=AC$, $\tan \angle ABC=\frac{1}{3}$. 求 BC 的长.



【考点】 M2: 垂径定理; T7: 解直角三角形.

【分析】 连接 AO, 交 BC 于点 E, 连接 BO, 求出 $\widehat{AB}=\widehat{AC}$, 根据垂径定理得出 $OA \perp BC$, $BC=2BE$, 设 $AE=x$, 则 $BE=3x$, $OE=5-x$, 根据勾股定理得出方程 $(3x)^2 + (5-x)^2 = 5^2$, 求出方程的解即可.

【解答】 解: 连接 AO, 交 BC 于点 E, 连接 BO,

$$\therefore AB=AC,$$

$$\therefore \widehat{AB}=\widehat{AC},$$

又 $\because OA$ 是半径,

$$\therefore OA \perp BC, BC=2BE,$$

在 $Rt\triangle ABE$ 中, $\because \tan \angle ABC=\frac{1}{3}$,

$$\therefore \frac{AE}{BE}=\frac{1}{3},$$

设 $AE=x$, 则 $BE=3x$, $OE=5-x$,

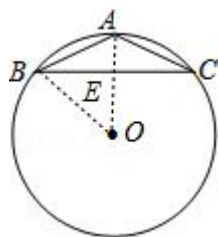
在 $Rt\triangle EOB$ 中, $BE^2+OE^2=OB^2$,

$$\therefore (3x)^2 + (5-x)^2 = 5^2,$$

解得: $x_1=0$ (舍去), $x_2=1$,

$$\therefore BE=3x=3,$$

$$\therefore BC=2BE=6.$$



【点评】 本题考查了圆心角、弧、弦之间的关系，垂径定理，解直角三角形，勾股定理的应用，解此题的关键是构造直角三角形，用了方程思想，难度适中.

22. (12 分) 某商店试销一种成本为 10 元的文具. 经试销发现，每天销售件数 y (件) 是每件销售价格 x (元) 的一次函数，且当每件按 15 元的价格销售时，每天能卖出 50 件；当每件按 20 元的价格销售时，每天能卖出 40 件.

- (1) 试求 y 关于 x 的函数解析式 (不用写出定义域)；
- (2) 如果每天要通过销售该种文具获得 450 元的利润，那么该种文具每件的销售价格应该定为多少元？ (不考虑其他因素)

【考点】 AD: 一元二次方程的应用；FG: 根据实际问题列一次函数关系式.

【分析】 (1) 设出一次函数解析式 $y=kx+b$ ，用待定系数法建立关于 k 和 b 的方程组，解之即可求出所求；

(2) 按照等量关系“每月获得的利润= (销售价格 - 进价) $\times$ 销售件数”列出二次函数，并求得最值.

【解答】 解：(1) 由题意，知：当 $x=15$ 时， $y=50$ ；当 $x=20$ 时， $y=40$ ，

设所求一次函数解析式为 $y=kx+b$ ，

$$\text{由题意得：} \begin{cases} 15k+b=50 \\ 20k+b=40 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k=-2 \\ b=80 \end{cases}$$

$\therefore$ 所求的 y 关于 x 的函数解析式为 $y=-2x+80$.

(2) 由题意, 可得: $(x-10)(-2x+80)=450$

解得: $x=25$

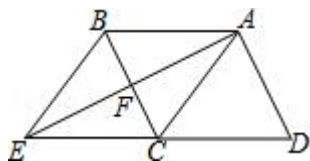
答: 该种文具每件的销售价格应该定为 25 元.

【点评】 本题考查了二次函数在实际生活中的应用, 重点是掌握求最值的问题. 注意: 数学应用题来源于实践, 用于实践, 在当今社会市场经济的环境下, 应掌握一些有关商品价格和利润的知识, 总利润等于总收入减去总成本, 然后再利用二次函数求最值.

23. (6 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 E 为 DC 延长线上一点, 联结 AE , 交 BC 边于点 F , 联结 BE .

(1) 求证: $AB \cdot AD = BF \cdot ED$;

(2) 若 $CD=CA$, 且 $\angle DAE=90^\circ$, 求证: 四边形 $ABEC$ 是菱形.



【考点】 L5: 平行四边形的性质; L9: 菱形的判定; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形得到 $\angle ABC = \angle D$, $AB \parallel CD$, $\angle BAF = \angle DEA$, 推出 $\triangle ABF \sim \triangle EDA$, 于是即可得到结论;

(2) 根据 $\angle DAE=90^\circ$, 得到 $\angle AED + \angle D = 90^\circ$, $\angle EAC + \angle DAC = 90^\circ$, 根据 $CD=CA$, 推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 根据平行四边形的性质得到 $AB \parallel CD$ 且 $AB=CD$, 证出四边形 $ABEC$ 是平行四边形. 由于 $CE=CA$, 推出四边形 $ABEC$ 是菱形.

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \angle ABC = \angle D$, $AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BAF = \angle DEA,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle EDA,$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BF}{AD},$$

$$\therefore AB \cdot AD = BF \cdot ED;$$

$$(2) \because \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle D = 90^\circ, \quad \angle EAC + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\because CD = CA,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle D,$$

$$\therefore \angle AED = \angle EAC,$$

$$\therefore CE = CA,$$

$$\therefore CE = CD.$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形},$$

$$\therefore AB \parallel CD \text{ 且 } AB = CD,$$

$$\therefore AB \parallel EC \text{ 且 } AB = EC,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABEC \text{ 是平行四边形}.$$

$$\because CE = CA,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABEC \text{ 是菱形}.$$

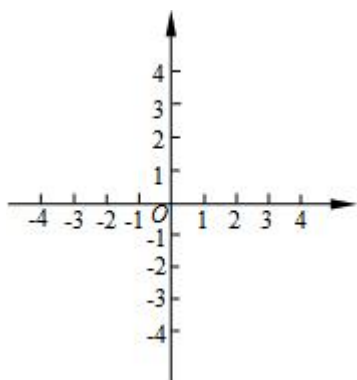
【点评】 本题考查了平行四边形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，菱形的判定，熟记定理是解题的关键.

24. (12 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(2, 3)$ 三点，且与 y 轴交于点 D .

(1) 求该抛物线的表达式，并写出该抛物线的对称轴；

(2) 分别联结 AD、DC，CB，直线 $y=4x+m$ 与线段 DC 交于点 E，当此直线将四边形 ABCD 的面积平时时，求 m 的值；

(3) 设点 F 为该抛物线对称轴上的一点，当以点 A、B、C、F 为顶点的四边形是梯形时，请直接写出所有满足条件的点 F 的坐标.



【考点】HF：二次函数综合题.

【分析】(1) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 A (-1, 0)、B (3, 0)、C (2, 3) 三点，列方程组可求得.

(2) 由梯形的面积公式列方程即可求得 m 的值.

(3) 由以 A、B、C、F 为顶点的四边形是梯形，分类讨论当 $CF \parallel AB$ 时，点 F 在线段 CD 上，求得 F (1, 3)，当 $AF \parallel BC$ 时，直线 BC 的解析式为： $y = -3x + 9$ ，直线 AF 的解析式为 $y = -3x - 3$ ，求得 F (1, -6)，当 $CA \parallel BF$ 时，直线 AC 的解析式为： $y = x + 1$ ，直线 BF 的解析式为： $y = x - 3$ ，求得 F (1, -2).

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 A (-1, 0)，B (3, 0)，C (2, 3) 三点，

$$\therefore \begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases},$$

$\therefore$ 所求抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 2x + 3$ ，其对称轴是直线 $x=1$ ，

(2) 由题意, 得: $D(0, 3)$,

$\therefore DC \parallel AB$, $AB=4$, $CD=3$,

$\therefore$ 直线 $y=4x+m$ 与线段 DC 交于点 E , 且将四边形 $ABCD$ 的面积平分,

$\therefore$ 直线 $y=4x+m$ 与边 AB 相交, 设交点为点 G ,

$\therefore$ 点 E 的纵坐标是 3, 点 G 的纵坐标是 0,

$\therefore$ 可求得 $E\left(\frac{3-m}{4}, 3\right)$, $G\left(-\frac{m}{4}, 0\right)$,

由题意, 得: $S_{\text{四边形 } ABCD} = 2S_{\text{四边形 } AGED}$,

$\therefore AB+CD=2(AG+DE)$

$\therefore 4+3=2\left(-\frac{m}{4}+1+\frac{3-m}{4}\right)$,

解得: $m = -\frac{5}{2}$.

(3) 当 $CF \parallel AB$ 时, 点 F 在线段 CD 上,

$\therefore F(1, 3)$,

当 $AF \parallel BC$ 时,

直线 BC 的解析式为: $y = -3x+9$,

$\therefore$ 直线 AF 的解析式为 $y = -3x - 3$,

当 $x=1$ 时, $y = -6$,

$\therefore F(1, -6)$,

当 $CA \parallel BF$ 时,

直线 AC 的解析式为: $y = x+1$,

$\therefore$ 直线 BF 的解析式为: $y = x - 3$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时, $y = -2$,

$\therefore F(1, -2)$;

综上所述：点 F 的坐标：(1, 3), (1, -2), (1, -6).

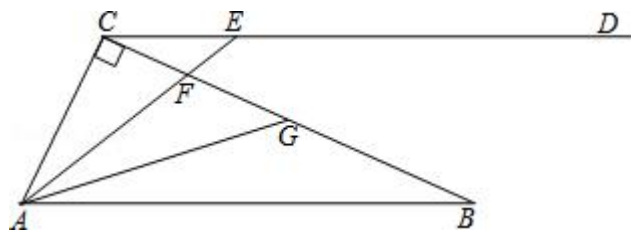
【点评】此题考查了抛物线解析式的确定、梯形的判定、梯形的面积的求法重要知识点，(3) 小题中，都用到了分类讨论的数学思想，难点在于考虑问题要全面，做到不重不漏.

25. (16 分) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$. $AB=13$, $CD\parallel AB$. 点 E 为射线 CD 上一动点 (不与点 C 重合)，联结 AE，交边 BC 于点 F， $\angle BAE$ 的平分线交 BC 于点 G.

(1) 当时 $CE=3$ ，求 $S_{\triangle CEF} : S_{\triangle CAF}$ 的值；

(2) 设 $CE=x$, $AE=y$ ，当 $CG=2GB$ 时，求 y 与 x 之间的函数关系式；

(3) 当 $AC=5$ 时，联结 EG，若 $\triangle AEG$ 为直角三角形，求 BG 的长.



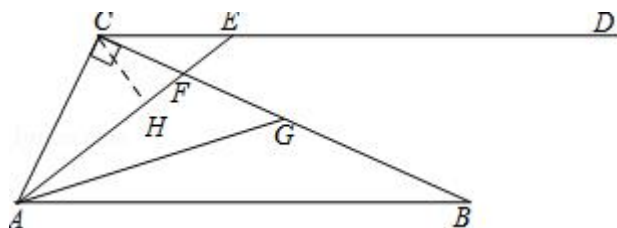
【考点】SO：相似形综合题.

【分析】(1) 过点 C 作 $CH\perp AE$ 于 H，根据等高的两个三角形面积之比等于底的比，求出 $EF : AF$ 即可；

(2) 延长 AG 交射线 CD 于点 K，根据相似三角形对应边成比例求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(3) 分 $\angle AGE=90^\circ$ 、 $\angle AEG=90^\circ$ 两种情况进行解答，求出 BG 的长.

【解答】解：(1) 过点 C 作 $CH\perp AE$ 于 H，



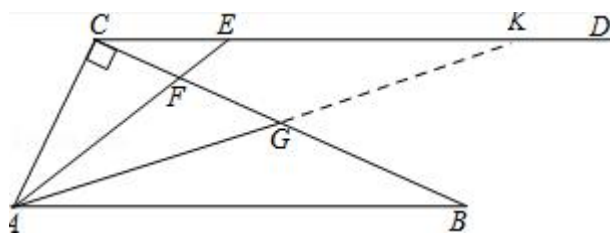
$$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAF}} = \frac{\frac{1}{2}EF \cdot CH}{\frac{1}{2}AF \cdot CH} = \frac{EF}{AF},$$

$$\therefore CD \parallel AB, \therefore \frac{EF}{AF} = \frac{CE}{AB},$$

$$\therefore CE=3, AB=13, \therefore \frac{EF}{AF} = \frac{3}{13},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAF}} = \frac{3}{13}.$$

(2) 延长 AG 交射线 CD 于点 K,



$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle EKA = \angle KAB,$$

$$\therefore AG \text{ 平分 } \angle BAE,$$

$$\therefore \angle EAK = \angle KAB,$$

$$\therefore \angle EKA = \angle EAK,$$

$$\therefore AE = EK,$$

$$\therefore CE = x, AE = y,$$

$$\therefore CK = CE + EK = CE + AE = x + y,$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

