

2015 年上海市长宁区中考数学一模试卷

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

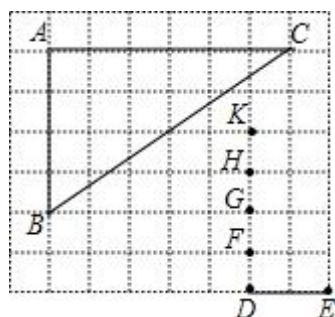
1.（4 分）如果两个相似三角形的面积比是 1: 6，则它们的相似比（ ）

- A. 1: 36 B. 1: 6 C. 1: 3 D. 1: $\sqrt{6}$

2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，那么 $\angle A$ 的余弦值等于（ ）

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

3.（4 分）如图，点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 K 都是 7×8 方格纸中的格点，为使 $\triangle DEM \sim \triangle ABC$ ，则点 M 应是 F 、 G 、 H 、 K 四点中的（ ）



- A. F B. G C. H D. K

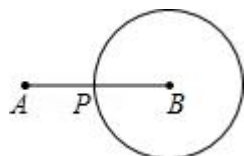
4.（4 分）已知两圆半径分别是 3 和 4，若两圆内切，则两圆的圆心距为（ ）

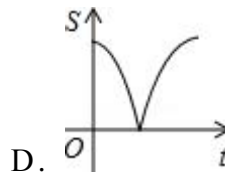
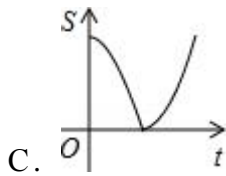
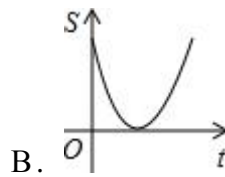
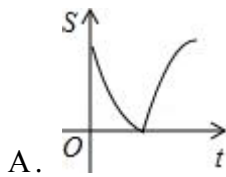
- A. 1 或 7 B. 1 C. 7 D. 2

5.（4 分）抛物线 $y = 2x^2$ ， $y = -2x^2$ ， $y = \frac{1}{2}x^2$ 共有的性质是（ ）

- A. 开口向下 B. 对称轴是 y 轴
C. 都有最低点 D. y 的值随 x 的增大而减小

6.（4 分）如图，动点 P 从点 A 出发，沿线段 AB 运动至点 B 后，立即按原路返回，点 P 在运动过程中速度不变，则以点 B 为圆心，线段 BP 长为半径的圆的面积 S 与点 P 的运动时间 t 的函数图象大致为（ ）





二、填空题（共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 已知线段 $a = 2$ 厘米, $c = 8$ 厘米, 则线段 a 和 c 的比例中项 b 是_____厘米.

8. (4 分) 计算: $3(\vec{a} - \vec{b}) - 3\vec{a} =$ _____.

9. (4 分) 已知 $\odot P$ 在直角坐标平面内, 它的半径是 5, 圆心 $P(-3, 4)$, 则坐标原点 O 与 $\odot P$ 的位置关系是_____.

10. (4 分) 如果圆心 O 到直线 l 的距离等于 $\odot O$ 的半径, 那么直线 l 和 $\odot O$ 的公共点有_____个.

11. (4 分) 二次函数 $y = -3(x - 1)^2 + 2$ 图象的顶点坐标是_____.

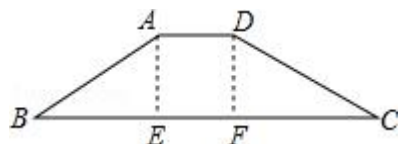
12. (4 分) 将抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 向左平移 3 个单位后所得抛物线的解析式是_____.

13. (4 分) 已知二次函数 $y = x^2 + 2x - 7$ 的一个函数值是 8, 那么对应的自变量 x 的值是_____.

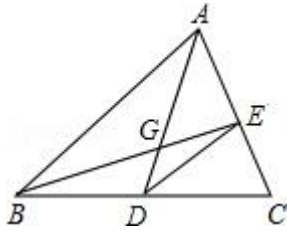
14. (4 分) 已知二次函数 $y = ax^2 - (a + 1)x - 2$, 当 $x > 1$ 时, y 的值随 x 的值增大而增大, 当 $x < 1$ 时, y 的值随 x 的值增大而减小, 则实数 a 的值为_____.

15. (4 分) 某企业今年第一月新产品的研发资金为 100 万元, 以后每月新产品的研发资金与上月相比增长率都是 x , 则该厂今年第三月新产品的研发资金 y (万元) 关于 x 的函数关系式为 $y =$ _____.

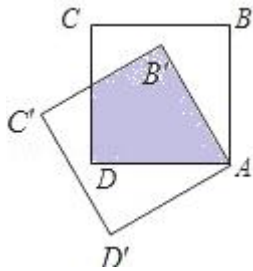
16. (4 分) 如图所示, 铁路的路基横断面是等腰梯形, 斜坡 AB 的坡度为 $1 : \sqrt{3}$, 斜坡 AB 的水平宽度 $BE = 3\sqrt{3}\pi$, 那么斜坡 AB 长为_____m.



17. (4分) 如图, 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 联结 BG 并延长交 AC 于点 E , 联结 DE , 则 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CED}$ 的值为_____.



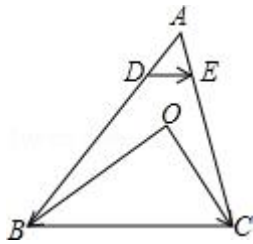
18. (4分) 如图, 正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转, 得到正方形 $AB'C'D'$, 当两正方形重叠部分的面积是原正方形面积的 $\frac{1}{4}$ 时, $\sin \frac{1}{2} \angle B'AD =$ _____.



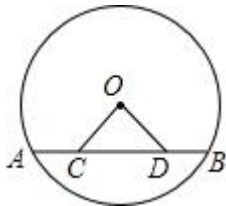
三、解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{1}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ} - (\sin 30^\circ)^{-2} + (2015 - \tan 45^\circ)^0$.

20. (10分) 如图, 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内的一点, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{4}$, 设 $\overrightarrow{OB} = \vec{\pi}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{n}$, 试用 $\vec{\pi}$, $\vec{n}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$.

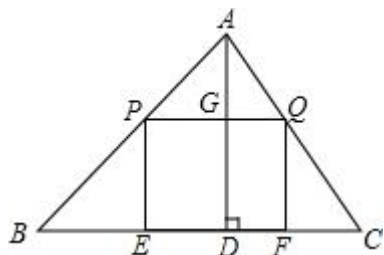


21. (10分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, 点 C 、 D 在弦 AB 上, 且 $AD = BC$, 联结 OC 、 OD . 求证: $\triangle OCD$ 是等腰三角形.

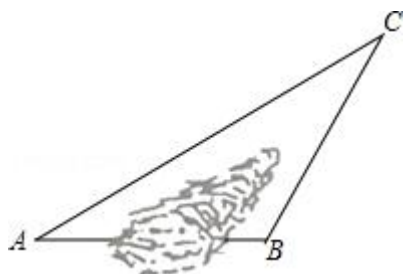


22. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的高, 点 G 在 AD 上, 过 G 作 BC 的平行线分别与 AB 、 AC 交于 P 、 Q 两点, 过点 P 作 $PE \perp BC$ 于点 E , 过

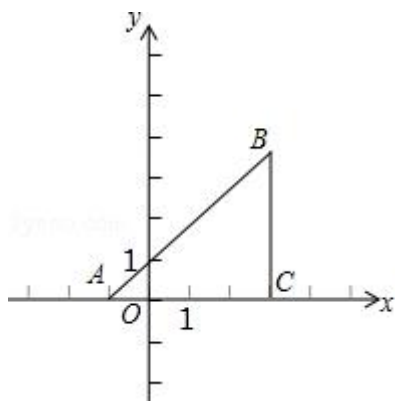
点 Q 作 $QF \perp BC$ 于点 F . 设 $AD = 80$, $BC = 120$, 当四边形 $PEFQ$ 为正方形时, 试求此正方形的边长.



23. (12 分) 如图, A 、 B 两地之间有一座山, 汽车原来从 A 地到 B 地须经 C 地沿折线 $A - C - B$ 行驶, 现开通隧道后, 汽车直接沿直线 AB 行驶. 已知 $AC = 120$ 千米, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 135^\circ$, 则隧道开通后, 汽车从 A 地到 B 地比原来少走多少千米? (结果保留根号).



24. (12 分) 如图, 已知直角坐标平面上的 $\triangle ABC$, $AC = CB$, $\angle ACB = 90^\circ$, 且 $A(-1, 0)$, $B(m, n)$, $C(3, 0)$. 若抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过 A 、 C 两点.
- (1) 求 a 、 b 的值;
 - (2) 将抛物线向上平移若干个单位得到的新抛物线恰好经过点 B , 求新抛物线的解析式;
 - (3) 设 (2) 中的新抛物线的顶点 P 点, Q 为新抛物线上 P 点至 B 点之间的一点, 以点 Q 为圆心画图, 当 $\odot Q$ 与 x 轴和直线 BC 都相切时, 联结 PQ 、 BQ , 求四边形 $ABQP$ 的面积.

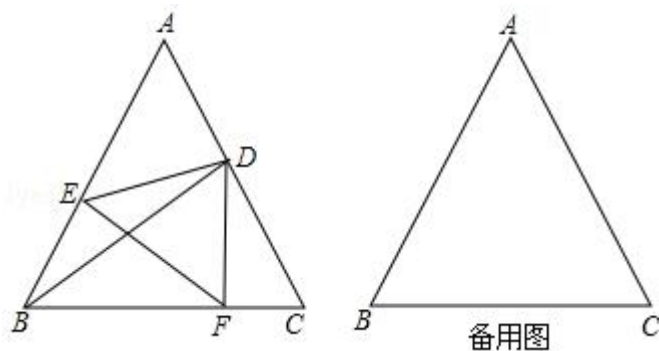


25. (14分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB=4$, D 是 AC 边上一动点(不与 A 、 C 点重合), EF 垂直平分 BD , 分别交 AB 、 BC 于点 E 、 F , 设 $CD=x$, $AE=y$.

(1) 求证: $\triangle AED \sim \triangle CDF$;

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式. 并写出定义域;

(3) 过点 D 作 $DH \perp AB$, 垂足为点 H , 当 $EH=1$ 时, 求线段 CD 的长.



2015 年上海市长宁区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）如果两个相似三角形的面积比是 1：6，则它们的相似比（ ）

- A. 1：36 B. 1：6 C. 1：3 D. 1： $\sqrt{6}$

【考点】S7：相似三角形的性质.

【分析】根据相似三角形面积的比等于相似比的平方解答.

【解答】解： $\because$ 两个相似三角形的面积比是 1：6，

$\therefore$ 它们的相似比 1： $\sqrt{6}$.

故选：D.

【点评】本题考查了相似三角形的性质，是基础题，熟记性质是解题的关键.

2.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，那么 $\angle A$ 的余弦值等于（ ）

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

【考点】T1：锐角三角函数的定义.

【分析】先根据勾股定理，求出 AB 的值，然后由余弦 = 邻边 $\div$ 斜边计算即可.

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，

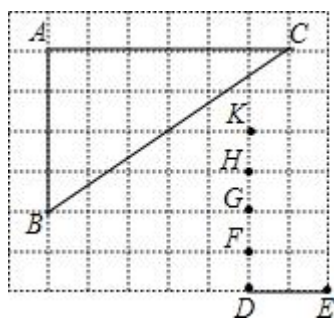
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}.$$

故选：A.

【点评】本题考查了锐角三角函数的定义和勾股定理，牢记定义和定理是解题的关键.

3.（4 分）如图，点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 K 都是 7×8 方格纸中的格点，为使 $\triangle DEM \sim \triangle ABC$ ，则点 M 应是 F 、 G 、 H 、 K 四点中的（ ）



- A. F B. G C. H D. K

【考点】S8：相似三角形的判定．

【专题】16：压轴题；24：网格型．

【分析】由图形可知 $\triangle ABC$ 的边 $AB=4$ ， $AC=6$ ， $DE=2$ ，当 $\triangle DEM \sim \triangle ABC$ 时， AB 和 DE 是对应边，相似比是1：2，则 AC 的对应边是3，则点 M 的对应点是 H ．

【解答】解：根据题意，

$$\triangle DEM \sim \triangle ABC, AB=4, AC=6, DE=2$$

$$\therefore DE:AB=DM:AC$$

$$\therefore DM=3$$

$$\therefore M \text{ 应是 } H$$

故选：C．

【点评】本题主要考查相似三角形的性质，相似三角形的对应边的比相等．

4.（4分）已知两圆半径分别是3和4，若两圆内切，则两圆的圆心距为（ ）

- A. 1或7 B. 1 C. 7 D. 2

【考点】MJ：圆与圆的位置关系．

【分析】由内切两圆的半径分别为4和7，根据两圆位置关系与圆心距 d ，两圆半径 R ， r 的数量关系间的联系即可求得答案．

【解答】解： $\because$ 内切两圆的半径分别为4和3，

$$\therefore \text{它们的圆心距是：} 4 - 3 = 1.$$

故选：B．

【点评】此题考查了圆与圆的位置关系．注意掌握两圆位置关系与圆心距 d ，两圆半径 R ， r 的数量关系间的联系是解此题的关键．

5.（4分）抛物线 $y=2x^2$ ， $y=-2x^2$ ， $y=\frac{1}{2}x^2$ 共有的性质是（ ）

A. 开口向下

B. 对称轴是 y 轴

C. 都有最低点

D. y 的值随 x 的增大而减小

【考点】H3：二次函数的性质.

【分析】结合抛物线的解析式和二次函数的性质，逐项判断即可.

【解答】解：

$\because y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ 开口向上,

$\therefore A$ 不正确,

$\because y = -2x^2$, 开口向下,

$\therefore$ 有最高点,

$\therefore C$ 不正确,

$\because$ 在对称轴两侧的增减性不同,

$\therefore D$ 不正确,

$\because$ 三个抛物线中都不含有一次项,

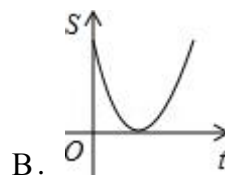
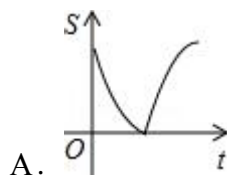
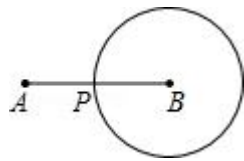
$\therefore$ 其对称轴为 y 轴,

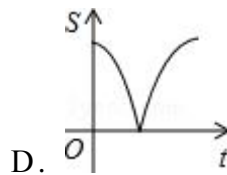
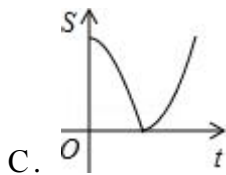
$\therefore B$ 正确,

故选: B .

【点评】本题主要考查二次函数的性质, 掌握二次函数的开口方向、对称轴、最值、增减性等基础知识是解题的关键.

6. (4分) 如图, 动点 P 从点 A 出发, 沿线段 AB 运动至点 B 后, 立即按原路返回, 点 P 在运动过程中速度不变, 则以点 B 为圆心, 线段 BP 长为半径的圆的面积 S 与点 P 的运动时间 t 的函数图象大致为 ()





【考点】E7：动点问题的函数图象．

【专题】16：压轴题．

【分析】分析动点 P 的运动过程，采用定量分析手段，求出 S 与 t 的函数关系式，根据关系式可以得出结论．

【解答】解：不妨设线段 AB 长度为 1 个单位，点 P 的运动速度为 1 个单位/秒，则：

(1) 当点 P 在 $A \rightarrow B$ 段运动时， $PB = 1 - t$ ， $S = \pi (1 - t)^2 (0 \leq t < 1)$ ；

(2) 当点 P 在 $B \rightarrow A$ 段运动时， $PB = t - 1$ ， $S = \pi (t - 1)^2 (1 \leq t \leq 2)$ ．

综上，整个运动过程中， S 与 t 的函数关系式为： $S = \pi (t - 1)^2 (0 \leq t \leq 2)$ ，

这是一个二次函数，其图象为开口向上的一段抛物线．结合题中各选项，只有 B 符合要求．

故选： B ．

【点评】本题结合动点问题考查了二次函数的图象．解题过程中求出了函数关系式，这是定量的分析方法，适用于本题，如果仅仅用定性分析方法则难以作出正确选择．

二、填空题（共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）已知线段 $a = 2$ 厘米， $c = 8$ 厘米，则线段 a 和 c 的比例中项 b 是 4 厘米．

【考点】S2：比例线段．

【专题】11：计算题．

【分析】根据线段比例中项的概念，可得 $a : b = b : c$ ，可得 $b^2 = ac = 16$ ，故 b 的值可求．

【解答】解： $\because$ 线段 b 是 a 、 c 的比例中项，

$$\therefore b^2 = ac = 16,$$

解得 $b = \pm 4$ ，

又 $\because$ 线段是正数，

$$\therefore b = 4.$$

故答案为 4.

【点评】 本题考查了比例中项的概念，注意：求两个数的比例中项的时候，应开平方．求两条线段的比例中项的时候，负数应舍去．

8. (4 分) 计算： $3(\vec{a} - \vec{b}) - 3\vec{a} = \underline{-3\vec{b}}$.

【考点】 LM：*平面向量．

【分析】 直接利用平面向量的加减运算法则求解即可求得，注意去括号时符号的变化．

【解答】 解： $3(\vec{a} - \vec{b}) - 3\vec{a} = 3\vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{a} = -3\vec{b}$.

故答案为： $-3\vec{b}$.

【点评】 此题考查了平面向量的加减运算．此题难度不大，注意熟练掌握运算法则则是关键．

9. (4 分) 已知 $\odot P$ 在直角坐标平面内，它的半径是 5，圆心 $P(-3, 4)$ ，则坐标原点 O 与 $\odot P$ 的位置关系是点 O 在 $\odot P$ 上．

【考点】 D5：坐标与图形性质；M8：点与圆的位置关系．

【分析】 首先求得点 O 与圆心 P 之间的距离，然后和圆的半径比较即可得到点 O 与圆的位置关系．

【解答】 解：由勾股定理得： $OP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$\therefore \odot P$ 的半径为 5,

$\therefore$ 点 O 在 $\odot P$ 上．

故答案为点 O 在 $\odot P$ 上．

【点评】 本题考查了点与圆的位置关系，求出点到圆心的距离是解决本题的关键．点与圆的位置关系有 3 种：

设 $\odot O$ 的半径为 r ，点 P 到圆心的距离 $OP = d$ ，则有：①点 P 在圆外 $\Leftrightarrow d > r$ ；②点 P 在圆上 $\Leftrightarrow d = r$ ；③点 P 在圆内 $\Leftrightarrow d < r$ ．

10. (4 分) 如果圆心 O 到直线 l 的距离等于 $\odot O$ 的半径，那么直线 l 和 $\odot O$ 的公共点有1 个．

【考点】 MB：直线与圆的位置关系．

【分析】 首先确定直线 l 和圆的位置关系，然后确定直线与圆的公共点的个数.

【解答】 解： $\because$ 圆心 O 到直线 l 的距离等于 $\odot O$ 的半径，

$\therefore$ 直线与圆 O 相切，

$\therefore$ 直线 l 和 $\odot O$ 的公共点有 1 个，

故答案为：1.

【点评】 本题考查了直线与圆的位置关系，解题的关键是县确定位置关系，然后确定交点个数.

11. (4 分) 二次函数 $y = -3(x-1)^2+2$ 图象的顶点坐标是 (1, 2).

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【分析】 因为 $y = -3(x-1)^2+2$ 是二次函数的顶点式，根据顶点式可直接写出顶点坐标.

【解答】 解： $\because$ 抛物线解析式为 $y = -3(x-1)^2+2$ ，

$\therefore$ 二次函数图象的顶点坐标是 (1, 2).

故答案为 (1, 2).

【点评】 本题考查了二次函数的性质，根据抛物线的顶点式，可确定抛物线的开口方向，顶点坐标 (对称轴)，最大 (最小) 值，增减性等.

12. (4 分) 将抛物线 $y = 2x^2 - 3$ 向左平移 3 个单位后所得抛物线的解析式是 $y = 2(x+3)^2 - 3$.

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】 易得新抛物线的顶点，根据顶点式及平移前后二次项的系数不变可得新抛物线的解析式.

【解答】 解：原抛物线的顶点为 (0, -3)，向左平移 3 个单位，那么新抛物线的顶点为 (-3, -3);

则新抛物线的解析式为 $y = 2(x+3)^2 - 3$.

故答案是： $y = 2(x+3)^2 - 3$.

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换. 抛物线平移不改变二次项的系数的值，解决本题的关键是得到新抛物线的顶点坐标.

13. (4 分) 已知二次函数 $y = x^2+2x-7$ 的一个函数值是 8，那么对应的自变量 x 的值是 -5 或 3.

【考点】 H5：二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 把函数值代入函数解析式，解关于 x 的一元二次方程即可.

【解答】 解： $y = 8$ 时， $x^2 + 2x - 7 = 8$ ，

整理得， $x^2 + 2x - 15 = 0$ ，

解得 $x_1 = -5$ ， $x_2 = 3$ ，

所以，对应的自变量 x 的值是 -5 或 3 ．

故答案为： -5 或 3 ．

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，一元二次方程的解法，把函数值代入函数解析式得到方程是解题的关键．

14. (4 分) 已知二次函数 $y = ax^2 - (a+1)x - 2$ ，当 $x > 1$ 时， y 的值随 x 的值增大而增大，当 $x < 1$ 时， y 的值随 x 的值增大而减小，则实数 a 的值为 1．

【考点】 H1：二次函数的定义；H3：二次函数的性质．

【分析】 根据二次函数的增减性，结合条件可求得抛物线的对称轴方程，可得到关于 a 的方程，可求得答案．

【解答】 解：

$$\because y = ax^2 - (a+1)x - 2,$$

$$\therefore \text{其对称轴方程为 } x = \frac{a+1}{2a},$$

又当 $x > 1$ 时， y 的值随 x 的值增大而增大，当 $x < 1$ 时， y 的值随 x 的值增大而减小，

$$\therefore \text{其对称轴为 } x = 1,$$

$$\therefore \frac{a+1}{2a} = 1, \text{ 解得 } a = 1,$$

故答案为：1．

【点评】 本题主要考查抛物线的对称轴及增减性，掌握在对称轴两侧的增减性相反是解题的关键．

15. (4 分) 某企业今年第一月新产品的研发资金为 100 万元，以后每月新产品的研发资金与上月相比增长率都是 x ，则该厂今年第三月新产品的研发资金 y (万元) 关于 x 的函数关系式为 $y = 100(1+x)^2$ ．

【考点】 HD：根据实际问题列二次函数关系式．

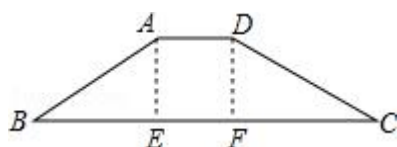
【分析】 由一月份新产品的研发资金为 100 万元，根据题意可以得到 2 月份研发

资金为 $100(1+x)$ 万元，而三月份在 2 月份的基础上又增长了 x ，那么三月份的研发资金也可以用 x 表示出来，由此即可确定函数关系式.

【解答】 解：∵一月份新产品的研发资金为 100 万元，
2 月份起，每月新产品的研发资金与上月相比增长率都是 x ，
∴2 月份研发资金为 $100(1+x)$ ，
∴三月份的研发资金为 $y = 100(1+x) \times (1+x) = 100(1+x)^2$.
故答案为： $100(1+x)^2$.

【点评】 此题主要考查了根据实际问题二次函数列解析式，此题是平均增长率的问题，可以用公式 $a(1 \pm x)^2 = b$ 来解题.

16. (4 分) 如图所示，铁路的路基横断面是等腰梯形，斜坡 AB 的坡度为 $1: \sqrt{3}$ ，
斜坡 AB 的水平宽度 $BE = 3\sqrt{3}\pi$ ，那么斜坡 AB 长为 6 m.



【考点】 T9：解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】 坡度 = 坡角的正切值，据此知坡角是 30° . 运用三角函数求解.

【解答】 解：∵斜坡 AB 的坡度为 $1: \sqrt{3}$,

$$\therefore \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

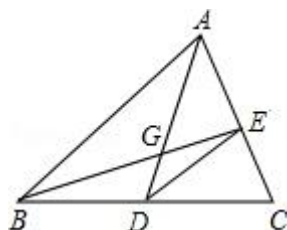
$$\therefore \angle B = 30^\circ.$$

$$\therefore \cos B = \frac{BE}{AB},$$

$$\therefore AB = \frac{BE}{\cos 30^\circ} = 6 \text{ (m)}.$$

【点评】 此题主要考查学生对坡度坡角的掌握及三角函数的运用能力.

17. (4 分) 如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， G 是 $\triangle ABC$ 的重心，联结 BG 并延长交 AC 于点 E ，联结 DE ，则 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CED}$ 的值为 4.



【考点】 K5: 三角形的重心.

【分析】 由 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 联结 BG 并延长交 AC 于点 E , 根据三角形重心的定义与性质可得 E 为 AC 的中点, $AG = 2DG$, $BG = 2GE$. 设 $S_{\triangle EGD} = x$, 根据

三角形的面积公式, 等高的两个三角形面积之比等于底之比得出 $S_{\triangle EGA} = 2S_{\triangle EGD} = 2x$, 那么 $S_{\triangle EAD} = S_{\triangle EGD} + S_{\triangle EGA} = 3x$, 又 E 为 AC 中点, 等底等高的两个三角形面积相等, 于是 $S_{\triangle ECD} = S_{\triangle EAD} = 3x$, $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ECD} + S_{\triangle EAD} = 6x$, 同理由 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 得出 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 12x$, 那么 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CED} = 12x : 3x = 4$.

【解答】 解: $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 联结 BG 并延长交 AC 于点 E ,

$\therefore E$ 为 AC 的中点, $AG = 2DG$, $BG = 2GE$.

设 $S_{\triangle EGD} = x$,

$\because AG = 2DG$,

$\therefore S_{\triangle EGA} = 2S_{\triangle EGD} = 2x$,

$\therefore S_{\triangle EAD} = S_{\triangle EGD} + S_{\triangle EGA} = 3x$,

$\because E$ 为 AC 中点,

$\therefore S_{\triangle ECD} = S_{\triangle EAD} = 3x$,

$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ECD} + S_{\triangle EAD} = 6x$,

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 12x$,

$\therefore S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CED} = 12x : 3x = 4$.

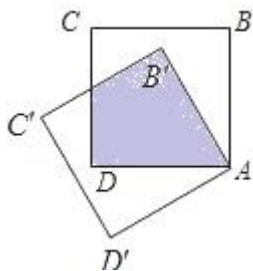
故答案为 4.

【点评】 本题考查了三角形重心的定义与性质, 三角形的面积, 难度适中. 设 $S_{\triangle EGD} = x$, 用含 x 的代数式表示出 $S_{\triangle ABC}$ 是解题的关键.

18. (4 分) 如图, 正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转, 得到正方形 $AB' C' D'$,

当两正方形重叠部分的面积是原正方形面积的 $\frac{1}{4}$ 时, $\sin \frac{1}{2} \angle B' AD =$

$\frac{\sqrt{17}}{17}$.



【考点】R2：旋转的性质．

【专题】11：计算题．

【分析】 $B'C'$ 交 CD 于 E ，如图，根据旋转的性质得 $AB' = AD$ ， $\angle B' = \angle D = 90^\circ$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle AB'E$ ，得到 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle AB'E}$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，则 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{8}S_{\text{正方形} ABCD}$ ，即 $\frac{1}{2}AD \cdot DE = \frac{1}{8} \cdot AD \cdot AD$ ，所以 $DE = \frac{1}{4}AD$ ，接着在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中利用勾股定理计算出 $AE = \sqrt{17}DE$ ，然后利用正弦的定义得 $\sin \angle 2 = \frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{17}}{17}$ ，即 $\sin \frac{1}{2} \angle B'AD = \frac{\sqrt{17}}{17}$ ．

【解答】解： $B'C'$ 交 CD 于 E ，如图，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转，得到正方形 $AB'C'D'$ ，

$\therefore AB' = AD$ ， $\angle B' = \angle D = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 和 $\text{Rt}\triangle AB'E$ 中，

$$\begin{cases} AD=AB' \\ AE=AE \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle AB'E$ (HL)，

$\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle AB'E}$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，

$\because$ 两正方形重叠部分的面积是原正方形面积的 $\frac{1}{4}$ ，

$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{8}S_{\text{正方形} ABCD}$ ，

$\therefore \frac{1}{2}AD \cdot DE = \frac{1}{8} \cdot AD \cdot AD$ ，

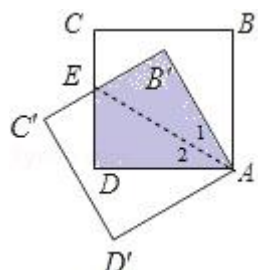
$\therefore DE = \frac{1}{4}AD$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中， $AE = \sqrt{DE^2 + AD^2} = \sqrt{DE^2 + 16DE^2} = \sqrt{17}DE$ ，

$\therefore \sin \angle 2 = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$ ．

即 $\sin \frac{1}{2} \angle B'AD = \frac{\sqrt{17}}{17}$ ．

故答案为 $\frac{\sqrt{17}}{17}$.



【点评】 本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了正方形的性质和锐角三角函数的定义．

三、解答题（共 7 小题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $\frac{1}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ} - (\sin 30^\circ)^{-2} + (2015 - \tan 45^\circ)^0$.

【考点】 6E：零指数幂；6F：负整数指数幂；T5：特殊角的三角函数值．

【分析】 根据特殊角的三角函数计算即可．

【解答】 解： $\frac{1}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ} - (\sin 30^\circ)^{-2} + (2015 - \tan 45^\circ)^0$.

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - 4 + 1$$

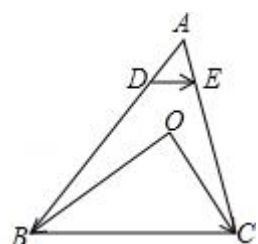
$$= \sqrt{3} + 1 - 4 + 1$$

$$= \sqrt{3} - 2.$$

【点评】 本题考查特殊角三角函数值的计算，特殊角三角函数值计算在中考中经常出现，题型以选择题、填空题为主．解题的关键是：熟记特殊角三角函数值．

20.（10 分）如图，已知 O 为 $\triangle ABC$ 内的一点，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，

且 $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$ ， $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{4}$ ，设 $\overrightarrow{OB} = \vec{m}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{n}$ ，试用 $\vec{m}$ ， $\vec{n}$ 表示 $\overrightarrow{DE}$.



【考点】LM: *平面向量.

【分析】根据 $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ 推知 $DE \parallel BC$, 根据平行线分线段成比例来求 $\overrightarrow{DE}$.

【解答】解: $\because \overrightarrow{OB} = \vec{\pi}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{n}$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{n} - \vec{\pi},$$

$$\because \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{又} \because \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore DE \parallel BC$$

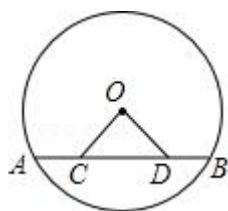
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{4}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}(\vec{n} - \vec{\pi}).$$

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意掌握三角形法则的应用, 注意掌握数形结合思想的应用.

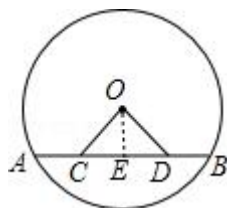
21. (10分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, 点 C 、 D 在弦 AB 上, 且 $AD = BC$, 联结 OC 、 OD . 求证: $\triangle OCD$ 是等腰三角形.



【考点】KI: 等腰三角形的判定; M2: 垂径定理.

【专题】14: 证明题.

【分析】过 O 作 $OE \perp AB$ 于 E , 根据垂径定理求出 $AE = BE$, 求出 $CE = DE$, 根据线段垂直平分线性质求出 $OD = OC$, 即可得出答案.



【解答】证明:

过 O 作 $OE \perp AB$ 于 E ,

则 $AE = BE$,

$\because AD = BC$,

$\therefore AD - DC = BC - DC$,

$\therefore AC = DE$,

$\therefore CE = DE$,

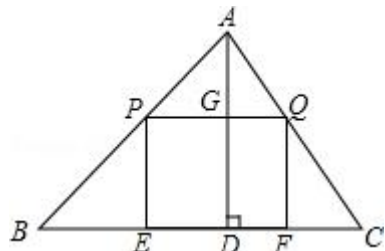
$\because OE \perp CD$,

$\therefore OC = OD$,

即 $\triangle OCD$ 是等腰三角形.

【点评】 本题考查了垂径定理, 等腰三角形的判定, 线段垂直平分线性质的应用, 解此题的关键是正确作出辅助线后求出 $CE = DE$.

22. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的高, 点 G 在 AD 上, 过 G 作 BC 的平行线分别与 AB 、 AC 交于 P 、 Q 两点, 过点 P 作 $PE \perp BC$ 于点 E , 过点 Q 作 $QF \perp BC$ 于点 F . 设 $AD = 80$, $BC = 120$, 当四边形 $PEFQ$ 为正方形时, 试求此正方形的边长.



【考点】 LE: 正方形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 证明 $GD = PE = PQ$; 证明 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, 列出比例式即可解决问题.

【解答】 解: $\because$ 四边形 $PEFQ$ 为正方形, 且 $AD \perp BC$,

$\therefore GD = PE = PQ$ (设为 λ),

$\therefore AG = 80 - \lambda$;

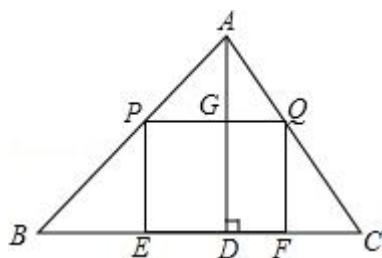
$\because PQ \parallel BC$,

$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABC$,

$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{PQ}{BC}$, 即 $\frac{80-\lambda}{80} = \frac{\lambda}{120}$,

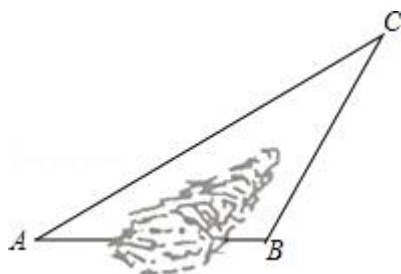
解得: $\lambda = 48$,

即此时正方形的边长为 48.



【点评】该题主要考查了相似三角形的判定及其性质的应用；应牢固掌握相似三角形的判定及其性质。

23. (12分) 如图， A 、 B 两地之间有一座山，汽车原来从 A 地到 B 地须经 C 地沿折线 $A-C-B$ 行驶，现开通隧道后，汽车直接沿直线 AB 行驶。已知 $AC = 120$ 千米， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 135^\circ$ ，则隧道开通后，汽车从 A 地到 B 地比原来少走多少千米？（结果保留根号）。



【考点】T8：解直角三角形的应用。

【分析】利用锐角三角函数关系得出 AB ， AE ， BC 的长，进而求出汽车从 A 地到 B 地比原来少走的路程。

【解答】 D 解：如图所示：过点 C 作 $CE \perp AB$ 延长线于点 E ，

$$\because \angle A = 30^\circ, AC = 120\text{km},$$

$$\therefore EC = 60\text{km}, AE = 120 \times \cos 30^\circ = 60\sqrt{3} \text{ (km)},$$

$$\because \angle B = 135^\circ,$$

$$\therefore BE = EC = 60\text{km},$$

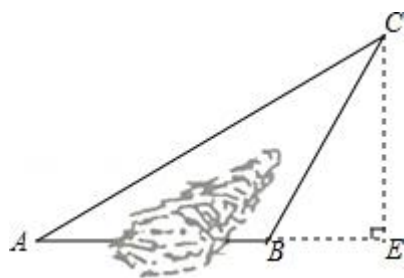
$$\therefore BC = 60\sqrt{2}\text{km},$$

$$\therefore AB = 60\sqrt{3} - 60 = 60(\sqrt{3} - 1)\text{km},$$

$$AC + BC = (120 + 60\sqrt{2})\text{km},$$

$$\therefore AC + BC - AB = 120 + 60\sqrt{2} - 60\sqrt{3} + 60 = (180 + 60\sqrt{2} - 60\sqrt{3})\text{km},$$

答：隧道开通后，汽车从 A 地到 B 地比原来少走 $(180 + 60\sqrt{2} - 60\sqrt{3})\text{km}$ 。



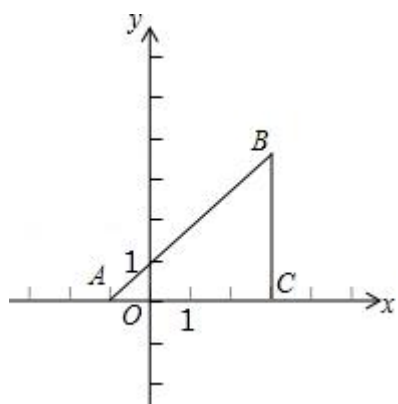
【点评】 此题主要考查了解直角三角形的应用，分别求出 AB ， AE ， BC 的长是解题关键．

24. (12 分) 如图，已知直角坐标平面上的 $\triangle ABC$ ， $AC = CB$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，且 $A(-1, 0)$ ， $B(m, n)$ ， $C(3, 0)$ ．若抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过 A 、 C 两点．

(1) 求 a 、 b 的值；

(2) 将抛物线向上平移若干个单位得到的新抛物线恰好经过点 B ，求新抛物线的解析式；

(3) 设 (2) 中的新抛物线的顶点 P 点， Q 为新抛物线上 P 点至 B 点之间的一点，以点 Q 为圆心画图，当 $\odot Q$ 与 x 轴和直线 BC 都相切时，联结 PQ 、 BQ ，求四边形 $ABQP$ 的面积．



【考点】 HF：二次函数综合题；LG：正方形的判定与性质．

【专题】 15：综合题．

【分析】 (1) 只需把点 A 、 C 的坐标代入抛物线的解析式就可解决问题；

(2) 可设新抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3 + k$ ，然后求出点 B 的坐标，并把点 B 的坐标代入新抛物线的解析式，就可解决问题；

(3) 设 $\odot Q$ 与 x 轴相切于点 D ，与直线 BC 相切于点 E ，连接 QD 、 QE ，易证四边形 $QECD$ 是正方形，则有 $QD = DC$ ．设点 Q 的横坐标为 t ，从而得到点 Q 的坐标为 $(t, 3 - t)$ ，代入新抛物线的解析式，求出点 Q 的坐标，然后运用割

补法就可求出四边形 $ABQP$ 的面积.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 经过 $A(-1, 0)$ 、 $C(3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} a-b-3=0 \\ 9a+3b-3=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases};$$

(2) 设抛物线向上平移 k 个单位后得到的新抛物线恰好经过点 B ,

则新抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3 + k$,

$\because A(-1, 0)$ 、 $C(3, 0)$,

$$\therefore CB = AC = 3 - (-1) = 4,$$

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3, 4)$.

$\because$ 点 $B(3, 4)$ 在抛物线 $y = x^2 - 2x - 3 + k$ 上,

$$\therefore 9 - 6 - 3 + k = 4,$$

解得: $k = 4$,

$\therefore$ 新抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x + 1$;

(3) 设 $\odot Q$ 与 x 轴相切于点 D , 与直线 BC 相切于点 E , 连接 QD 、 QE , 如图所示,

则有 $QD \perp OC$, $QE \perp BC$, $QD = QE$,

$$\therefore \angle QDC = \angle DCE = \angle QEC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $QECD$ 是矩形.

$$\because QD = QE,$$

$\therefore$ 矩形 $QECD$ 是正方形,

$$\therefore QD = DC.$$

设点 Q 的横坐标为 t ,

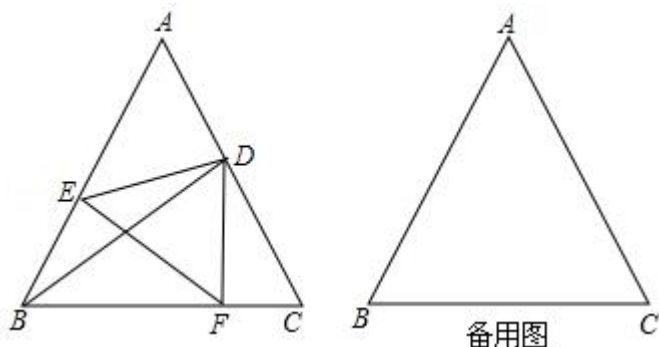
$$\text{则有 } OD = t, QD = DC = OC - OD = 3 - t,$$

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(t, 3 - t)$.

$\because$ 点 Q 在抛物线 $y = x^2 - 2x + 1$ 上,

$$\therefore t^2 - 2t + 1 = 3 - t,$$

解得: $t_1 = 2$, $t_2 = -1$.



【考点】KD：全等三角形的判定与性质；KG：线段垂直平分线的性质；SO：相似形综合题；T1：锐角三角函数的定义；T5：特殊角的三角函数值。

【专题】15：综合题。

【分析】（1）易证 $\triangle BEF \cong \triangle DEF$ ，则有 $\angle EDF = \angle EBF = 60^\circ$ ，由 $\angle A = \angle C = \angle EDF = 60^\circ$ 即可证到 $\triangle AED \sim \triangle CDF$ ；

（2）由 $\triangle AED \sim \triangle CDF$ 可得 $DF = \frac{4x - xy}{y}$ ， $CF = \frac{4x - x^2}{y}$ ，然后利用 $DF + CF =$

$BF + CF = BC = 4$ 就可解决问题；

（3）在 $\text{Rt}\triangle AHD$ 中， $AH = AE - EH = y - 1$ ， $AD = 4 - x$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，运用三角函数可求得 $y = 3 - \frac{1}{2}x$ ，从而有 $\frac{8x - x^2}{4 + x} = 3 - \frac{1}{2}x$ ，解这个方程就可解决问题。

【解答】解：（1）证明：如图1，

$\because EF$ 垂直平分 BD ，

$\therefore EB = ED$ ， $FB = FD$ 。

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases} BE = DE \\ FB = FD \\ EF = EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle DEF$ (SSS)，

$\therefore \angle EBF = \angle EDF$ 。

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle C = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle EDF = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ADE + \angle FDC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 。

又 $\because \angle AED + \angle ADE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ，

$$\therefore \angle AED = \angle FDC,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle CDF;$$

(2) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = BC = AB = 4.$$

$$\because CD = x, AE = y,$$

$$\therefore AD = 4 - x, ED = EB = 4 - y.$$

$$\because \triangle AED \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \frac{ED}{DF} = \frac{AD}{CF} = \frac{AE}{CD},$$

$$\therefore \frac{4-y}{DF} = \frac{4-x}{CF} = \frac{y}{x},$$

$$\therefore DF = \frac{4x-xy}{y}, CF = \frac{4x-x^2}{y}.$$

$$\because DF + CF = BF + CF = BC = 4,$$

$$\therefore \frac{4x-xy}{y} + \frac{4x-x^2}{y} = 4,$$

$$\text{整理得: } y = \frac{8x-x^2}{4+x} \quad (0 < x < 4);$$

(3) 如图 2,

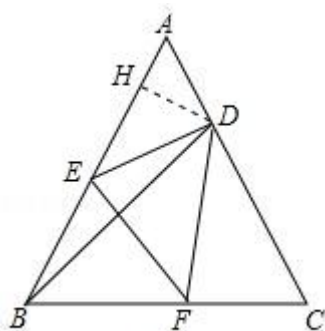


图2

① H 在线段 AE 上时, 在 $\text{Rt}\triangle AHD$ 中,

$$\because AH = AE - EH = y - 1, AD = 4 - x, \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \cos A = \frac{AH}{AD} = \frac{y-1}{4-x} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = 3 - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \frac{8x-x^2}{4+x} = 3 - \frac{1}{2}x,$$

整理得： $x^2 - 14x + 24 = 0$,

解得： $x_1 = 2$, $x_2 = 12$,

$\because 0 < x < 4$,

$\therefore x = 2$,

②当 H 在线段 BE 上时，同理可求得 $x = 9 - \sqrt{73}$

即 CD 的长为 2 或 $9 - \sqrt{73}$.

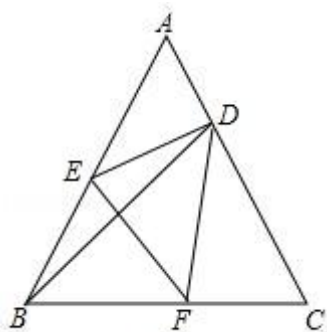


图1

【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、垂直平分线的性质、三角函数、特殊角的三角函数值、解一元二次方程等知识，证到 $\angle EDF = 60^\circ$ 是解决第（1）小题的关键，运用相似三角形的性质求出 DF 和 CF （用 x 、 y 的代数式表示）并利用 $DF + CF = 4$ 是解决第（2）小题的关键，在 $\text{Rt}\triangle AHD$ 中运用三角函数得到 y 与 x 的另一个关系是解决第（3）小题的关键.