

2015 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 如果 $x=2$ 是方程 $\frac{1}{2}x+a=-1$ 的根，那么 a 的值是 ()

- A. 0 B. 2 C. -2 D. -6

2. (4 分) 在同一直角坐标系中，若正比例函数 $y=k_1x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象没有公共点，则 ()

- A. $k_1+k_2 < 0$ B. $k_1+k_2 > 0$ C. $k_1k_2 < 0$ D. $k_1k_2 > 0$

3. (4 分) 某篮球队 12 名队员的年龄如表所示：

年龄 (岁)	18	19	20	21
人数	5	4	1	2

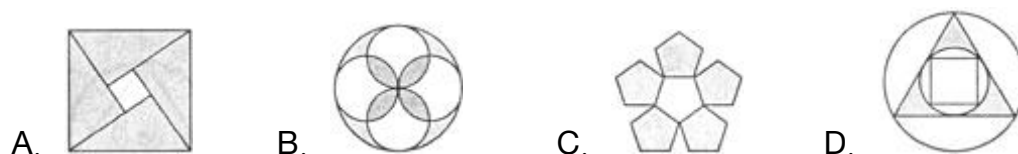
则这 12 名队员年龄的众数和中位数分别是 ()

- A. 2, 19 B. 18, 19 C. 2, 19.5 D. 18, 19.5

4. (4 分) 下列命题中，真命题是 ()

- A. 周长相等的锐角三角形都全等
B. 周长相等的直角三角形都全等
C. 周长相等的钝角三角形都全等
D. 周长相等的等腰直角三角形都全等

5. (4 分) 下列图形中，是中心对称图形，但不是轴对称图形的是 ()



6. (4 分) 设边长为 3 的正方形的对角线长为 a . 下列关于 a 的四种说法:

- ① a 是无理数;
② a 可以用数轴上的一个点来表示;

③ $3 < a < 4$;

④ a 是 18 的算术平方根.

其中, 所有正确说法的序号是 ()

A. ①④

B. ②③

C. ①②④

D. ①③④

二、填空题 (共 12 小题, 每小题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 因式分解: $xy^2 - 4x =$ _____.

8. (4 分) 不等式 $5 - x < x$ 的解集是_____.

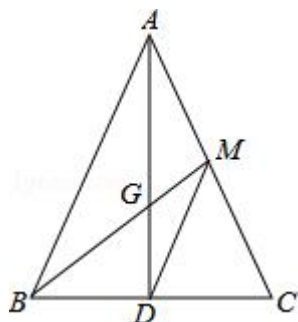
9. (4 分) 方程 $\sqrt{x+6} = x$ 的解为_____.

10. (4 分) 如果关于 x 的方程 $mx^2 = 3$ 有两个实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

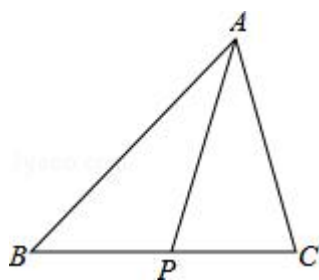
11. (4 分) 如果将抛物线 $y = x^2 - 4$ 平移到抛物线 $y = x^2 - 4x$ 的位置, 那么平移的方向和距离分别是_____.

12. (4 分) 一个不透明盒子内装有大小、形状相同的四个球, 其中红球 1 个、绿球 1 个、白球 2 个, 小明摸出一个球不放回, 再摸出一个球, 则两次都摸到白球的概率是_____.

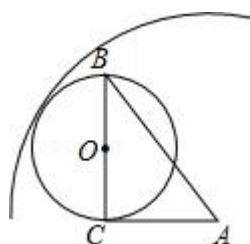
13. (4 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 如果 $AB = AC$, $AD \perp BC$ 于点 D , M 为 AC 中点, AD 与 BM 交于点 G , 那么 $S_{\triangle GDM} : S_{\triangle GAB}$ 的值为_____.



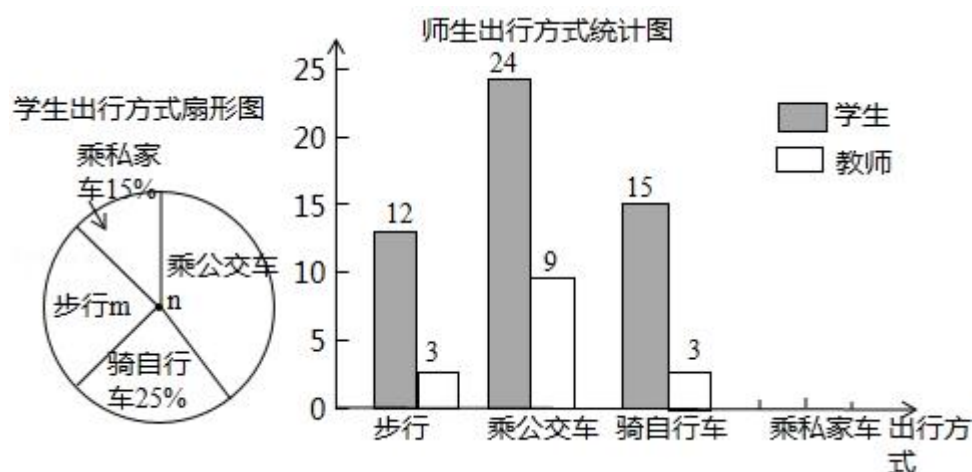
14. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 点 P 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AP} =$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 来表示)



15. (4分) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=4\text{cm}$, $AC=3\text{cm}$, $\odot O$ 是以 BC 为直径的圆, 如果 $\odot O$ 与 $\odot S$ 相内切, 那么 $\odot A$ 的半径为_____cm.

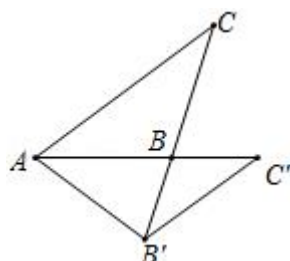


16. (4分) 本市某校开展以“倡导绿色出行, 关爱师生健康”为主题的教育活动, 为了了解本校师生的出行方式, 在本校范围内随机抽查了部分师生, 将收集的数据给绘制成下列不完整的两种统计图. 已知随机抽查的教师人数为学生人数的一半, 根据图中信息, 乘私家车出行的教师人数是_____.



17. (4分) 对于平面直角坐标系 xOy 中的点 $P(a, b)$, 若点 P' 的坐标为 $(a+\frac{b}{k}, ka+b)$ (其中 k 为常数, 且 $k \neq 0$), 则称点 P' 为点 P 的“ k 属派生点”, 例如: $P(1, 4)$ 的“2 属派生点”为 $P'(1+\frac{4}{2}, 2 \times 1+4)$, 则 $P'(3, 6)$. 若点 P 的“ k 属派生点” P' 的坐标为 $(3, 3)$, 请写出一个符合条件的点 P 的坐标_____.

18. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC > 90^\circ$, $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$, $BC=4$, 将三角形绕着点 A 旋转, 点 C 落在直线 AB 上的点 C' 处, 点 B 落在点 B' 处. 若 C 、 B 、 B' 恰好在一一直线上, 则 AB 的长为_____.



三、解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

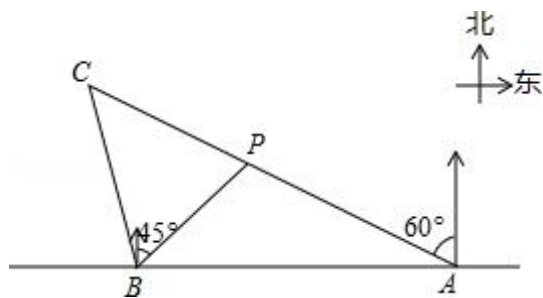
19. (10分) 计算: $(\sqrt{2}-1)^0 - \sqrt{75} + 2\cos 30^\circ + (\frac{1}{2})^{-1} + |\sqrt{3}-1|$.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} xy=3 \\ x^2-2xy+y^2-4=0 \end{cases}$$

21. (10分) 如图, 在一笔直的海岸线 l 上有 AB 两个观测站, A 在 B 的正东方向, $AB=2$ (单位: km). 有一艘小船在点 P 处, 从 A 测得小船在北偏西 60° 的方向, 从 B 测得小船在北偏东 45° 的方向.

(1) 求点 P 到海岸线 l 的距离;

(2) 小船从点 P 处沿射线 AP 的方向航行一段时间后, 到点 C 处, 此时, 从 B 测得小船在北偏西 15° 的方向. 求点 C 与点 B 之间的距离. (上述两小题的结果都保留根号)



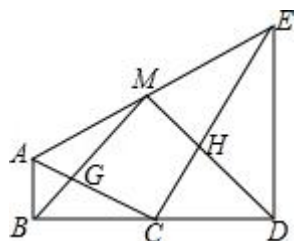
22. (10分) 现有甲、乙两个空调安装队分别为 A 、 B 两个公司安装空调, 甲安装队为 A 公司安装 66 台空调, 乙安装队为 B 公司安装 80 台空调, 乙安装队

提前一天开工，最后与甲安装队恰好同时完成安装任务．已知甲队比乙队平均每天多安装 2 台空调，求甲、乙两个安装队平均每天各安装多少台空调．

23. (12 分) 已知：如图， $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$ ，且 BC 与 CD 共线，联结 AE ，点 M 为 AE 中点，联结 BM ，交 AC 于点 G ，联结 MD ，交 CE 于点 H

(1) 求证： $MB = MD$ ；

(2) 当 $AB = BC$ ， $DC = DE$ 时，求证：四边形 $MGCH$ 为矩形．

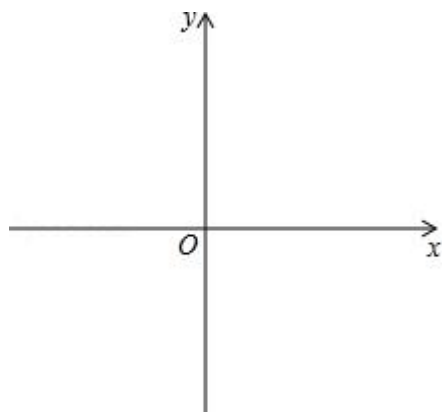


24. (12 分) 已知：在直角坐标系中，直线 $y = x + 1$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，抛物线 $y = \frac{1}{2}(x - m)^2 + n$ 的顶点 D 在直线 AB 上，与 y 轴的交点为 C

(1) 若点 C (非顶点) 与点 B 重合，求抛物线的表达式；

(2) 若抛物线的对称轴在 y 轴的右侧，且 $CD \perp AB$ ，求 $\angle CAD$ 的正切值；

(3) 在 (2) 的条件下，在 $\angle ACD$ 的内部作射线 CP 交抛物线的对称轴于点 P ，使得 $\angle DCP = \angle CAD$ ，求点 P 的坐标．



25. (14 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $BC=10$, $\tan \angle ABC=\frac{3}{4}$, 点 O 是

AB 边上动点, 以 O 为圆心, OB 为半径的 $\odot O$ 与边 BC 的另一交点为 D , 过点 D 作 AB 的垂线, 交 $\odot O$ 于点 E , 联结 BE 、 AE

- (1) 当 $AE \parallel BC$ (如图 (1)) 时, 求 $\odot O$ 的半径长;
- (2) 设 $BO=x$, $AE=y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域;
- (3) 若以 A 为圆心的 $\odot A$ 与 $\odot O$ 有公共点 D 、 E , 当 $\odot A$ 恰好也过点 C 时, 求 DE 的长.

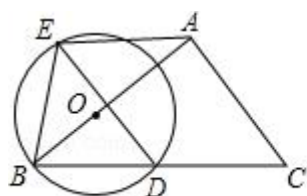
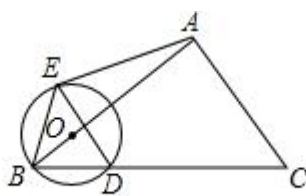
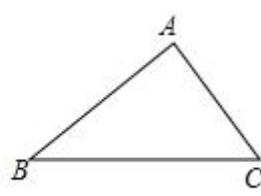


图 (1)



备用图



备用图

2015 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 如果 $x=2$ 是方程 $\frac{1}{2}x+a=-1$ 的根，那么 a 的值是 ()

- A. 0 B. 2 C. -2 D. -6

【考点】85：一元一次方程的解.

【分析】把 $x=2$ 代入方程 $\frac{1}{2}x+a=-1$ 得出一个关于 a 的方程，求出方程的解即可.

【解答】解：∵ $x=2$ 是方程 $\frac{1}{2}x+a=-1$ 的根，

$$\therefore \text{代入得：} \frac{1}{2} \times 2 + a = -1,$$

$$\therefore a = -2,$$

故选：C.

【点评】本题考查了一元一次方程的解和解一元一次方程，解此题的关键是得出一个关于 a 的方程.

2. (4 分) 在同一直角坐标系中，若正比例函数 $y=k_1x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象没有公共点，则 ()

- A. $k_1+k_2 < 0$ B. $k_1+k_2 > 0$ C. $k_1k_2 < 0$ D. $k_1k_2 > 0$

【考点】G8：反比例函数与一次函数的交点问题.

【专题】2B：探究型.

【分析】根据反比例函数与一次函数的交点问题进行解答即可.

【解答】解：∵ 正比例函数 $y=k_1x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ 的图象没有公共点，

$$\therefore k_1 \text{ 与 } k_2 \text{ 异号，即 } k_1 \cdot k_2 < 0.$$

故选：C.

【点评】 本题考查的是反比例函数与一次函数的交点问题，熟知反比例函数与一次函数的图象与系数的关系是解答此题的关键.

3. (4分) 某篮球队 12 名队员的年龄如表所示:

年龄 (岁)	18	19	20	21
人数	5	4	1	2

则这 12 名队员年龄的众数和中位数分别是 ()

- A. 2, 19 B. 18, 19 C. 2, 19.5 D. 18, 19.5

【考点】 W4: 中位数; W5: 众数.

【分析】 众数就是出现次数最多的数, 而中位数就是大小处于中间位置的数, 根据定义即可求解.

【解答】 解: 18 岁出现了 5 次, 次数最多, 因而众数是: 18;

12 个数, 处于中间位置的都是 19, 因而中位数是: 19.

故选: B.

【点评】 本题考查了众数和中位数的概念: 一组数据中出现次数最多的数据叫做众数; 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数; 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

4. (4分) 下列命题中, 真命题是 ()

- A. 周长相等的锐角三角形都全等
B. 周长相等的直角三角形都全等
C. 周长相等的钝角三角形都全等
D. 周长相等的等腰直角三角形都全等

【考点】 KB: 全等三角形的判定; O1: 命题与定理.

【专题】 14: 证明题.

【分析】 全等三角形必须是对应角相等, 对应边相等, 根据全等三角形的判定方

法，逐一检验.

【解答】解：A、周长相等的锐角三角形的对应角不一定相等，对应边也不一定相等，假命题；

B、周长相等的直角三角形对应锐角不一定相等，对应边也不一定相等，假命题；

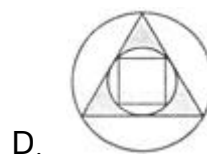
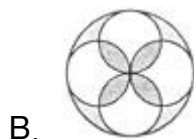
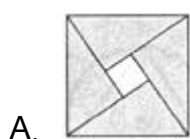
C、周长相等的钝角三角形对应钝角不一定相等，对应边也不一定相等，假命题；

D、由于等腰直角三角形三边之比为 $1:1:\sqrt{2}$ ，故周长相等时，等腰直角三角形的对应角相等，对应边相等，故全等，真命题.

故选：D.

【点评】本题考查了全等三角形的判定定理的运用，命题与定理的概念. 关键是明确全等三角形的对应边相等，对应角相等.

5. (4分) 下列图形中，是中心对称图形，但不是轴对称图形的是 ()



【考点】 P3：轴对称图形；R5：中心对称图形.

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【解答】解：A、不是轴对称图形，是中心对称图形. 故此选项正确；

B、是轴对称图形，也是中心对称图形. 故此选项错误；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形. 故此选项错误；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形. 故此选项错误.

故选：A.

【点评】此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：

轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；

中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180° 度后与原图重合.

6. (4分) 设边长为 3 的正方形的对角线长为 a . 下列关于 a 的四种说法：

① a 是无理数;

② a 可以用数轴上的一个点来表示;

③ $3 < a < 4$;

④ a 是 18 的算术平方根.

其中, 所有正确说法的序号是 ()

A. ①④

B. ②③

C. ①②④

D. ①③④

【考点】 22: 算术平方根; 26: 无理数; 29: 实数与数轴; 2B: 估算无理数的大小; LE: 正方形的性质.

【分析】 先利用勾股定理求出 $a=3\sqrt{2}$, 再根据无理数的定义判断①; 根据实数与数轴的关系判断②; 利用估算无理数大小的方法判断③; 利用算术平方根的定义判断④.

【解答】 解: $\because$ 边长为 3 的正方形的对角线长为 a ,

$$\therefore a = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

① $a=3\sqrt{2}$ 是无理数, 说法正确;

② a 可以用数轴上的一个点来表示, 说法正确;

③ $\because 16 < 18 < 25$, $4 < \sqrt{18} < 5$, 即 $4 < a < 5$, 说法错误;

④ a 是 18 的算术平方根, 说法正确.

所以说法正确的有①②④.

故选: C.

【点评】 本题主要考查了勾股定理, 实数中无理数的概念, 算术平方根的概念, 实数与数轴的关系, 估算无理数大小, 有一定的综合性.

二、填空题 (共 12 小题, 每小题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 因式分解: $xy^2 - 4x = \underline{x(y+2)(y-2)}$.

【考点】 55: 提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】先提取公因式 x ，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【解答】解： $xy^2 - 4x$,

$$=x(y^2 - 4),$$

$$=x(y+2)(y-2).$$

【点评】本题主要考查提公因式法分解因式和利用平方差公式分解因式，熟记公式是解题的关键，难点在于要进行二次因式分解.

8. (4 分) 不等式 $5 - x < x$ 的解集是 $x > \frac{5}{2}$.

【考点】C6: 解一元一次不等式.

【分析】先移项，再合并同类项，把 x 的系数化为 1 即可.

【解答】解：移项得， $-x - x < -5$,

合并同类项得， $-2x < -5$,

把 x 的系数化为 1 得， $x > \frac{5}{2}$.

故答案为： $x > \frac{5}{2}$.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式，熟知解一元一次不等式的基本步骤是解答此题的关键.

9. (4 分) 方程 $\sqrt{x+6}=x$ 的解为 3 .

【考点】AG: 无理方程.

【分析】首先将方程两边平方，去掉根号；然后解一元二次方程；根据题意确定方程解的范围，即可解决问题.

【解答】解： $\because \sqrt{x+6}=x$,

$$\therefore x^2 - x - 6 = 0,$$

解得： $x=3$ 或 $x=-2$;

由题意得： $x > 0$ ，且 $x \geq -6$,

$$\therefore x=3,$$

故答案为 3.

【点评】该题主要考查了无理方程的解法问题；解题的一般思路是将无理方程转化为有理方程；常用方法是平方法或换元法；最后应注意未知数的取值范围.

10. (4 分) 如果关于 x 的方程 $mx^2=3$ 有两个实数根, 那么 m 的取值范围是 $m > 0$.

【考点】A5: 解一元二次方程 – 直接开平方法.

【分析】直接利用直接开平方法的定义得出 m 的取值范围即可.

【解答】解: $\because$ 关于 x 的方程 $mx^2=3$ 有两个实数根,

$\therefore m > 0$.

故答案为: $m > 0$.

【点评】此题主要考查了直接开平方法解方程的意义, 正确把握开平方法解方程的定义是解题关键.

11. (4 分) 如果将抛物线 $y=x^2-4$ 平移到抛物线 $y=x^2-4x$ 的位置, 那么平移的方向和距离分别是 向右平移 2 个单位.

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】原抛物线顶点坐标为 $(0, -4)$, 平移后抛物线顶点坐标为 $(2, -4)$, 由此确定平移规律.

【解答】解: $\because$ 抛物线 $y=x^2-4$ 的顶点坐标是 $(0, -4)$, 抛物线 $y=x^2-4x=(x-2)^2-4$ 的顶点坐标是 $(2, -4)$,

$\therefore$ 把 $(0, -4)$ 向右平移 2 个单位得到 $(2, -4)$,

$\therefore$ 平移方法是: 向右平移 2 个单位.

故答案是: 向右平移 2 个单位.

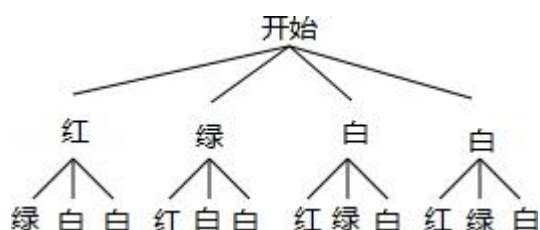
【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换. 关键是将抛物线的平移问题转化为顶点的平移, 寻找平移方法.

12. (4 分) 一个不透明盒子内装有大小、形状相同的四个球，其中红球 1 个、绿球 1 个、白球 2 个，小明摸出一个球不放回，再摸出一个球，则两次都摸到白球的概率是 $\frac{1}{6}$ 。

【考点】X6: 列表法与树状图法。

【分析】首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两次都摸到白球的情况，再利用概率公式即可求得答案。

【解答】解：画树状图得：



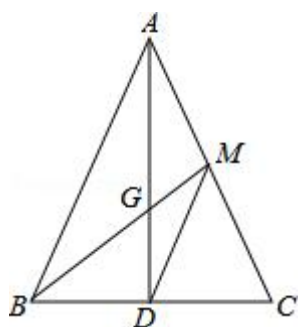
∴ 共有 12 种等可能的结果，两次都摸到白球的有 2 种情况，

∴ 两次都摸到白球的概率是： $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

故答案为： $\frac{1}{6}$ 。

【点评】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

13. (4 分) 如图， $\triangle ABC$ 中，如果 $AB=AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ， M 为 AC 中点， AD 与 BM 交于点 G ，那么 $S_{\triangle GDM} : S_{\triangle GAB}$ 的值为 $1:4$ 。



【考点】KX: 三角形中位线定理；S9: 相似三角形的判定与性质。

【分析】由已知条件易证 DM 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $DM \parallel AB$ ，进而可证明

$\triangle GMD \sim \triangle GAB$ ，由相似三角形的性质即可求出 $S_{\triangle GDM} : S_{\triangle GAB}$ 的值.

【解答】解： $\because AB=AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D，

$\therefore BD=CD$ ，

$\because M$ 为 AC 中点，

$\therefore DM$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DM \parallel AB$ ， $DM = \frac{1}{2}AB$ ，

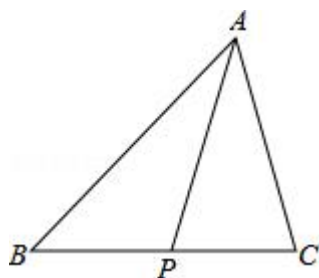
$\therefore \triangle GMD \sim \triangle GAB$ ，

$\therefore S_{\triangle GDM} : S_{\triangle GAB} = 1 : 4$.

故答案为 1 : 4.

【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质以及三角形中位线性定理，熟悉相似三角形的性质：相似三角形的面积比是相似比的平方是解题关键.

14. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，记 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，点 P 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AP} =$
 $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 来表示)



【考点】LM: *平面向量.

【分析】由三角形法则可求得 $\overrightarrow{BC}$ 的长，又由点 P 为 BC 的中点，即可求得 $\overrightarrow{BP}$ ，再利用三角形法则求解即可求得答案.

【解答】解： $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ，

∵ 点 P 为 BC 的中点,

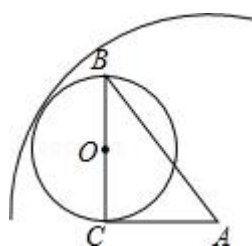
$$\therefore \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}.$$

故答案为: $\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$.

【点评】 此题考查了平面向量的知识. 注意掌握三角形法则的应用是解此题的关键.

15. (4 分) 如图, Rt△ABC 中, ∠ACB=90°, BC=4cm, AC=3cm, ⊙O 是以 BC 为直径的圆, 如果 ⊙O 与 ⊙S 相内切, 那么 ⊙A 的半径为 $\sqrt{13}+2$ cm.



【考点】 MK: 相切两圆的性质.

【分析】 连接 AO 并延长交 ⊙A 于 D, 则 $OD = \frac{1}{2} BC = 2$, 根据勾股定理求出 OA,

即可得出 $AD = OA + OD = \sqrt{13} + 2$.

【解答】 解: 连接 AO 并延长交 ⊙A 于 D, 如图所示:

∵ ⊙O 与 ⊙A 相内切,

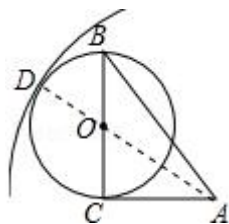
∴ D 为切点,

$$\therefore OD = \frac{1}{2} BC = 2,$$

∵ ∠ACB=90°, 根据勾股定理得: $OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$

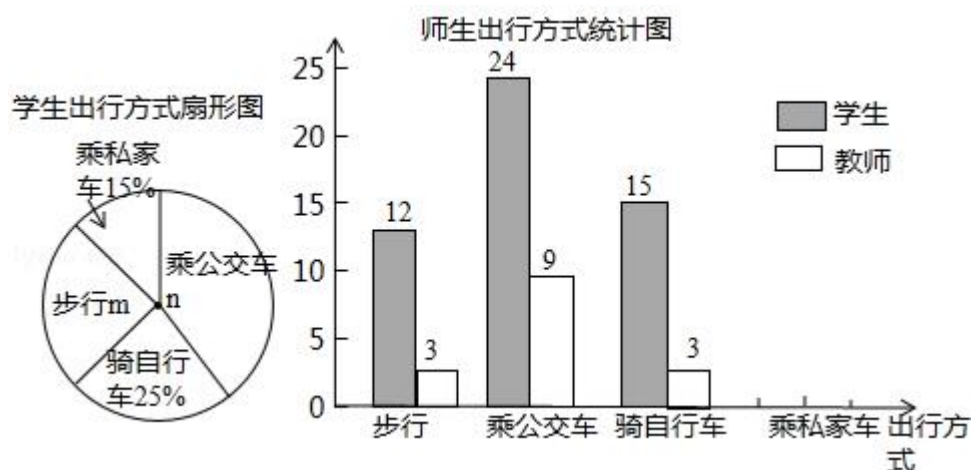
$$\therefore AD = OA + OD = \sqrt{13} + 2;$$

故答案为: $\sqrt{13} + 2$.



【点评】 本题考查了相切两圆的性质、勾股定理；通过作辅助线得出 AD 是 $\odot A$ 的半径是解决问题的关键.

16. (4 分) 本市某校开展以“倡导绿色出行，关爱师生健康”为主题的教育活动，为了了解本校师生的出行方式，在本校范围内随机抽查了部分师生，将收集的数据给绘制成下列不完整的两种统计图. 已知随机抽查的教师人数为学生人数的一半，根据图中信息，乘私家车出行的教师人数是 15.



【考点】 VB: 扇形统计图; VC: 条形统计图.

【分析】 根据骑自行车的学生人数和所占的百分比求出调查的总学生数，再根据随机抽查的教师人数为学生人数的一半，得出教师人数，再用教师人数减去步行、乘公交车和骑自行车的教师数，即可得出乘私家车出行的教师人数.

【解答】 解：调查的学生人数是： $15 \div 25\% = 60$ (人)，

则教师人数为 30 人，教师乘私家车出行的人数为 $30 - (3+9+3) = 15$ (人).

故答案为：15.

【点评】 此题考查了条形统计图和扇形统计图，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的

数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

17. (4 分) 对于平面直角坐标系 xOy 中的点 $P(a, b)$, 若点 P' 的坐标为 $(a+\frac{b}{k}, ka+b)$ (其中 k 为常数, 且 $k \neq 0$), 则称点 P' 为点 P 的“ k 属派生点”, 例如: $P(1, 4)$ 的“2 属派生点”为 $P'(1+\frac{4}{2}, 2 \times 1+4)$, 则 $P'(3, 6)$. 若点 P 的“ k 属派生点” P' 的坐标为 $(3, 3)$, 请写出一个符合条件的点 P 的坐标 $(1, 2)$.

【考点】D1: 点的坐标.

【专题】23: 新定义; 26: 开放型.

【分析】根据“ k 属派生点”的定义可知纵坐标是横坐标的 k 倍, 然后根据点 P' 的坐标求出 $k=1$, 然后求出点 P 的横坐标与纵坐标的关系, 再求解即可.

【解答】解: $\because k(a+\frac{b}{k})=ka+b$,

$\therefore$ “ k 属派生点”的纵坐标是横坐标的 k 倍,

$\therefore$ 点 P 的“ k 属派生点” P' 的坐标为 $(3, 3)$,

$\therefore 3k=3$,

解得 $k=1$,

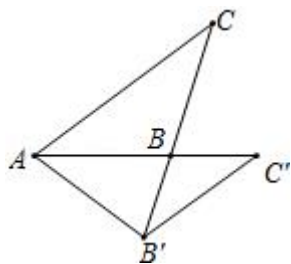
$\therefore a+b=3$,

$\therefore$ 点 P 的坐标可以是 $(1, 2)$.

故答案为: $(1, 2)$.

【点评】本题考查了点的坐标, 开放型题目, 读懂题目信息, 理解“ k 属派生点”的定义并判断出纵坐标是横坐标的 k 倍是解题的关键.

18. (4 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC > 90^\circ$, $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$, $BC=4$, 将三角形绕着点 A 旋转, 点 C 落在直线 AB 上的点 C' 处, 点 B 落在点 B' 处. 若 C 、 B 、 B' 恰好在一一直线上, 则 AB 的长为 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.



【考点】R2: 旋转的性质.

【分析】作 $B'M \perp AC$ 于点 M , 作 $CN \perp AC$ 于点 N . 则 $\triangle BMB' \sim \triangle BNC$, 设 $B'M=3x$, $CN=3y$, 则 $AM=4x$, $AN=4y$, 即可利用 y 表示出 BN 的长, 在直角 $\triangle BNC$ 中利用勾股定理求得 y 的值, 进而求得 x , 得到 AB 的长.

【解答】解: 作 $B'M \perp AC$ 于点 M , 作 $CN \perp AC$ 于点 N . 则 $\triangle BMB' \sim \triangle BNC$.

$$\therefore \angle B'AC = \angle BAC,$$

$$\therefore \tan \angle B'AC = \tan \angle BAC = \frac{B'M}{AM} = \frac{CN}{AN} = \frac{3}{4}.$$

$$\therefore \text{设 } B'M=3x, \text{ 则 } CN=3y, \text{ 则 } AM=4x, \text{ 则 } AN=4y,$$

$$\therefore \text{在直角 } \triangle AB'M \text{ 中, } AB' = \sqrt{AM^2 + B'M^2} = 5x,$$

$$\text{则 } AB = AB' = 5x,$$

$$\therefore BM = x,$$

$$\therefore \triangle BMB' \sim \triangle BNC,$$

$$\therefore \frac{CN}{BN} = \frac{B'M}{BM} = \frac{3x}{x} = 3,$$

$$\therefore BN = \frac{CN}{3} = \frac{3y}{3} = y.$$

$$\text{则 } 5x + y = 4y,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3}{5}y.$$

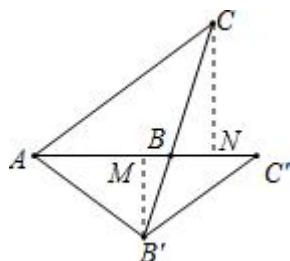
$$\text{又 } \therefore \text{直角 } \triangle BCN \text{ 中, } BN^2 + CN^2 = BC^2$$

$$\text{即 } y^2 + (3y)^2 = 16,$$

解得: $y = \frac{2\sqrt{10}}{5}$,

则 $x = \frac{6\sqrt{10}}{25}$, $AB = 5x = \frac{6\sqrt{10}}{5}$.

故答案是: $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.



【点评】 本题考查了旋转的性质以及相似三角形的判定与性质, 正确理解旋转的性质, 作出辅助线, 得到 x 和 y 的关系是关键.

三、解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $(\sqrt{2}-1)^0 - \sqrt{75} + 2\cos 30^\circ + (\frac{1}{2})^{-1} + |\sqrt{3}-1|$.

【考点】 2C: 实数的运算; 6E: 零指数幂; 6F: 负整数指数幂; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 原式第一项利用零指数幂法则计算, 第二项化为最简二次根式, 第三项利用特殊角的三角函数值计算, 第四项利用负指数幂法则计算, 最后一项利用绝对值的代数意义化简, 计算即可得到结果.

【解答】 解: 原式 $= 1 - 5\sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + \sqrt{3} - 1 = 2 - 3\sqrt{3}$.

【点评】 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} xy=3 \\ x^2-2xy+y^2-4=0 \end{cases}$$

【考点】 AF: 高次方程.

【分析】 运用因式分解法把 $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ 化为 $x - y = 2$ 和 $x - y = -2$ 两个方程, 把这两个方程与 $xy = 3$ 组成方程组, 解方程组得到答案.

【解答】解：
$$\begin{cases} xy=3 & \text{①} \\ x^2-2xy+y^2-4=0 & \text{②} \end{cases}$$

由②得， $x-y=\pm 2$ ③

③分别与①组成方程组得，

$$\begin{cases} x-y=2 \\ xy=3 \end{cases}, \begin{cases} x-y=-2 \\ xy=3 \end{cases}$$

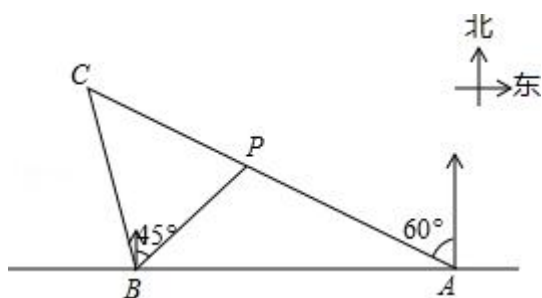
解得 $\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-3 \end{cases}, \begin{cases} x_3=-3 \\ y_3=-1 \end{cases}, \begin{cases} x_4=1 \\ y_4=3 \end{cases}$

【点评】 本题考查的是二元二次方程组的解法，解题的关键是把其中一个二元二次方程，通过因式分解化为两个二元一次方程，与另一个方程组成一个简单的方程组，解这两个方程组，得到原方程组的解.

21. (10 分) 如图，在一笔直的海岸线 l 上有 AB 两个观测站， A 在 B 的正东方向， $AB=2$ (单位: km). 有一艘小船在点 P 处，从 A 测得小船在北偏西 60° 的方向，从 B 测得小船在北偏东 45° 的方向.

(1) 求点 P 到海岸线 l 的距离;

(2) 小船从点 P 处沿射线 AP 的方向航行一段时间后，到点 C 处，此时，从 B 测得小船在北偏西 15° 的方向. 求点 C 与点 B 之间的距离. (上述两小题的结果都保留根号)



【考点】 TB: 解直角三角形的应用 - 方向角问题.

【分析】 (1) 过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D ，设 $PD=x$ km，先解 $Rt\triangle PBD$ ，用含 x 的代数式表示 BD ，再解 $Rt\triangle PAD$ ，用含 x 的代数式表示 AD ，然后根据 $BD+AD=AB$ ，列出关于 x 的方程，解方程即可；

(2) 过点 B 作 $BF \perp AC$ 于点 F, 先解 $Rt\triangle ABF$, 得出 $BF = \frac{1}{2}AB = 1\text{km}$, 再解 $Rt\triangle BCF$, 得出 $BC = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}\text{km}$.

【解答】解: (1) 如图, 过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D. 设 $PD = x\text{km}$.

在 $Rt\triangle PBD$ 中, $\angle BDP = 90^\circ$, $\angle PBD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

$\therefore BD = PD = x\text{km}$.

在 $Rt\triangle PAD$ 中, $\angle ADP = 90^\circ$, $\angle PAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$\therefore AD = \sqrt{3}PD = \sqrt{3}x\text{km}$.

$\therefore BD + AD = AB$,

$\therefore x + \sqrt{3}x = 2$,

$x = \sqrt{3} - 1$,

$\therefore$ 点 P 到海岸线 l 的距离为 $(\sqrt{3} - 1)\text{km}$;

(2) 如图, 过点 B 作 $BF \perp AC$ 于点 F.

根据题意得: $\angle ABC = 105^\circ$,

在 $Rt\triangle ABF$ 中, $\angle AFB = 90^\circ$, $\angle BAF = 30^\circ$,

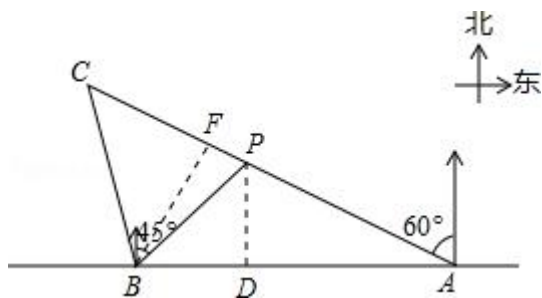
$\therefore BF = \frac{1}{2}AB = 1\text{km}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = 45^\circ$.

在 $Rt\triangle BCF$ 中, $\angle BFC = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$,

$\therefore BC = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}\text{km}$,

$\therefore$ 点 C 与点 B 之间的距离为 $\sqrt{2}\text{km}$.



【点评】 本题考查了解直角三角形的应用－方向角问题，难度适中．通过作辅助线，构造直角三角形是解题的关键．

22. (10 分) 现有甲、乙两个空调安装队分别为 A、B 两个公司安装空调，甲安装队为 A 公司安装 66 台空调，乙安装队为 B 公司安装 80 台空调，乙安装队提前一天开工，最后与甲安装队恰好同时完成安装任务．已知甲队比乙队平均每天多安装 2 台空调，求甲、乙两个安装队平均每天各安装多少台空调．

【考点】 B7：分式方程的应用．

【分析】 设甲安装队每天安装 x 台空调，则乙安装队每天安装 $(x - 2)$ 台空调，根据乙队比甲队多用时间一天为等量关系建立方程求出其解即可．

【解答】 解：设甲安装队每天安装 x 台空调，则乙安装队每天安装 $(x - 2)$ 台空调，由题意，得

$$\frac{66}{x} - \frac{80}{x-2} = 1,$$

解得： $x_1 = 22$ ， $x_2 = -6$ ．

经检验， $x_1 = 22$ ， $x_2 = -6$ 都是原方程的根， $x = -6$ 不符合题意，舍去．

$\therefore x = 22$ ，

$\therefore$ 乙安装队每天安装 $22 - 2 = 20$ 台．

答：甲安装队每天安装 22 台空调，则乙安装队每天安装 20 台空调．

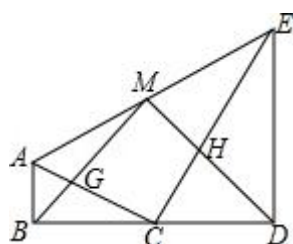
【点评】 本题考查了列分式方程解实际问题的运用，分式方程的解法的运用，过程问题的数量关系的运用，解答时根据乙队比甲队多用时间一天为等量关系建立方程是关键．

23. (12 分) 已知：如图， $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$ ，且 BC 与 CD 共

线，联结 AE，点 M 为 AE 中点，联结 BM，交 AC 于点 G，联结 MD，交 CE 于点 H

(1) 求证：MB=MD；

(2) 当 AB=BC，DC=DE 时，求证：四边形 MGCH 为矩形.



【考点】KD：全等三角形的判定与性质；LC：矩形的判定；S4：平行线分线段成比例.

【专题】14：证明题.

【分析】(1) 延长 BM 交 DE 的延长线于 N，如图，根据平行线分线段成比例定理，由 $AB \parallel DN$ 得到 $\frac{BM}{MN} = \frac{AM}{ME}$ ，加上 $AM=ME$ ，则 $BM=MN$ ，然后根据直角三角形斜边上的中线性质的性质即可得到 $MB=MD$ ；

(2) 根据平行线分线段成比例定理，由 $AB \parallel NE$ 得到 $\frac{AB}{NE} = \frac{AM}{ME} = 1$ ，即 $AB=NE$ ，再利用 $AB=BC$ ， $DC=DE$ 可得 $BD=DN$ ，则 $\triangle BDN$ 为等腰直角三角形，所以 $DM \perp BN$ ， $\angle DBN = \angle N = 45^\circ$ ， $\angle BMD = 90^\circ$ ，接着由 $\text{Rt} \triangle ABC$ 和 $\text{Rt} \triangle CDE$ 都是等腰直角三角形得到 $\angle CED = \angle ACB = 45^\circ$ ，则可得到 $CE \parallel BN$ ， $AC \parallel DM$ ，于是可判断四边形 MGCH 为平行四边形，加上 $\angle GMH = 90^\circ$ ，则可判断四边形 MGCH 为矩形.

【解答】证明：(1) 延长 BM 交 DE 的延长线于 N，如图，

$$\therefore \angle ABC = \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel DN,$$

$$\therefore \frac{BM}{MN} = \frac{AM}{ME},$$

而点 M 为 AE 中点,

$$\therefore AM = ME,$$

$$\therefore BM = MN,$$

$\therefore$ DM 为 Rt $\triangle$ BDN 的斜边上的中线,

$$\therefore MB = MD;$$

$$(2) \because AB \parallel NE,$$

$$\therefore \frac{AB}{NE} = \frac{AM}{ME} = 1, \text{ 即 } AB = NE,$$

$$\therefore AB = BC, \quad DC = DE,$$

$$\therefore BD = BC + CD = AB + DE = NE + DE = DN,$$

$\therefore \triangle$ BDN 为等腰直角三角形,

$$\therefore DM \perp BN, \quad \angle DBN = \angle N = 45^\circ, \quad \angle BMD = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = BC, \quad DC = DE,$$

$\therefore$ Rt $\triangle$ ABC 和 Rt $\triangle$ CDE 都是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle CED = \angle ACB = \angle 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = \angle N, \quad \angle ACB = \angle BDM,$$

$$\therefore CE \parallel BN, \quad AC \parallel DM,$$

$\therefore$ 四边形 MGCH 为平行四边形,

而 $\angle GMH = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 MGCH 为矩形.

一步代入 B 点求得答案即可；

(2) 由题意表示出点 D 和点 C 坐标，进一步利用等腰直角三角形的性质和锐角三角函数的意义求得答案即可；

(3) 由 (2) 的图形延长 AC 交对称轴于点 F，求得直线 AC，进一步证得 $\triangle ADF \sim \triangle CDP$ ，利用相似的性质求得 DP，进一步确定点 P 的坐标即可.

【解答】 解：(1) $\because$ 直线 $y=x+1$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，

$\therefore$ 点 A $(-1, 0)$ ，点 B $(0, 1)$ ，

$\because$ 顶点 D 在直线 AB 上，

$$\therefore y = \frac{1}{2}(x-m)^2 + m + 1,$$

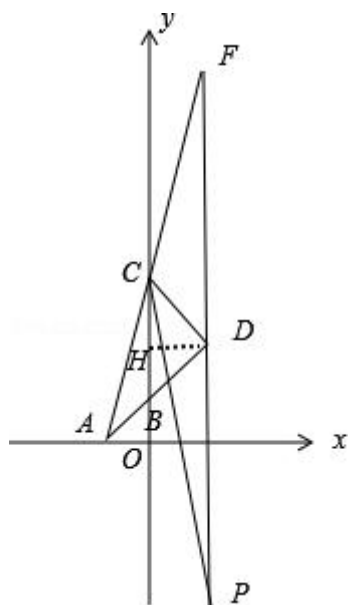
把点 B $(0, 1)$ 代入得

$$1 = \frac{1}{2}m^2 + m + 1,$$

解得： $m = -2$ 或 $m = 0$ (不合题意舍去)，

$$\therefore y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1;$$

(2) 如图，



由题意可知：

点 D (m, m+1), C (0, $\frac{1}{2}m^2+m+1$),

$\therefore$ 在 Rt $\triangle ABO$ 中, $AO=BO=1$, $CD \perp AB$,

$\therefore \triangle CDB$ 为等腰直角三角形,

作 $DH \perp BC$, 则 $DH = \frac{1}{2}BC$,

$$\therefore m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}m^2 + m + 1 - 1 \right),$$

解得 $m=2$,

$\therefore C (0, 5)$, $D (2, 3)$, $CD=2\sqrt{2}$, $AD=3\sqrt{2}$,

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{3}.$$

(3) 延长 AC 交对称轴于点 F,

直线 AC: $y=5x+5$,

则 F (2, 15),

$\therefore \angle DCP = \angle CAD$, $\angle APF = \angle CDP = 135^\circ$,

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CDP$,

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{DF}{DP},$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{12}{DP}$$

解得 $DP=8$,

又 $\therefore$ 点 D (2, 3)

$\therefore P (2, -5)$.

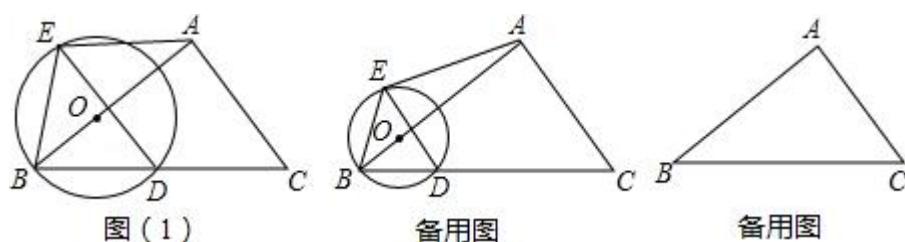
【点评】 此题考查二次函数综合题, 综合考查待定系数法求函数解析式, 锐角三角函数的意义, 等腰直角三角形的性质, 相似的判定与性质, 画出图形, 利用数形结合的思想解决问题.

25. (14 分) 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $BC=10$, $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$, 点 O 是

AB 边上动点, 以 O 为圆心, OB 为半径的 $\odot O$ 与边 BC 的另一交点为 D, 过

点 D 作 AB 的垂线，交 $\odot O$ 于点 E ，联结 BE 、 AE

- (1) 当 $AE \parallel BC$ (如图 (1)) 时，求 $\odot O$ 的半径长；
- (2) 设 $BO=x$ ， $AE=y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；
- (3) 若以 A 为圆心的 $\odot A$ 与 $\odot O$ 有公共点 D 、 E ，当 $\odot A$ 恰好也过点 C 时，求 DE 的长.



【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质; KG: 线段垂直平分线的性质; KH: 等腰三角形的性质; KQ: 勾股定理; L7: 平行四边形的判定与性质; MR: 圆的综合题; T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】 16: 压轴题.

- 【分析】** (1) 过点 O 作 $OG \perp BD$ 于 G ，设 AB 与 DE 的交点为 F ，如图 (1)，易证 $\triangle AEF \cong \triangle BDF$ 及四边形 $AEDC$ 是平行四边形，从而可得 $BD=DC=5$ ，根据垂径定理可得 $BG=DG=\frac{1}{2}BD=\frac{5}{2}$ ，然后在 $Rt\triangle BGO$ 中运用三角函数和勾股定理即可求出 $\odot O$ 的半径长；
- (2) 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，如图 (2)，运用三角函数、勾股定理及面积法可求出 AC 、 AB 、 AH 、 BH 、 CH ，根据垂径定理可得 $DF=EF$ ，再根据线段垂直平分线的性质可得 $AE=AD$ 。然后在 $Rt\triangle BGO$ 中运用三角函数和勾股定理可求出 BG (用 x 的代数式表示)，进而可用 x 的代数式依次表示出 BD 、 DH ， AD 、 AE ，问题得以解决；
- (3) ①若点 D 在 H 的左边，如图 (2)，根据等腰三角形的性质可得 $DH=CH$ ，

从而依次求出 BD、DF、DE 的长；②若点 D 在 H 的右边，则点 D 与点 C 重合，从而可依次求出 BD、DF、DE 的长.

【解答】解：(1) 过点 O 作 $OG \perp BD$ 于 G，设 AB 与 DE 的交点为 F，如图 (1)，

$\therefore OG \perp BD$ 于 G，

$\therefore BG=DG$.

$\therefore DE \perp AB$,

$\therefore EF=DF$,

$\therefore AE \parallel BC$,

$\therefore \angle AEF = \angle BDF$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle BDF$ 中，

$$\begin{cases} \angle AEF = \angle BDF \\ EF = DF \\ \angle AFE = \angle BFD \end{cases},$$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BDF$,

$\therefore AE=BD$.

$\therefore \angle BFD = \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore DE \parallel AC$.

$\therefore AE \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 AEDC 是平行四边形，

$\therefore AE=DC$,

$\therefore BD=DC=\frac{1}{2}BC=5$,

$\therefore BG=DG=\frac{1}{2}BD=\frac{5}{2}$.

在 $Rt\triangle BGO$ 中，

$$\begin{aligned}\tan \angle OBG &= \frac{OG}{BG} = \frac{3}{4}, \\ \therefore OG &= \frac{3}{4}BG = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}, \\ \therefore OB &= \sqrt{BG^2 + OG^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{25}{8}, \\ \therefore \odot O \text{ 的半径长为 } &\frac{25}{8};\end{aligned}$$

(2) 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H, 如图 (2),

在 $Rt\triangle BAC$ 中,

$$\tan \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4},$$

设 $AC=3k$, 则 $AB=4k$,

$$\therefore BC=5k=10,$$

$$\therefore k=2,$$

$$\therefore AC=6, AB=8,$$

$$\therefore AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{8 \times 6}{10} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\left(8 + \frac{24}{5}\right)\left(8 - \frac{24}{5}\right)} = \frac{32}{5},$$

$$\therefore HC = BC - BH = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5}.$$

$$\therefore AB \perp DE,$$

$\therefore$ 根据垂径定理可得 $DF=EF$,

$\therefore AB$ 垂直平分 DE ,

$$\therefore AE=AD.$$

在 $Rt\triangle BGO$ 中,

$$\tan \angle OBG = \frac{OG}{BG} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore OG = \frac{3}{4}BG,$$

$$\therefore OB = \sqrt{OG^2 + BG^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}BG\right)^2 + BG^2} = \frac{5}{4}BG = x,$$

$$\therefore BG = \frac{4}{5}x,$$

$$\therefore BD = 2BG = \frac{8}{5}x,$$

$$\therefore DH = BH - BD = \frac{32}{5} - \frac{8}{5}x,$$

$$\begin{aligned} \therefore y = AE = AD &= \sqrt{DH^2 + AH^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{5}x\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{64}{25}x^2 - \frac{512}{25}x + 64} \\ &= \frac{8\sqrt{x^2 - 8x + 5}}{5} \quad (0 < x \leq \frac{25}{4}); \end{aligned}$$

(3) ①若点 D 在 H 的左边, 如图 (2),

$$\therefore AD = AC, \quad AH \perp DC,$$

$$\therefore DH = CH = \frac{18}{5},$$

$$\therefore BD = BH - DH = \frac{32}{5} - \frac{18}{5} = \frac{14}{5}.$$

在 Rt△BFD 中,

$$\tan \angle FBD = \frac{DF}{BF} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BF = \frac{4}{3}DF,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BF^2 + DF^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4}{3}DF\right)^2 + DF^2}$$

$$= \frac{5}{3}DF = \frac{14}{5},$$

$$\therefore DF = \frac{42}{25},$$

$$\therefore DE = 2DF = \frac{84}{25};$$

②若点 D 在 H 的右边,

则点 D 与点 C 重合,

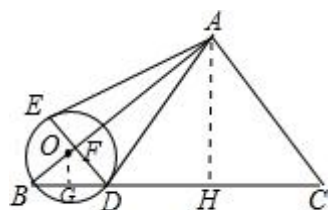
$$\therefore BD=BC=10,$$

$$\therefore \frac{5}{3}DF=10,$$

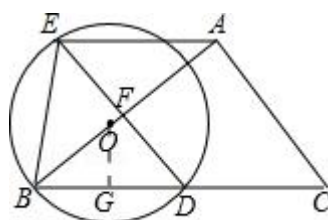
$$\therefore DF=6,$$

$$\therefore DE=2DF=12.$$

综上所述：当 $\odot A$ 恰好也过点 C 时， DE 的长为 $\frac{84}{25}$ 或 12 。



图(2)



图(1)

【点评】 本题主要考查了垂径定理、全等三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、三角函数、勾股定理、等腰三角形的性质、线段垂直平分线的性质等知识，在解决问题的过程中用到了分类讨论、面积法等重要的数学思想方法，有一定的难度，把 AE 转化为 AD 是解决第(2)小题的关键，运用分类讨论的思想是解决第(3)小题的关键。