

2015 年上海市青浦区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列各式中与 $(-a^2)^3$ 相等的是 ()

- A. a^5 B. a^6 C. $-a^5$ D. $-a^6$

2. (4 分) 下列方程中，有实数解的是 ()

- A. $\sqrt{x-2} = -1$ B. $\sqrt{x-2} = -x$ C. $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$ D. $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$

3. (4 分) 将抛物线 $y = (x-1)^2$ 向左平移 2 个单位，所得抛物线的表达式为 ()

- A. $y = (x+1)^2$ B. $y = (x-3)^2$ C. $y = (x-1)^2+2$ D. $y = (x-1)^2-2$

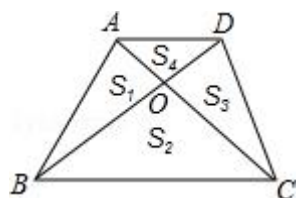
4. (4 分) 如果直角三角形的面积一定，那么下列关于这个直角三角形边的关系中，正确的是 ()

- A. 两条直角边成正比例
B. 两条直角边成反比例
C. 一条直角边与斜边成正比例
D. 一条直角边与斜边成反比例

5. (4 分) 在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， AC 平分 $\angle DAB$ ， AC 与 BD 相交于点 O ，要使四边形 $ABCD$ 是菱形，那么还需满足下列条件中的 ()

- A. $CD = CB$ B. $OB = OD$ C. $OA = OC$ D. $AC \perp BD$

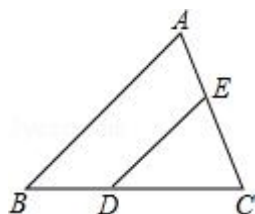
6. (4 分) 如图，已知在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，如果对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 、 $\triangle DOA$ 的面积分别记作 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ，那么下列结论中，不正确的是 ()



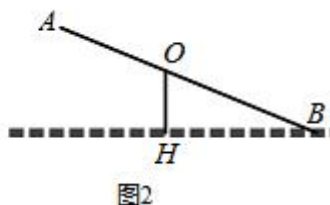
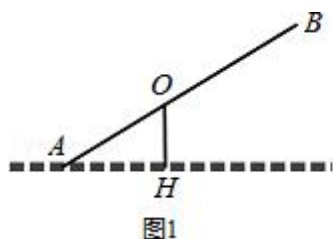
- A. $S_1 = S_3$ B. $S_2 = 2S_4$
C. $S_2 = 2S_1$ D. $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4分) 计算: $4^{-\frac{1}{2}} + 4^0 =$ _____.
8. (4分) 使代数式 $\sqrt{2x-1}$ 有意义的实数 x 的取值范围为 _____.
9. (4分) 如果方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值是 _____.
10. (4分) 布袋中有两个红球和两个白球除了颜色外其他都相同, 从中摸出两个球, 那么摸到一红一白两球概率为 _____.
11. (4分) 如果抛物线 $y = (a+3)x^2 - 5$ 不经过第一象限, 那么 a 的取值范围是 _____.
12. (4分) 已知二次函数的图象经过点 $(1, 3)$, 对称轴为直线 $x = -1$, 由此可知这个二次函数的图象一定经过除点 $(1, 3)$ 外的另一点, 这点的坐标是 _____.
13. (4分) 如图, 已知 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC 和 AC 上的点, $AE = 2, CE = 3$, 要使 $DE \parallel AB$, 那么 $BC: CD$ 应等于 _____.



14. (4分) 已知点 G 是面积为 27cm^2 的 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $\triangle AGC$ 的面积等于 _____.
15. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的中线. 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. 那么 $\overrightarrow{AD} =$ _____ . (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).
16. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 是 AB 的中点, 如果 $BC = 3, CD = 2$, 那么 $\cos \angle DCB =$ _____.
17. (4分) 已知不等臂跷跷板 AB 长为 3 米, 当 AB 的一端点 A 碰到地面时 (如图 1), AB 与地面的夹角为 30° ; 当 AB 的另一端点 B 碰到地面时 (如图 2), AB 与地面的夹角的正弦值为 $\frac{1}{3}$, 那么跷跷板 AB 的支撑点 O 到地面的距离 $OH =$ _____ 米.



18. (4分) 把一个三角形绕其中一个顶点逆时针旋转并放大或缩小(这个顶点不变), 我们把这样的三角形运动称为三角形的 T -变换, 这个顶点称为 T -变换中心, 旋转角称为 T -变换角, 三角形与原三角形的对应边之比称为 T -变换比; 已知 $\triangle ABC$ 在直角坐标平面内, 点 $A(0, -1)$, $B(-\sqrt{3}, 2)$, $C(0, 2)$, 将 $\triangle ABC$ 进行 T -变换, T -变换中心为点 A , T -变换角为 60° , T -变换比为 $\frac{2}{3}$, 那么经过 T -变换后点 C 所对应的点的坐标为_____.

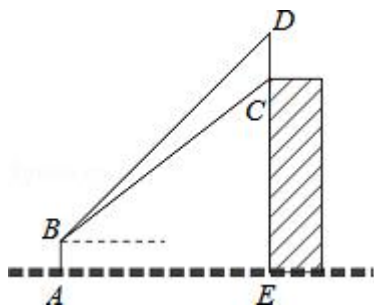
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 化简: $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} + \frac{x^2+2x}{x^2+x-2}$, 并求当 $x = \sqrt{3}$ 时的值.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy-2y^2-x+2y=0 \end{cases}$$
.

21. (10分) 已知直线 $x = m$ ($m > 0$) 与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 和直线 $y = -x - 2$ 分别相交于点 A 、 B , 且 $AB = 7$, 求 m 的值.

22. (10分) 如图, 某幢大楼的外墙边上竖直安装着一根旗杆 CD , 小明在离旗杆下方大楼底部 E 点 24 米的点 A 处放置一台测角仪, 测角仪的高度 AB 为 1.5 米, 并在点 B 处测得旗杆下端 C 的仰角为 40° , 上端 D 的仰角为 45° , 求旗杆 CD 的长度; (结果精确到 0.1 米, 参考数据: $\sin 40^\circ \approx 0.64$, $\cos 40^\circ \approx 0.77$, $\tan 40^\circ \approx 0.84$)

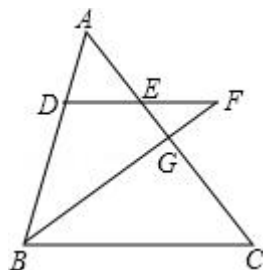


23. (12分) 已知如图, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点, $DE \parallel BC$, 交边 AC 于点 E ,

延长 DE 至点 F , 使 $EF = DE$, 联结 BF , 交边 AC 于点 G , 联结 CF

(1) 求证: $\frac{AE}{AC} = \frac{EG}{CG}$;

(2) 如果 $CF^2 = FG \cdot FB$, 求证: $CG \cdot CE = BC \cdot DE$.

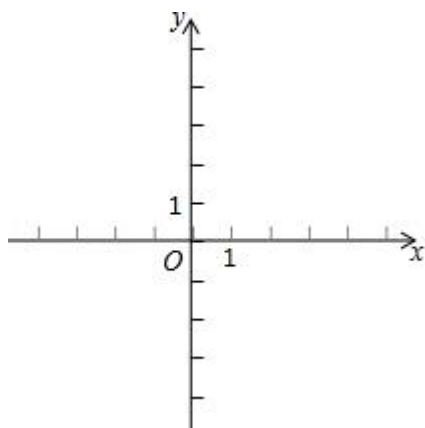


24. (12 分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象经过点 $(1, -3)$ 和点 $(-1, 5)$;

(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 将这个二次函数的图象向上平移, 交 y 轴于点 C , 其纵坐标为 m , 请用 m 的代数式表示平移后函数图象顶点 M 的坐标;

(3) 在第 (2) 小题的条件下, 如果点 P 的坐标为 $(2, 3)$, CM 平分 $\angle PCO$, 求 m 的值.

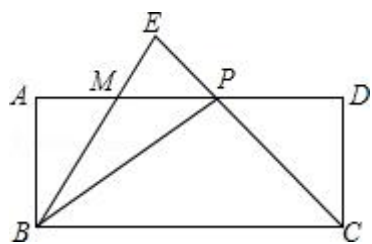


25. (14 分) 已知在矩形 $ABCD$ 中, P 是边 AD 上的一动点, 联结 BP 、 CP , 过点 B 作射线交线段 CP 的延长线于点 E , 交边 AD 于点 M , 且使得 $\angle ABE = \angle CBP$, 如果 $AB = 2$, $BC = 5$, $AP = x$, $PM = y$;

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出它的定义域;

(2) 当 $AP = 4$ 时, 求 $\angle EBP$ 的正切值;

(3) 如果 $\triangle EBC$ 是以 $\angle EBC$ 为底角的等腰三角形, 求 AP 的长.



2015 年上海市青浦区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列各式中与 $(-a^2)^3$ 相等的是（ ）

A. a^5

B. a^6

C. $-a^5$

D. $-a^6$

【考点】47：幂的乘方与积的乘方.

【分析】根据幂的乘方和积的乘方的运算法则求解.

【解答】解： $(-a^2)^3 = -a^6$.

故选：D.

【点评】本题考查了幂的乘方和积的乘方，解答本题的关键是掌握幂的乘方和积的乘方的运算法则.

2.（4 分）下列方程中，有实数解的是（ ）

A. $\sqrt{x-2} = -1$

B. $\sqrt{x-2} = -x$

C. $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$

D. $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$

【考点】AG：无理方程；B2：分式方程的解.

【分析】对所给的方程逐一分析、判断，即可解决问题.

【解答】解： $\because \frac{x^2-4}{x-2} = 0$,

$$\therefore x^2 - 4 = 0,$$

$$\therefore x = -2 \text{ 或 } 2;$$

经检验： $x = 2$ 是原方程的增根，

$$\therefore \text{原方程的解为 } x = -2,$$

故选：C.

【点评】该题主要考查了无理方程或分式方程的求解、判断问题；解题的关键是借助无理方程或分式方程的有关定理、定义，来灵活分析、判断、求解.

3.（4 分）将抛物线 $y = (x-1)^2$ 向左平移 2 个单位，所得抛物线的表达式为（ ）

A. $y = (x+1)^2$

B. $y = (x-3)^2$

C. $y = (x-1)^2 + 2$

D. $y = (x-1)^2 - 2$

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【专题】46：几何变换.

【分析】先根据二次函数的性质得到抛物线 $y = (x - 1)^2$ 的顶点坐标为 $(1, 0)$ ，再利用点平移的规律得到点 $(1, 0)$ 平移后对应点的坐标为 $(-1, 0)$ ，然后根据顶点式写出平移后抛物线的表达式.

【解答】解：抛物线 $y = (x - 1)^2$ 的顶点坐标为 $(1, 0)$ ，点 $(1, 0)$ 向左平移 2 个单位得到对应点的坐标为 $(-1, 0)$ ，所以平移后抛物线的表达式为 $y = (x + 1)^2$.

故选：A.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换：由于抛物线平移后的形状不变，故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式.

4. (4 分) 如果直角三角形的面积一定，那么下列关于这个直角三角形边的关系中，正确的是 ()

- A. 两条直角边成正比例
- B. 两条直角边成反比例
- C. 一条直角边与斜边成正比例
- D. 一条直角边与斜边成反比例

【考点】F2：正比例函数的定义；G1：反比例函数的定义.

【分析】直角三角形的面积一定，则该直角三角形的两直角边的乘积一定.

【解答】解：设该直角三角形的两直角边是 a 、 b ，面积为 S . 则

$$S = \frac{1}{2}ab.$$

$\because S$ 为定值，

$\therefore ab = 2S$ 是定值，

则 a 与 b 成反比例关系，即两条直角边成反比例.

故选：B.

【点评】本题考查了反比例函数和正比例函数的定义. 反比例函数上点的坐标的横、纵坐标的乘积是定值.

5. (4 分) 在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， AC 平分 $\angle DAB$ ， AC 与 BD 相交于点 O ，

要使四边形 $ABCD$ 是菱形，那么还需满足下列条件中的（ ）

- A. $CD = CB$ B. $OB = OD$ C. $OA = OC$ D. $AC \perp BD$

【考点】L9：菱形的判定.

【分析】根据等腰三角形的性质可得 $BO = DO$ ，再添加条件 $AO = CO$ ，可得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又 $AB = AD$ ，再根据邻边相等的平行四边形是菱形可进行判定.

【解答】解：添加条件 $AO = CO$ ，

$\because AB = AD$ ， AC 平分 $\angle DAB$ ，

$\therefore BO = DO$ ，

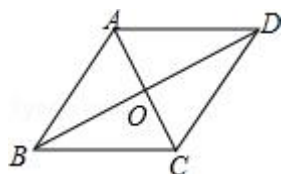
$\because AO = CO$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\because AB = AD$ ，

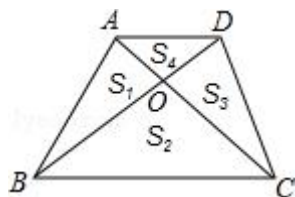
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

故选：C.



【点评】此题主要考查了菱形的判定，关键是掌握邻边相等的平行四边形是菱形.

6. (4分) 如图，已知在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，如果对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 、 $\triangle DOA$ 的面积分别记作 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ，那么下列结论中，不正确的是（ ）



A. $S_1 = S_3$

B. $S_2 = 2S_4$

C. $S_2 = 2S_1$

D. $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

【考点】S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】证三角形相似，再根据三角形的面积公式和相似三角形的面积比等于相似比的平方，以及三角形的面积公式即可得出结论.

【解答】解：A、 $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 同底、同高，则 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$ ，

$\therefore S_1 = S_3$ ，故命题正确；

B、 $\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$ ，

又 $\because BC = 2AD$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle COB}}{S_{\triangle AOD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

则 $S_2 = 2S_4$ 正确．故命题错误；

C、作 $MN \perp BC$ 于点 N ，交 AD 于点 M ．

$\because \triangle AOD \sim \triangle COB$ ，

又 $\because BC = 2AD$ ，

$$\therefore \frac{OM}{ON} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{ON}{MN} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3},$$

则设 $S_{\triangle OBC} = 2x$ ，则 $S_{\triangle ABC} = 3x$ ，则 $S_{\triangle AOB} = x$ ，

即 $S_2 = 2S_1$ ，故命题正确；

D、设 $AD = y$ ，则 $BC = 2y$ ，设 $OM = z$ ，则 $ON = 2z$ ，

$$\text{则 } S_2 = \frac{1}{2} \times 2y \times 2z = 2yz, \quad S_4 = \frac{1}{2} \times y \times z = \frac{1}{2}yz,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot MN = \frac{1}{2} \times 2y \cdot 3z = 3yz,$$

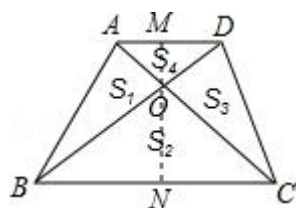
$$\text{则 } S_1 = S_3 = 3yz - 2yz = yz,$$

$$\text{则 } S_1 \cdot S_3 = yz \cdot yz,$$

$$S_2 \cdot S_4 = 2yz \cdot \frac{1}{2}yz,$$

故 $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ 正确．

故选：B．



【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，相似三角形面积的比等于相似比的平方．

平方，高线的比等于相似比，正确表示出 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ，是解决本题的关键.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 计算： $4^{-\frac{1}{2}} + 4^0 = \frac{3}{2}$.

【考点】2F：分数指数幂；6E：零指数幂.

【分析】根据分数指数幂的运算法则进行计算.

【解答】解：原式 $= \frac{1}{\sqrt{4}} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

故答案是： $\frac{3}{2}$.

【点评】本题考查了分数指数幂和零指数幂. 任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1.

8. (4 分) 使代数式 $\sqrt{2x-1}$ 有意义的实数 x 的取值范围为 $x \geq \frac{1}{2}$.

【考点】72：二次根式有意义的条件.

【分析】二次根式的被开方数是非负数.

【解答】解：依题意得 $2x - 1 \geq 0$,

解得 $x \geq \frac{1}{2}$.

故答案是： $x \geq \frac{1}{2}$.

【点评】考查了二次根式的意义和性质. 概念：式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 叫二次根式. 性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义.

9. (4 分) 如果方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根，那么 m 的值是 $\frac{9}{4}$.

【考点】AA：根的判别式.

【分析】由方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根，即可得根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，即可得方程 $9 - 4m = 0$ ，解此方程即可求得答案.

【解答】解： $\because$ 方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times m = 9 - 4m = 0,$$

解得： $m = \frac{9}{4}$.

故答案为： $\frac{9}{4}$.

【点评】此题考查了一元二次方程根的判别式的知识. 此题比较简单，注意掌握

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：①当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；②当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；③当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根。

10. (4分) 布袋中有两个红球和两个白球除了颜色外其他都相同，从中摸出两个球，那么摸到一红一白两球概率为 $\frac{2}{3}$ 。

【考点】 X6：列表法与树状图法。

【分析】 列举出所有情况，看所求的情况占总情况的多少即可求出摸到一红一白两球概率。

【解答】 解：画树形图得：



共有 $4 \times 3 = 12$ 种可能，所以摸到一红一白两球概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

故答案为： $\frac{2}{3}$

【点评】 此题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验．用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。

11. (4分) 如果抛物线 $y = (a+3)x^2 - 5$ 不经过第一象限，那么 a 的取值范围是 $a < -3$ 。

【考点】 H3：二次函数的性质。

【分析】 根据抛物线 $y = (a+3)x^2 - 5$ 不经过第一象限可以确定不等式的开口方向，从而确定 a 的取值范围。

【解答】 解： $\because$ 抛物线 $y = (a+3)x^2 - 5$ 不经过第一象限，

$$\therefore a+3 < 0,$$

解得： $a < -3$,

故答案为： $a < -3$ 。

【点评】 考查了二次函数的性质，根据抛物线的开口方向，与 y 轴的交点，对称轴判断抛物线经过的象限。

12. (4分) 已知二次函数的图象经过点 $(1, 3)$, 对称轴为直线 $x = -1$, 由此可知这个二次函数的图象一定经过除点 $(1, 3)$ 外的另一点, 这点的坐标是 $(-3, 3)$.

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

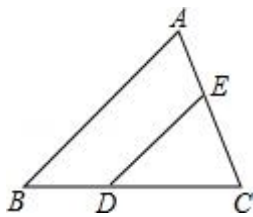
【专题】11: 计算题.

【分析】先确定点 $(1, 3)$ 关于直线 $x = -1$ 的对称点的坐标为 $(-3, 3)$, 然后根据抛物线的对称性求解.

【解答】解: 点 $(1, 3)$ 关于直线 $x = -1$ 的对称点的坐标为 $(-3, 3)$, 所以这个二次函数的图象一定点 $(-3, 3)$.
故答案为 $(-3, 3)$.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式. 也考查了抛物线的对称性.

13. (4分) 如图, 已知 D, E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC 和 AC 上的点, $AE = 2$, $CE = 3$, 要使 $DE \parallel AB$, 那么 $BC: CD$ 应等于 $\frac{5}{3}$.



【考点】S4: 平行线分线段成比例.

【专题】11: 计算题.

【分析】直接根据平行线分线段成比例进行计算.

【解答】解: $\because DE \parallel AB$,
 $\therefore \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE} = \frac{AE+CE}{CE} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$.
故答案为 $\frac{5}{3}$.

【点评】本题考查了平行线分线段成比例: 三条平行线截两条直线, 所得的对应线段成比例.

14. (4分) 已知点 G 是面积为 27cm^2 的 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $\triangle AGC$ 的面积等于 9cm^2 .

【考点】K5: 三角形的重心.

【分析】 首先根据题意画出图形，由三角形重心的性质得出 $AG:GD=2:1$ ，利用比例的性质结合三角形的面积公式得到 $S_{\triangle AGC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ ，然后代入数值计算即可.

【解答】 解：如图， $\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，连结 AG 并延长交 BC 于点 D ，
 $\therefore AG:GD=2:1$ ，

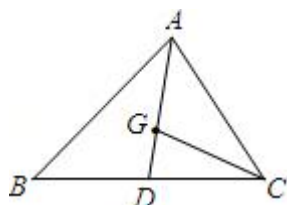
$$\therefore S_{\triangle AGC} = 2S_{\triangle CGD}, S_{\triangle AGC} = \frac{2}{3}S_{\triangle ACD},$$

$\because D$ 为 BC 中点，

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle AGC} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 27 = 9 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

故答案为： 9cm^2 .



【点评】 此题考查了三角形的重心的性质：三角形的重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍．根据题意得出 $S_{\triangle AGC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$ 是解题的关键．

15. (4 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中， AD 是边 BC 上的中线．设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ．那么 $\overrightarrow{AD} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}}}$ ．(用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)．

【考点】 LM：*平面向量．

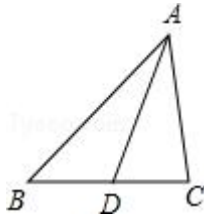
【分析】 首先根据题意画出图形，然后由三角形中线的性质，求得 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ，再利用三角形法则求解即可求得答案．

【解答】 解：如图， $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， AD 是边 BC 上的中线， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.



【点评】此题考查了平面向量的知识．此题难度不大，注意掌握三角形法则的应用，注意数形结合思想的应用．

16. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 D 是 AB 的中点，如果 $BC = 3$ ， $CD = 2$ ，那么 $\cos \angle DCB = \frac{3}{4}$ ．

【考点】T7：解直角三角形．

【分析】根据题意画出图形，将 $\cos \angle DCB$ 转化为 $\cos \angle DBC$ 解答．

【解答】解：如图，

$$\because \angle BCA = 90^\circ, \quad BC = 3, \quad CD = 2,$$

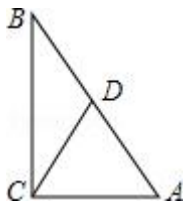
$$\therefore BD = AD = 4,$$

$$\because BD = CD,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle DBC,$$

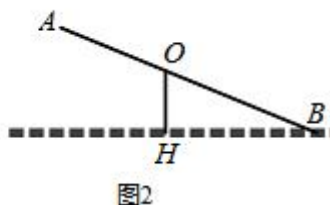
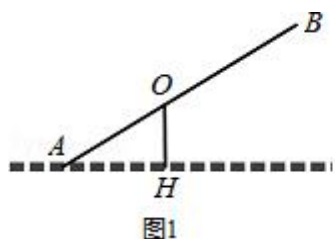
$$\therefore \cos \angle DCB = \cos \angle DBC = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}.$$

故答案为 $\frac{3}{4}$ ．



【点评】本题考查了解直角三角形，熟悉直角三角形的性质和三角函数的定义是解题的关键．

17. (4分) 已知不等臂跷跷板 AB 长为 3 米，当 AB 的一端点 A 碰到地面时（如图 1）， AB 与地面的夹角为 30° ；当 AB 的另一端点 B 碰到地面时（如图 2）， AB 与地面的夹角的正弦值为 $\frac{1}{3}$ ，那么跷跷板 AB 的支撑点 O 到地面的距离 $OH = \frac{3}{5}$ 米．



【考点】T8：解直角三角形的应用．

【分析】利用锐角三角函数关系以及特殊角的三角函数关系表示出 AB 的长，进而求出即可．

【解答】解：设 $OH = x$ ，

$\because$ 当 AB 的一端点 A 碰到地面时， AB 与地面的夹角为 30° ，

$$\therefore AO = 2xm,$$

$\because$ 当 AB 的另一端点 B 碰到地面时， AB 与地面的夹角的正弦值为 $\frac{1}{3}$ ，

$$\therefore BO = 3xm,$$

$$\text{则 } AO + BO = 2x + 3x = 3m,$$

$$\text{解得：} x = \frac{3}{5}.$$

$$\text{故答案为：} \frac{3}{5}.$$

【点评】此题主要考查了解直角三角形的应用，正确用未知数表示出 AB 的长是解题关键．

18. (4分) 把一个三角形绕其中一个顶点逆时针旋转并放大或缩小(这个顶点不变)，我们把这样的三角形运动称为三角形的 T -变换，这个顶点称为 T -变换中心，旋转角称为 T -变换角，三角形与原三角形的对应边之比称为 T -变换比；已知 $\triangle ABC$ 在直角坐标平面内，点 $A(0, -1)$ ， $B(-\sqrt{3}, 2)$ ， $C(0, 2)$ ，将 $\triangle ABC$ 进行 T -变换， T -变换中心为点 A ， T -变换角为 60° ， T -变换比为 $\frac{2}{3}$ ，那么经过 T -变换后点 C 所对应的点的坐标为 $(-\sqrt{3}, 0)$ ．

【考点】R7：坐标与图形变化 - 旋转．

【专题】23：新定义．

【分析】根据题意判断 $\triangle ABC$ 为直角三角形，得到 $\angle BAC = 30^\circ$ ，根据 T -变换角为 60° ，得到经过 T -变换后点 C 所对应的点在 x 轴上，计算得到答案．

【解答】解： $\because B(-\sqrt{3}, 2)$ ， $C(0, 2)$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形, $\angle BAC = 30^\circ$,

绕点 A 逆时针旋转 60° 后, $B'A \perp y$ 轴,

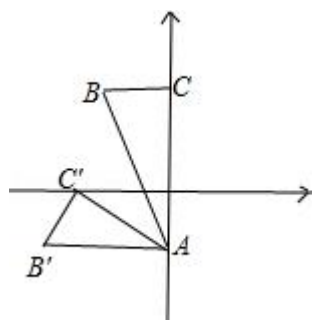
则点 C' 在 x 轴上,

T -变换比为 $\frac{2}{3}$, $AC = 3$,

$\therefore AC' = 2$,

$OC' = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 经过 T -变换后点 C 所对应的点的坐标为 $(-\sqrt{3}, 0)$.



【点评】 本题考查的是坐标与图形变化, 理解新定义和旋转的概念是解题的关键, 注意旋转中心、旋转方向和旋转角在旋转中的应用.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 化简: $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} + \frac{x^2+2x}{x^2+x-2}$, 并求当 $x = \sqrt{3}$ 时的值.

【考点】 6D: 分式的化简求值.

【分析】 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再把 $x = \sqrt{3}$ 代入进行计算即可

$$\begin{aligned} \text{【解答】 解: 原式} &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} + \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{x-1} \\ &= \frac{2x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(2\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{7+3\sqrt{3}}{2}.$$

【点评】 本题考查的是分式的化简求值, 熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy - 2y^2 - x + 2y = 0 \end{cases}.$$

【考点】AF: 高次方程.

【分析】将方程②借助因式分解来降次、转化; 再次联立方程①, 得到两个低次方程组; 解方程组即可解决问题.

【解答】解:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \text{ ①} \\ xy - 2y^2 - x + 2y = 0 \text{ ②} \end{cases},$$

由(2)得 $(x - 2y)(y - 1) = 0$, $x - 2y = 0$ 或 $y - 1 = 0$,

原方程可化为
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases}.$$

解两个方程组得:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ y_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{4\sqrt{5}}{5} \\ y_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \begin{cases} x_3 = \sqrt{3} \\ y_3 = 1 \end{cases} \begin{cases} x_4 = -\sqrt{3} \\ y_4 = 1 \end{cases}.$$

【点评】该题主要考查了高次方程的解法问题; 解高次方程的一般策略是运用因式分解法, 化高次方程为低次方程, 然后求解.

21. (10分) 已知直线 $x = m$ ($m > 0$) 与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 和直线 $y = -x - 2$ 分别相交于点 A 、 B , 且 $AB = 7$, 求 m 的值.

【考点】G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】根据题意求得 A 、 B 的坐标, 然后根据 $AB = 7$ 列出关于 m 的方程, 解方程即可求得 m .

【解答】解: $\because$ 直线 $x = m$ ($m > 0$) 与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 和直线 $y = -x - 2$ 分别相交于点 A 、 B ,

$\therefore$ 点 A 、 B 的坐标分别为 $(m, \frac{6}{m})$ 、 $(m, -m - 2)$,

$\therefore AB = 7$,

$\therefore \frac{6}{m} - (-m - 2) = 7$,

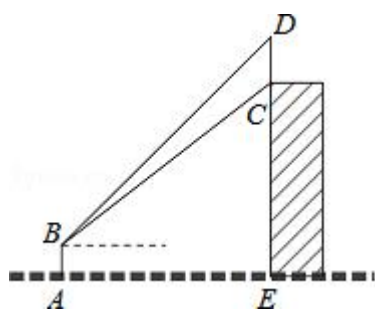
整理得 $m^2 - 5m + 6 = 0$, 解得 $m_1 = 2$, $m_2 = 3$.

经检验它们都是原方程的根, 且符合题意,

所以 m 的值为 2 或 3.

【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，交点坐标符合反比例函数的解析式，同时也符合一次函数的解析式.

22. (10分) 如图，某幢大楼的外墙边上竖直安装着一根旗杆 CD ，小明在离旗杆下方大楼底部 E 点 24 米的点 A 处放置一台测角仪，测角仪的高度 AB 为 1.5 米，并在点 B 处测得旗杆下端 C 的仰角为 40° ，上端 D 的仰角为 45° ，求旗杆 CD 的长度；(结果精确到 0.1 米，参考数据： $\sin 40^\circ \approx 0.64$ ， $\cos 40^\circ \approx 0.77$ ， $\tan 40^\circ \approx 0.84$)



【考点】 TA：解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【分析】 过点 B 作 $BF \perp DE$ 于点 F ，可得四边形 $ABFE$ 为矩形，先在 $\triangle BCF$ 中求出 CF 的长度，然后在 $\triangle BDF$ 中求出 DF 的长度，最后 $DF - CF$ 可求得 CD 的长度.

【解答】 解：过点 B 作 $BF \perp DE$ 于点 F ，

则四边形 $ABFE$ 为矩形，

在 $\triangle BCF$ 中，

$$\because \angle CBF = 40^\circ, \angle CFB = 90^\circ, BF = AE = 24m,$$

$$\therefore \frac{CF}{BF} = \tan 40^\circ,$$

$$\therefore CF = 0.84 \times 24 \approx 20.16 (m),$$

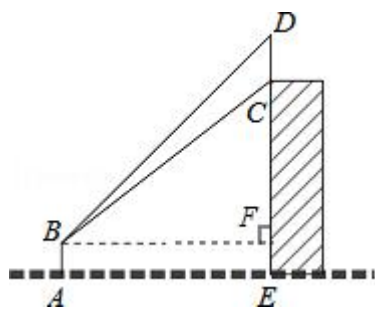
在 $\triangle BDF$ 中，

$$\because \angle DBF = 45^\circ,$$

$$\therefore DF = 24m,$$

$$\text{则 } CD = DF - CF = 24 - 20.16 = 3.84 \approx 3.8 (m).$$

故旗杆 CD 的长为 $3.8m$.

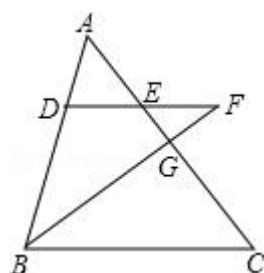


【点评】本题考查了直角三角形的应用，解答本题的关键是根据仰角构造直角三角形，利用三角函数解直角三角形.

23. (12分) 已知如图, D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点, $DE \parallel BC$, 交边 AC 于点 E , 延长 DE 至点 F , 使 $EF = DE$, 联结 BF , 交边 AC 于点 G , 联结 CF

(1) 求证: $\frac{AE}{AC} = \frac{EG}{CG}$;

(2) 如果 $CF^2 = FG \cdot FB$, 求证: $CG \cdot CE = BC \cdot DE$.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】14: 证明题.

【分析】(1) 首先证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, $\triangle EFG \sim \triangle CBG$, 根据相似三角形的对应边的比相等, 以及 $DE = EF$ 即可证得;

(2) 首先证明 $\triangle CFG \sim \triangle BFC$, 证得 $\frac{CG}{BC} = \frac{FG}{FC}$, $\angle FCE = \angle CBF$, 然后根据平行

线的性质证明 $\angle FEG = \angle CEF$, 即可证得 $\triangle EFG \sim \triangle ECF$, 则 $\frac{EF}{EC} = \frac{FG}{FC} = \frac{DE}{EC}$,

即可证得 $\frac{CG}{FG} = \frac{DE}{EC}$, 则所证结论即可得到.

【解答】证明: (1) $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$, $\triangle EFG \sim \triangle CBG$,

$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, $\frac{EF}{BC} = \frac{EG}{CG}$,

又 $\because DE = EF$,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{EF}{BC},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{EG}{CG},$$

$$(2) \because CF^2 = FG \cdot FB,$$

$$\therefore \frac{CF}{FG} = \frac{FB}{CF},$$

$$\text{又} \because \angle CFG = \angle CFB,$$

$$\therefore \triangle CFG \sim \triangle BFC,$$

$$\therefore \frac{CG}{BC} = \frac{FG}{FC}, \quad \angle FCE = \angle CBF,$$

$$\text{又} \because DF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle CBF,$$

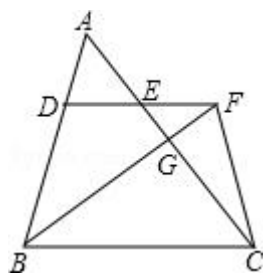
$$\therefore \angle FCE = \angle EFG,$$

$$\text{又} \because \angle FEG = \angle CEF,$$

$$\therefore \triangle EFG \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore \frac{EF}{EC} = \frac{FG}{FC} = \frac{DE}{EC},$$

$$\therefore \frac{CG}{BC} = \frac{DE}{EC}, \quad \text{即 } CG \cdot CE = BC \cdot DE.$$



【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质,正确理解相似三角形的判定方法,证明 $\angle FEG = \angle CEF$,证得 $\triangle EFG \sim \triangle ECF$ 是解决本题的关键.

24. (12分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象经过点 $(1, -3)$ 和点 $(-1, 5)$;

(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 将这个二次函数的图象向上平移, 交 y 轴于点 C , 其纵坐标为 m , 请用 m 的代数式表示平移后函数图象顶点 M 的坐标;

(3) 在第(2)小题的条件下, 如果点 P 的坐标为 $(2, 3)$, CM 平分 $\angle PCO$,

【分析】 (1) 根据待定系数法, 可得函数解析式;

(3) 根据角平分线的性质, 可得全等三角形, 根据全等三角形的性质, 可得方程组, 根据解方程组, 可得答案.

$$\begin{cases} a+b=-3 \\ a-b=5 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}.$$

(2) $y = x^2 - 4x$ 的顶点 M 坐标 $(2, -4)$,

顶点 M 坐标向上平移 m , 即 $M(2, m-4)$;

Figure 1 shows a coordinate system with x and y axes. The origin is labeled O. A point C is on the y-axis, and a point D is on the y-axis below C. A point M is on the x-axis, and a point P is on a line segment CG. A line segment DM is drawn, and a dashed line segment PM is drawn. The x-axis has a tick mark at 1.

第 21 页 (共 25 页)

作 $MG \perp PC$ 于 G , 设 $G(a, \frac{3-m}{2}a+m)$.

由角平分线上的点到角两边的距离相等,

$$DM = MG.$$

在 $\text{Rt}\triangle DCM$ 和 $\text{Rt}\triangle GCM$ 中 $\begin{cases} DM=GM \\ CM=CM \end{cases}$,

$$\text{Rt}\triangle DCM \cong \text{Rt}\triangle GCM \text{ (HL)}.$$

$$CG = DC = 4, \quad MG = DM = 2,$$

$$\begin{cases} a^2 + (\frac{3-m}{2}a)^2 = 4^2 \\ (2-a)^2 + (m-4-\frac{3-m}{2}a-m)^2 = 2^2 \end{cases}$$

化简, 得 $8m = 36$,

$$\text{解得 } m = \frac{9}{2}.$$

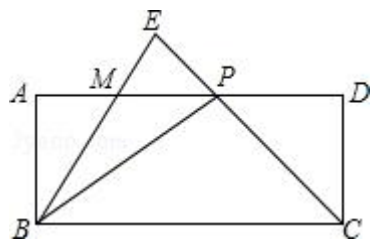
【点评】 本题考察了二次函数综合题, (1) 利用了待定系数法求函数解析式, (2) 利用了二次函数顶点坐标公式, 图象的平移方法; (3) 利用了角平分线的性质, 全等三角形的性质.

25. (14 分) 已知在矩形 $ABCD$ 中, P 是边 AD 上的一动点, 联结 BP 、 CP , 过点 B 作射线交线段 CP 的延长线于点 E , 交边 AD 于点 M , 且使得 $\angle ABE = \angle CBP$, 如果 $AB = 2$, $BC = 5$, $AP = x$, $PM = y$;

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出它的定义域;

(2) 当 $AP = 4$ 时, 求 $\angle EBP$ 的正切值;

(3) 如果 $\triangle EBC$ 是以 $\angle EBC$ 为底角的等腰三角形, 求 AP 的长.



【考点】 KH: 等腰三角形的性质; KQ: 勾股定理; LB: 矩形的性质; SO: 相似形综合题; T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】 15: 综合题.

【分析】 (1) 易证 $\triangle ABM \sim \triangle APB$, 然后根据相似三角形的性质就可得到 y 关于

x 的函数解析式, 由 P 是边 AD 上的一动点可得 $0 \leq x \leq 5$, 再由 $y > 0$ 就可求出该函数的定义域;

(2) 过点 M 作 $MH \perp BP$ 于 H , 由 $AP = x = 4$ 可求出 MP 、 AM 、 BM 、 BP , 然后根据面积法可求出 MH , 从而可求出 BH , 就可求出 $\angle EBP$ 的正切值;

(3) 可分 $EB = EC$ 和 $CB = CE$ 两种情况讨论: ①当 $EB = EC$ 时, 可证到 $\triangle AMB \cong \triangle DPC$, 则有 $AM = DP$, 从而有 $x - y = 5 - x$, 即 $y = 2x - 5$, 代入 (1) 中函数解析式就可求出 x 的值; ②当 $CB = CE$ 时, 可得到 $PC = EC - EP = BC - MP = 5 - y$, 在 $\text{Rt}\triangle DPC$ 中根据勾股定理可得到 x 与 y 的关系, 然后结合 y 关于 x 的函数解析式, 就可求出 x 的值.

【解答】 解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD = 2, AD = BC = 5, \angle A = \angle D = 90^\circ, AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle APB = \angle PBC.$$

$$\because \angle ABE = \angle CBP,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle APB.$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle APB,$$

$$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{AM}{AB},$$

$$\therefore \frac{2}{x} = \frac{x-y}{2},$$

$$\therefore y = x - \frac{4}{x}.$$

$\because P$ 是边 AD 上的一动点,

$$\therefore 0 \leq x \leq 5.$$

$$\because y > 0,$$

$$\therefore x - \frac{4}{x} > 0,$$

$$\therefore x > 2,$$

$\therefore$ 函数的定义域为 $2 < x \leq 5$;

(2) 过点 M 作 $MH \perp BP$ 于 H , 如图.

$$\because AP = x = 4, \therefore y = x - \frac{4}{x} = 3,$$

$$\therefore MP = 3, AM = 1,$$

$$\therefore BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{5}, BP = \sqrt{AB^2 + AP^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore S_{\triangle BMP} = \frac{1}{2}MP \cdot AB = \frac{1}{2}BP \cdot MH,$$

$$\therefore MH = \frac{MP \cdot AB}{BP} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore BH = \sqrt{BM^2 - MH^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \tan \angle EBP = \frac{MH}{BH} = \frac{3}{4};$$

(3) ①若 $EB = EC$,

则有 $\angle EBC = \angle ECB$.

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle EBC, \angle DPC = \angle ECB,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle DPC.$$

在 $\triangle AMB$ 和 $\triangle DPC$ 中,

$$\begin{cases} \angle AMB = \angle DPC \\ \angle A = \angle D \\ AB = DC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AMB \cong \triangle DPC,$$

$$\therefore AM = DP,$$

$$\therefore x - y = 5 - x,$$

$$\therefore y = 2x - 5,$$

$$\therefore x - \frac{4}{x} = 2x - 5,$$

解得: $x_1 = 1, x_2 = 4$.

$$\therefore 2 < x \leq 5,$$

$$\therefore AP = x = 4;$$

②若 $CE = CB$,

则 $\angle EBC = \angle E$.

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EMP = \angle EBC = \angle E,$$

$$\therefore PE = PM = y,$$

$$\therefore PC = EC - EP = 5 - y,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DPC$ 中,

$$(5 - y)^2 - (5 - x)^2 = 2^2,$$

$$\therefore (10 - x - y)(x - y) = 4,$$

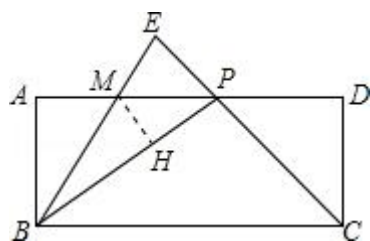
$$\therefore (10 - x - x + \frac{4}{x})(x - x + \frac{4}{x}) = 4,$$

$$\text{整理得: } 3x^2 - 10x - 4 = 0,$$

$$\text{解得: } x_3 = \frac{5+\sqrt{37}}{3}, x_4 = \frac{5-\sqrt{37}}{3} \text{ (舍负)}.$$

$$\therefore AP = x = \frac{5+\sqrt{37}}{3}.$$

综上所述: AP 的值为 4 或 $\frac{5+\sqrt{37}}{3}$.



【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、矩形的性质、勾股定理、解一元二次方程、三角函数等知识，证到 $\triangle ABM \sim \triangle APB$ 是解决第(1)小题的关键，把 $\angle EBP$ 放到直角三角形中是解决第(2)小题的关键，运用勾股定理建立 x 与 y 的等量关系是解决第(3)小题的关键.