

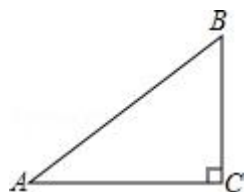
2015 年上海市金山区中考数学一模试卷

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 抛物线 $y = 2x^2 + 1$ 的顶点坐标是 ()

- A. (2, 1) B. (0, 1) C. (1, 0) D. (1, 2)

2. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，则 $\sin A$ 的值是 ()



- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

3. (4 分) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，点 A、B、C 对应点分别是 D、E、F， $AB:DE = 9:4$ ，那么 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DEF}$ 等于 ()

- A. 3:2 B. 9:4 C. 16:81 D. 81:16

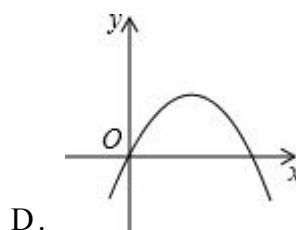
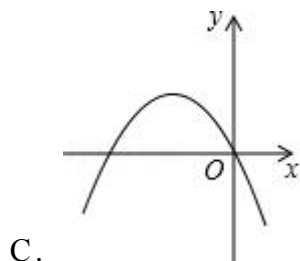
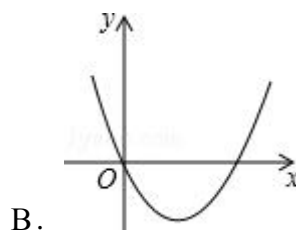
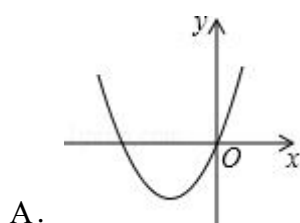
4. (4 分) 正多边形的中心角是 36° ，那么这个正多边形的边数是 ()

- A. 10 B. 8 C. 6 D. 5

5. (4 分) 已知 $\odot M$ 与 $\odot N$ 的半径分别为 1 和 5，若两圆相切，那么这两圆的圆心距 MN 的长等于 ()

- A. 4 B. 6 C. 4 或 5 D. 4 或 6

6. (4 分) 已知反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)，当 $x > 0$ 时，它的图象 y 随 x 的增大而减小，那么二次函数 $y = ax^2 - ax$ 的图象只可能是 ()



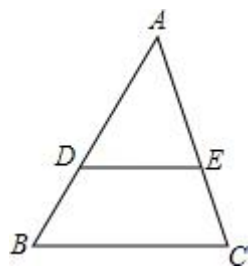
二、填空题（共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, 则 $\frac{x-y}{x+y} =$ _____.

8. (4 分) 计算: $2(2\vec{a} - \vec{b}) + 3(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}) =$ _____.

9. (4 分) 将抛物线 $y = 2(x-1)^2 + 1$ 向上平移 3 个单位, 那么平移后得到的抛物线的解析式是_____.

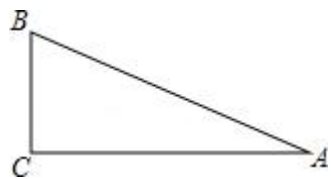
10. (4 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, 若 $AD = 4$, $BD = 2$, $DE = 3$, 那么 $BC =$ _____.



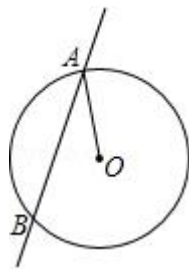
11. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $AC:BC = 3:4$, 那么 $\cos A$ 的值为_____.

12. (4 分) 已知 $\odot O$ 的半径为 5, 点 A 在 $\odot O$ 外, 那么线段 OA 的取值范围是_____.

13. (4 分) 如图, 斜坡 AB 的坡度 $i = 1:3$, 该斜坡的水平距离 $AC = 6$ 米, 那么斜坡 AB 的长等于_____米.



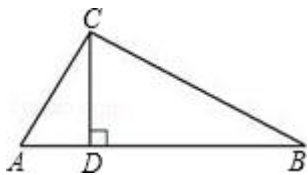
14. (4 分) 如图, 已知直线 AB 与 $\odot O$ 相交于 A 、 B 两点, $\angle OAB = 30^\circ$, 半径 $OA = 2$, 那么弦 $AB =$ _____.



15. (4 分) 已知 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的半径分别为 3 和 2, 若两圆相交, 那么这两圆的圆心距 AB 的取值范围是_____.

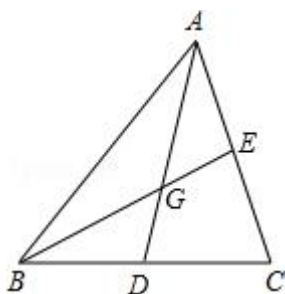
16. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $CD = 4$, $\cos A = \frac{2}{3}$,

那么 $BC =$ _____.

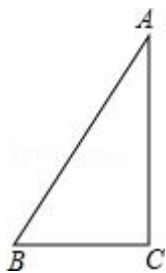


17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, AD 、 BE

相交于 G . 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BE} =$ _____ (用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).



18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 C 旋转 90° , 点 A 、 B 的对应点分别是 D 、 E , 那么 $\tan \angle ADE$ 的值_____.



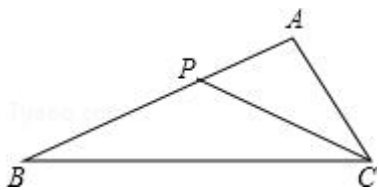
三、解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $|2\sin 45^\circ - \tan 45^\circ| + \frac{\cos 30^\circ - \tan 60^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\cot 30^\circ}$.

20. (10分) 如图, $\triangle ABC$ 中, PC 平分 $\angle ACB$, $PB = PC$.

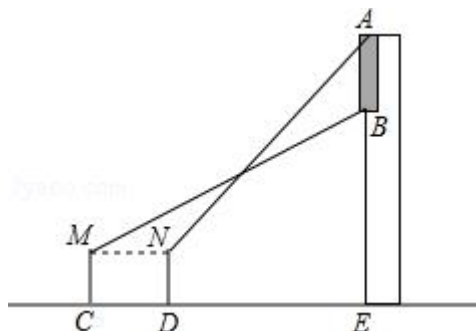
(1) 求证: $\triangle APC \sim \triangle ACB$;

(2) 若 $AP = 2$, $PC = 6$, 求 AC 的长.



21. (10分) 如图, 小明在广场上的 C 处用测角仪正面测量一座楼房墙上的广告屏幕 AB 的长度, 测得屏幕下端 B 处的仰角为 30° , 然后他正对大楼方向前

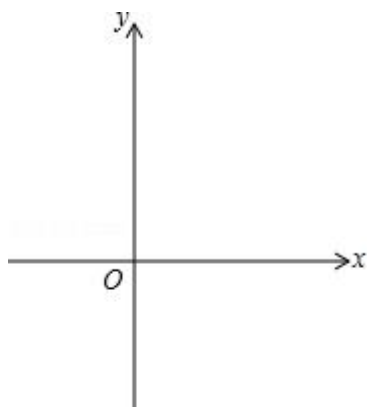
进 10 米到达 D 处，又测得该屏幕上端 A 处的仰角为 45° ，已知该楼高 18.7 米，测角仪 MC 、 ND 的高度为 1.7 米，求广告屏幕 AB 的长.



22. (10 分) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 向右平移 2 个单位得到抛物线 $y = a(x - 3)^2 - 1$ ，且平移后的抛物线经过点 $A(2, 1)$.

(1) 求平移后抛物线的解析式；

(2) 设原抛物线与 y 轴的交点为 B ，顶点为 P ，平移后抛物线的对称轴与 x 轴交于点 M ，求 $\triangle BPM$ 的面积.

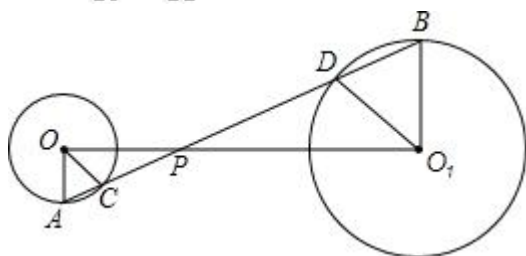


23. (12 分) 已知 $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 相离， OC 与 O_1D 分别是 $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的半径， $OC \parallel O_1D$ ，直线 CD 交 OO_1 于点 P ，交 $\odot O$ 于点 A ，交 $\odot O_1$ 于点 B .

求证：

(1) $OA \parallel O_1B$;

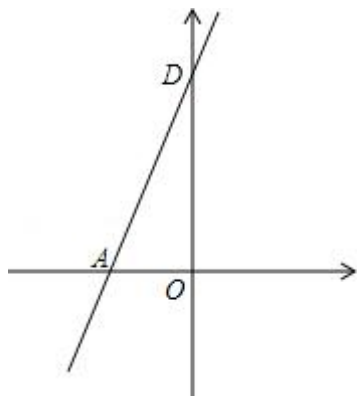
(2) $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BD}$.



24. (12 分) 如图，已知直线 $y = 2x + 6$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 D 两点，抛物

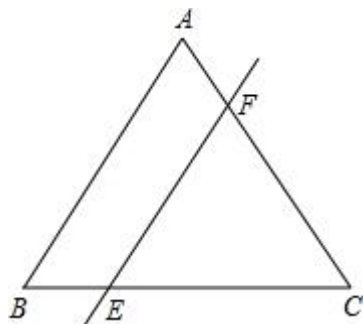
线 $y = ax^2 + bx + 2$ ($a \neq 0$) 经过点 A 和点 $B(1, 0)$.

- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 在线段 AD 上取一点 F (点 F 不与点 A 重合). 过点 F 作 x 轴的垂线交抛物线于点 G 、交 x 轴于点 H . 当 $FG = GH$ 时, 求点 H 的坐标;
- (3) 设抛物线的对称轴与直线 AD 交于点 E , 抛物线与 y 轴的交点为 C , 点 M 在线段 AB 上, 当 $\triangle AEM$ 与 $\triangle BCM$ 相似时, 求点 M 的坐标.



25. (14 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $BC = 12$, 点 E, F 分别在边 BC 、 AC 上 (点 F 不与点 A, C 重合) $EF \parallel AB$. 把 $\triangle ABC$ 沿直线 EF 翻折, 点 C 与点 D 重合, 设 $FC = x$.

- (1) 求 $\angle B$ 的余切值;
- (2) 当点 D 在 $\triangle ABC$ 的外部时, DE, DF 分别交 AB 于 M, N , 若 $MN = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式并写出定义域;
- (3) (下列所有问题只要直接写出结果即可) 以 E 为圆心、 BE 长为半径的 $\odot E$ 与边 AC .
 - ①没有公共点时, 求 x 的取值范围;
 - ②一个公共点时, 求 x 的取值范围;
 - ③两个公共点时, 求 x 的取值范围.



2015 年上海市金山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）抛物线 $y = 2x^2 + 1$ 的顶点坐标是（ ）

- A. (2, 1) B. (0, 1) C. (1, 0) D. (1, 2)

【考点】H3：二次函数的性质．

【分析】根据二次函数的顶点式可求得其顶点坐标．

【解答】解：

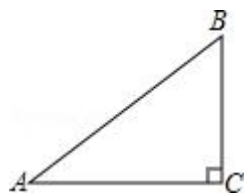
$$\because y = 2x^2 + 1 = 2(x - 0)^2 + 1,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 (0, 1),

故选：B.

【点评】本题主要考查抛物线的顶点坐标，掌握顶点式方程 $y = a(x - h)^2 + k$ 的顶点坐标为 (h, k) 是解题的关键．

2.（4 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，则 $\sin A$ 的值是（ ）



- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【考点】T1：锐角三角函数的定义．

【分析】利用正弦函数的定义即可直接求解．

【解答】解： $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$ ．

故选：C.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边．

3.（4 分）已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，点 A、B、C 对应点分别是 D、E、F， $AB : DE = 9 : 4$ ，那么 $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle DEF}$ 等于（ ）

A. 3: 2

B. 9: 4

C. 16: 81

D. 81: 16

【考点】S7: 相似三角形的性质.

【分析】根据相似三角形面积的比等于相似比的平方解答.

【解答】解: $\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB: DE = 9: 4$,

$$\therefore S_{\triangle ABC}: S_{\triangle DEF} = 81: 16.$$

故选: D.

【点评】本题考查了相似三角形的性质, 是基础题, 熟记性质是解题的关键.

4. (4分) 正多边形的中心角是 36° , 那么这个正多边形的边数是 ()

A. 10

B. 8

C. 6

D. 5

【考点】MM: 正多边形和圆.

【分析】设这个正多边形的边数是 n , 再根据正多边形的中心角是 36° 求出 n 的值即可.

【解答】解: 设这个正多边形的边数是 n ,

$\because$ 正多边形的中心角是 36° ,

$$\therefore \frac{360^\circ}{n} = 36^\circ, \text{ 解得 } n = 10.$$

故选: A.

【点评】本题考查的是正多边形和圆, 熟知正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角是解答此题的关键.

5. (4分) 已知 $\odot M$ 与 $\odot N$ 的半径分别为 1 和 5, 若两圆相切, 那么这两圆的圆心距 MN 的长等于 ()

A. 4

B. 6

C. 4 或 5

D. 4 或 6

【考点】MJ: 圆与圆的位置关系.

【分析】外切时, 圆心距为 $1+5=6$; 内切时, 圆心距 $5-1=4$.

【解答】解: $\because$ 两圆相切,

$\therefore$ 两圆可能外切和内切,

$\therefore$ 外切时, 圆心距为 $1+5=6$;

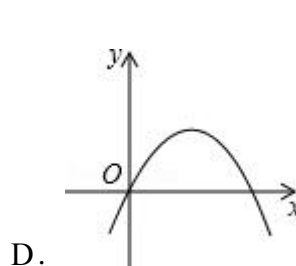
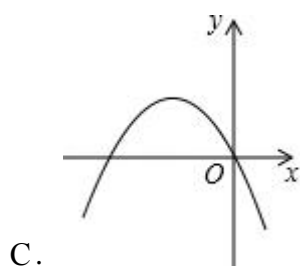
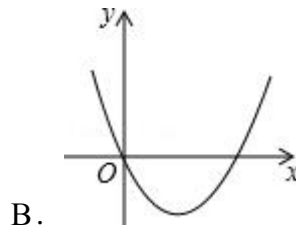
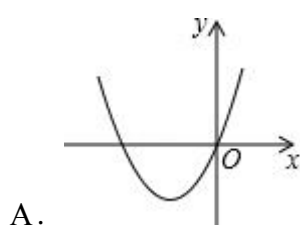
内切时, 圆心距为 $5-1=4$.

$\therefore$ 圆心距为 6 或 4.

故选: D.

【点评】考查了圆与圆的位置关系，本题用到的知识点为：两圆外切，圆心距 = 两圆半径之和．两圆内切，圆心距 = 两圆半径之差．

6. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)，当 $x > 0$ 时，它的图象 y 随 x 的增大而减小，那么二次函数 $y = ax^2 - ax$ 的图象只可能是 ()



【考点】G4：反比例函数的性质；H2：二次函数的图象．

【分析】根据反比例函数的增减性判断出 $a > 0$ ，再根据二次函数的性质判定即可．

【解答】解：∵ 反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)，当 $x > 0$ 时，它的图象 y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore a > 0,$$

∴ 二次函数 $y = ax^2 - ax$ 图象开口向上，

$$\text{对称轴为直线 } x = -\frac{-a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

故选：B．

【点评】本题考查了二次函数的图象，反比例函数的性质，熟记性质并判断出 $a > 0$ 是解题的关键．

二、填空题（共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分）

7. (4分) 已知 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ，则 $\frac{x-y}{x+y} = \underline{-\frac{1}{5}}$ ．

【考点】S1：比例的性质．

【专题】11：计算题．

【分析】 根据合分比定理[如果 $a:b=c:d$ 那么 $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$ ($b、d、a-b、c-d \neq 0$)]来解答即可.

【解答】 解: 由已知, 得

$$\frac{x-y}{x+y} = -\frac{2-3}{2+3},$$

即 $\frac{x-y}{x+y} = -\frac{1}{5}.$

【点评】 本题主要考查的是合分比定理: 一个比例里, 第一个前后项之和与它们的差的比, 等于第二个比的前后项的和与它们的差的比. 这叫做比例中的合分比定理.

8. (4分) 计算: $2(2\vec{a} - \vec{b}) + 3(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}) = \underline{7\vec{a} - 3\vec{b}}.$

【考点】 LM: *平面向量.

【分析】 直接利用平面向量的加减运算法则求解即可求得答案, 注意去括号时符号的变化.

【解答】 解: $2(2\vec{a} - \vec{b}) + 3(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}) = 4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{a} - \vec{b} = 7\vec{a} - 3\vec{b}.$

故答案为: $7\vec{a} - 3\vec{b}.$

【点评】 此题考查了平面向量的运算. 此题难度不大, 注意掌握平面向量的运算法则是解此题的关键.

9. (4分) 将抛物线 $y = 2(x-1)^2 + 1$ 向上平移 3 个单位, 那么平移后得到的抛物线的解析式是 $\underline{y = 2(x-1)^2 + 4}.$

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

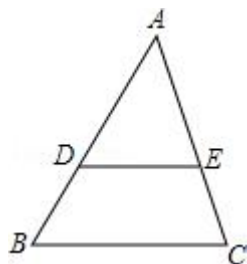
【分析】 根据题意易得新抛物线的顶点, 根据顶点式及平移前后二次项的系数不变可得新抛物线的解析式.

【解答】 解: 抛物线 $y = 2(x-1)^2 + 1$ 的顶点坐标是 $(1, 1)$,
则抛物线 $y = 2(x-1)^2 + 1$ 向上平移 3 个单位后的顶点坐标是 $(1, 4)$,
所以, 平移后得到的抛物线的解析式是 $y = 2(x-1)^2 + 4.$
故答案为: $y = 2(x-1)^2 + 4.$

【点评】 此题主要考查了次函数图象与几何变换, 要求熟练掌握平移的规律: 左加右减, 上加下减.

10. (4分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 $D、E$ 分别在边 $AB、AC$ 上, $DE \parallel BC$, 若

$AD = 4$, $BD = 2$, $DE = 3$, 那么 $BC = \underline{4.5}$.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 如图, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 得到 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, 即可解决问题.

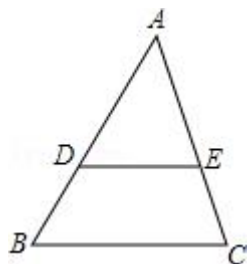
【解答】 解: 如图, $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$, 而 $AD = 4$, $BD = 2$, $DE = 3$,

$\therefore BC = 4.5$,

故答案为 4.5.



【点评】 该题主要考查了相似三角形的判定及其性质的应用问题; 灵活运用相似三角形的判定及其性质是解题的基础和关键.

11. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $AC:BC = 3:4$, 那么 $\cos A$ 的值为 $\underline{\frac{3}{5}}$.

【考点】 T1: 锐角三角函数的定义.

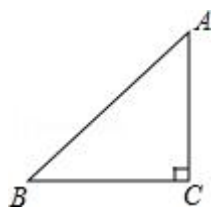
【分析】 根据题意设 $AC = 3x$, $BC = 4x$, 故 $AB = 5x$, 进而利用锐角三角函数关系求出答案.

【解答】 解: 如图所示: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC:BC = 3:4$,

$\therefore$ 设 $AC = 3x$, $BC = 4x$, 故 $AB = 5x$,

则 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$.

故答案为: $\frac{3}{5}$.



【点评】此题主要考查了锐角三角函数关系, 正确记忆锐角三角函数关系是解题关键.

12. (4分) 已知 $\odot O$ 的半径为5, 点 A 在 $\odot O$ 外, 那么线段 OA 的取值范围是 $OA > 5$.

【考点】M8: 点与圆的位置关系.

【分析】要确定点与圆的位置关系, 主要确定点与圆心的距离与半径的大小关系, 设点与圆心的距离 d , 则 $d > r$ 时, 点在圆外; 当 $d = r$ 时, 点在圆上; 当 $d < r$ 时, 点在圆内.

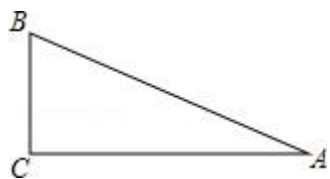
【解答】解: $\because \odot O$ 的半径为5, 点 A 在 $\odot O$ 外,

$\therefore$ 线段 OA 的取值范围是 $OA > 5$.

故答案为: $OA > 5$.

【点评】考查了点与圆的位置关系, 判断点与圆的位置关系, 也就是比较点与圆心的距离和半径的大小关系.

13. (4分) 如图, 斜坡 AB 的坡度 $i = 1:3$, 该斜坡的水平距离 $AC = 6$ 米, 那么斜坡 AB 的长等于 $2\sqrt{10}$ 米.



【考点】T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】直接利用坡度的定义, 坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比, 又叫做坡比, 进而得出答案.

【解答】解: $\because$ 斜坡 AB 的坡度 $i = 1:3$,

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3},$$

$\because$ 该斜坡的水平距离 $AC = 6$ 米,

$$\therefore \frac{BC}{6} = \frac{1}{3},$$

解得： $BC = 2$,

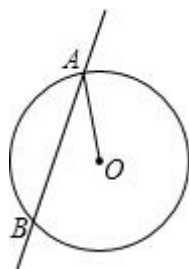
则斜坡 AB 的长为： $\sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ (m).

故答案为： $2\sqrt{10}$.

【点评】此题主要考查了坡度的定义，正确把握定义是解题关键.

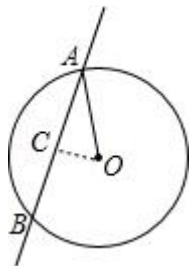
14. (4分) 如图，已知直线 AB 与 $\odot O$ 相交于 A 、 B 两点， $\angle OAB = 30^\circ$ ，半径

$OA = 2$ ，那么弦 $AB = \underline{2\sqrt{3}}$.



【考点】KO：含 30° 度角的直角三角形；KQ：勾股定理；M2：垂径定理.

【分析】过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ，根据垂直和垂径定理求出 $AB = 2AC$ ， $\angle OCA = 90^\circ$ ，根据含 30° 度角的直角三角形性质求出 $OC = 1$ ，根据勾股定理求出 AC ，即可得出答案.



【解答】解：

过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ，

则 $AB = 2AC$ ， $\angle OCA = 90^\circ$ ，

$\because OA = 2$ ， $\angle OAB = 30^\circ$ ，

$\therefore OC = 1$ ，由勾股定理得： $AC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore AB = 2AC = 2\sqrt{3}$ ，

故答案为： $2\sqrt{3}$.

【点评】本题考查了垂径定理，含 30° 度角的直角三角形性质，勾股定理的应用，解此题的关键是正确作出辅助线后求出 AC 的长和得出 $AB = 2AC$ ，注意：垂

直于弦的直径平分这条弦.

15. (4分) 已知 $\odot A$ 与 $\odot B$ 的半径分别为3和2, 若两圆相交, 那么这两圆的圆心距 AB 的取值范围是 $1 < AB < 5$.

【考点】MJ: 圆与圆的位置关系.

【分析】两圆相交时, 圆心距介于两圆半径的差与和之间.

【解答】解: $\because$ 两圆半径分别为2、3,

$$3 - 2 = 1, \quad 3 + 2 = 5,$$

$\because$ 两圆相交

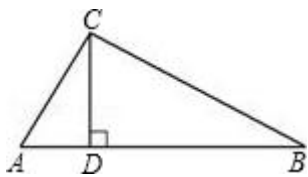
$$\therefore 1 < AB < 5,$$

故答案为: $1 < AB < 5$.

【点评】本题考查了圆与圆的位置关系, 利用了两圆相交时, 圆心距介于两圆半径的差与和之间的性质求解.

16. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $CD = 4$, $\cos A = \frac{2}{3}$,

那么 $BC =$ 6.



【考点】T7: 解直角三角形.

【分析】先利用同角的余角相等, 得出 $\angle A = \angle BCD$, 然后利用三角函数求出 BC 的值即可.

【解答】解: $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A,$$

$$\therefore \cos \angle BCD = \cos A = \frac{2}{3},$$

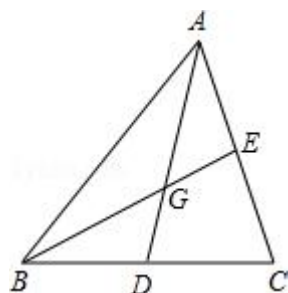
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \cos \angle BCD = \frac{CD}{BC} = \frac{4}{BC} = \frac{2}{3},$$

所以 $BC = 6$.

故答案为：6.

【点评】 本题主要考查了解直角三角形，解题的关键是利用同角的余角相等，得出 $\angle A = \angle BCD$.

17. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线， AD 、 BE 相交于 G . 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$ (用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).



【考点】 LM: *平面向量.

【分析】 由 AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线，可求得 $\overrightarrow{AE}$ 的长，然后由三角形法则，求得 $\overrightarrow{BE}$.

【解答】 解： $\because AD$ 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线，

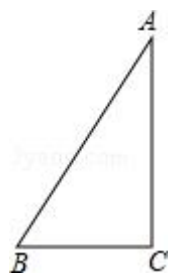
$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.

【点评】 此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大，注意掌握三角形法则的应用，注意掌握数形结合思想的应用.

18. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，将 $\triangle ABC$ 绕着点 C 旋转 90° ，点 A 、 B 的对应点分别是 D 、 E ，那么 $\tan \angle ADE$ 的值 7 或 $\frac{1}{7}$.



【考点】 R2: 旋转的性质.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据勾股定理计算出 $AB = 5$ ，然后分类讨论：

当 $\triangle ABC$ 绕着点 C 顺时针旋转 90° ，点 A 、 B 的对应点分别是 D 、 E ，如图 1，
作 $EH \perp AD$ 于 H ，根据旋转的性质得 $CE = CB = 3$ ， $CD = CA = 4$ ， $\angle ACD = 90^\circ$ ，
则 $AE = AC - CE = 1$ ，可判断 $\triangle ACD$ 为等腰直角三角形，则 $AD = \sqrt{2}CD = 4\sqrt{2}$ ，
 $\angle CAD = 45^\circ$ ，接着判断 $\triangle AEH$ 为等腰直角三角形得到 $AH = EH = \frac{\sqrt{2}}{2}AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，
于是可计算出 $DH = AD - AH = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ ，然后利用正切的定义可计算出 $\tan \angle ADE$ 的值；

当 $\triangle ABC$ 绕着点 C 逆时针旋转 90° ，点 A 、 B 的对应点分别是 D 、 E ，如图 2，
延长 AB 交 DE 于 H ，根据旋转的性质得 $CD = CA = 4$ ， $CE = CB = 3$ ， $DE = AB = 5$ ，
 $\angle ACD = 90^\circ$ ， $AH \perp DE$ ，则 $DB = CD - BC = 1$ ，利用面积法可计算出 $AH = \frac{28}{5}$ ，
则 $BH = AH - AB = \frac{3}{5}$ ，再在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中利用勾股定理计算出 $DH = \frac{4}{5}$ ，
然后在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中利用正切的定义求解。

【解答】 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，则 $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 5$ ，

当 $\triangle ABC$ 绕着点 C 顺时针旋转 90° ，点 A 、 B 的对应点分别是 D 、 E ，如图 1，
作 $EH \perp AD$ 于 H ，

$$\therefore CE = CB = 3, CD = CA = 4, \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = AC - CE = 1,$$

$\therefore \triangle ACD$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore AD = \sqrt{2}CD = 4\sqrt{2}, \angle CAD = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle AEH$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore AH = EH = \frac{\sqrt{2}}{2}AE = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore DH = AD - AH = 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \tan \angle ADE = \frac{EH}{DH} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{7},$$

当 $\triangle ABC$ 绕着点 C 逆时针旋转 90° ，点 A 、 B 的对应点分别是 D 、 E ，如图 2，

延长 AB 交 DE 于 H ,

$$\therefore CD = CA = 4, CE = CB = 3, DE = AB = 5, \angle ACD = 90^\circ, AH \perp DE,$$

$$\therefore DB = CD - BC = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AH \cdot DE = \frac{1}{2}AE \cdot CD,$$

$$\therefore AH = \frac{4 \times 7}{5} = \frac{28}{5},$$

$$\therefore BH = AH - AB = \frac{3}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle BDH$ 中, $\therefore DB = 1, BH = \frac{3}{5},$

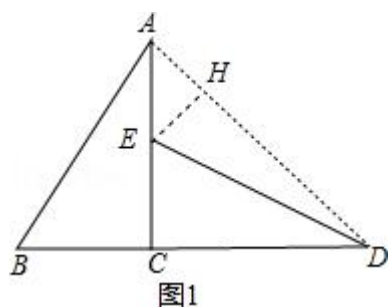
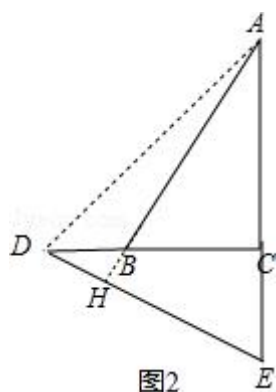
$$\therefore DH = \sqrt{DB^2 - BH^2} = \frac{4}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, $\tan \angle ADH = \frac{AH}{DH} = \frac{\frac{28}{5}}{\frac{4}{5}} = 7,$

即 $\tan \angle ADE = 7,$

综上所述, $\tan \angle ADE$ 的值为 $\frac{1}{7}$ 或 $7.$

故答案为 $\frac{1}{7}$ 或 $7.$



【点评】 本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转

中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了等腰直角三角形的性质和锐角三角函数的定义．

三、解答题（共 7 小题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $|2\sin 45^\circ - \tan 45^\circ| + \frac{\cos 30^\circ - \tan 60^\circ \cdot \cos 45^\circ}{\cot 30^\circ}$.

【考点】T5：特殊角的三角函数值．

【分析】直接利用特殊角的三角函数值代入求出即可．

【解答】解：原式 $= |2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1| + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$= \sqrt{2} - 1 + \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

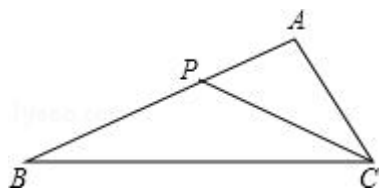
$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2}.$$

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键．

20.（10 分）如图， $\triangle ABC$ 中， PC 平分 $\angle ACB$ ， $PB = PC$.

（1）求证： $\triangle APC \sim \triangle ACB$ ；

（2）若 $AP = 2$ ， $PC = 6$ ，求 AC 的长．



【考点】S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】（1）证明 $\angle B = \angle ACP$ ，结合 $\angle A = \angle A$ ，即可解决问题．

（2）由 $\triangle APC \sim \triangle ACB$ ，得到 $\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB}$ ，利用 $AP = 2$ ， $PC = 6$ ， $AB = 8$ ，即可解决问题．

【解答】解：（1） $\because PB = PC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle PCB;$$

$\because PC$ 平分 $\angle ACB$ ，

$$\therefore \angle ACP = \angle PCB, \angle B = \angle ACP,$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle APC \sim \triangle ACB.$$

（2） $\because \triangle APC \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

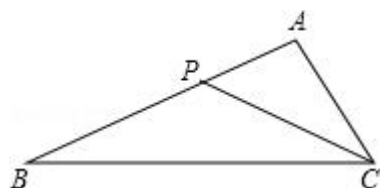
$$\because AP = 2, PC = 6, AB = 8,$$

$$\therefore AC = 4.$$

$$\because AP + AC = PC = 6,$$

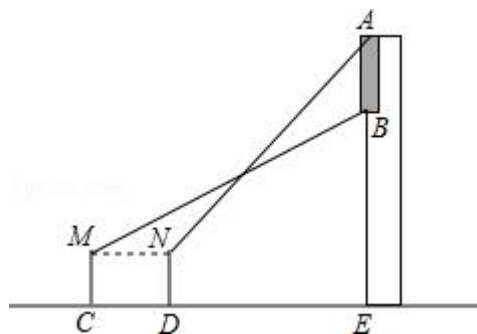
这与三角形的任意两边之和大于第三边相矛盾,

$\therefore$ 该题无解.



【点评】 该题主要考查了相似三角形的判定及其性质的应用问题; 牢固掌握相似三角形的判定及其性质是灵活运用、解题的基础和关键.

21. (10 分) 如图, 小明在广场上的 C 处用测角仪正面测量一座楼房墙上的广告屏幕 AB 的长度, 测得屏幕下端 B 处的仰角为 30° , 然后他正对大楼方向前进 10 米到达 D 处, 又测得该屏幕上端 A 处的仰角为 45° , 已知该楼高 18.7 米, 测角仪 MC 、 ND 的高度为 1.7 米, 求广告屏幕 AB 的长.



【考点】 TA: 解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【分析】 过点 N 作 $NF \perp AE$ 于点 F , 设 $BF = x$, 根据题意可知 $\angle BMF = 30^\circ$, $\angle ANF = 45^\circ$, 分别在 $\text{Rt}\triangle BMF$ 和 $\text{Rt}\triangle ANF$ 中求出 MF 、 AF 的长度, 根据楼高为 18.7 米可得 $AF + EF = 18.7$ 米, 代入求出 x 的值, 继而可求得 AB 的长度.

【解答】 解: 过点 N 作 $NF \perp AE$ 于点 F ,

则四边形 $NDEF$ 为矩形, $ND = EF$,

设 $BF = x$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle BMF$ 中,

$$\because \angle BMF = 30^\circ,$$

$$\therefore MF = \sqrt{3}BF = \sqrt{3}x,$$

$$\because MN = 10 \text{ 米},$$

$$\therefore NF = \sqrt{3}x - 10,$$

$$\because \angle ANF = 45^\circ,$$

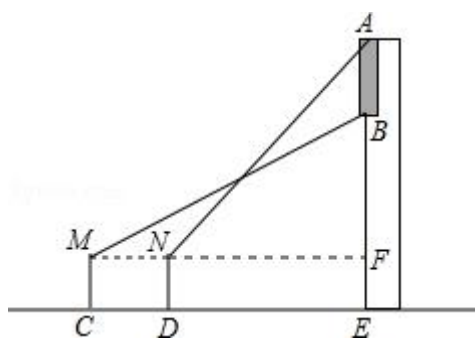
$$\therefore AF = NF = \sqrt{3}x - 10,$$

$$\therefore \sqrt{3}x - 10 + 1.7 = 18.7,$$

$$\text{解得: } x = 9\sqrt{3},$$

$$\text{则 } AB = AF - BF = 17 - 9\sqrt{3}.$$

即广告屏幕 AB 的长度为 $(17 - 9\sqrt{3})$ 米.

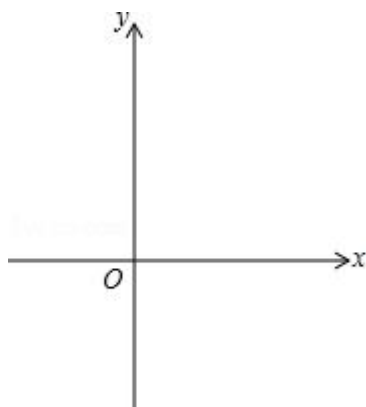


【点评】 本题考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是根据坡度和仰角构造直角三角形，利用三角函数的知识求解，难度一般.

22. (10 分) 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 向右平移 2 个单位得到抛物线 $y = a(x - 3)^2 - 1$ ，且平移后的抛物线经过点 $A(2, 1)$.

(1) 求平移后抛物线的解析式;

(2) 设原抛物线与 y 轴的交点为 B ，顶点为 P ，平移后抛物线的对称轴与 x 轴交于点 M ，求 $\triangle BPM$ 的面积.



【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】 (1) 把点 A 代入平移后的抛物线 $y = a(x - 3)^2 - 1$ 来求 a 的值;

(2) 根据平移前、后的函数解析式, 然后求出 B 、 P 、 M 三点的坐标, 根据三角形的面积公式即可求出 $\triangle BPM$ 的面积.

【解答】 解: (1) 把点 $A(2, 1)$ 代入 $y = a(x - 3)^2 - 1$, 得

$$1 = a(2 - 3)^2 - 1,$$

整理, 得

$$1 = a - 1,$$

解得 $a = 2$.

则平移后的抛物线解析式为: $y = 2(x - 3)^2 - 1$;

(2) 由 (1) 知, 平移后的抛物线解析式为: $y = 2(x - 3)^2 - 1$, 则 $M(3, 0)$

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 向右平移 2 个单位得到抛物线 $y = 2(x - 3)^2 - 1$,

$\therefore$ 平移前的抛物线解析式为: $y = 2(x - 1)^2 - 1$.

$\therefore P(1, -1)$.

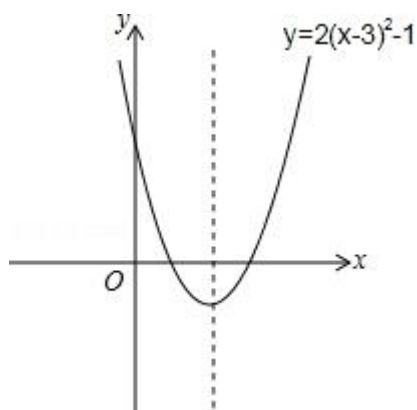
令 $x = 0$, 则 $y = 1$.

故 $B(0, 1)$,

$$\therefore BM = \sqrt{10}$$

易推知 $BM^2 = BP^2 + PM^2$, 即 $\triangle BPM$ 为直角三角形,

$$\therefore S_{\triangle BPM} = \frac{1}{2}BP \cdot MP = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \frac{5}{2}.$$



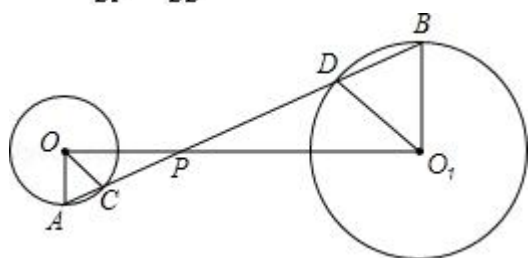
【点评】 本题主要考查了二次函数解析式的确定、图形的面积求法、函数图象交点等知识及综合应用知识、解决问题的能力.

23. (12分) 已知 $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 相离, OC 与 O_1D 分别是 $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 的半径, $OC \parallel O_1D$, 直线 CD 交 OO_1 于点 P , 交 $\odot O$ 于点 A , 交 $\odot O_1$ 于点 B .

求证:

(1) $OA \parallel O_1B$;

(2) $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BD}$.



【考点】 MJ: 圆与圆的位置关系; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 14: 证明题.

【分析】 (1) 证明 $\angle OAC = \angle O_1BD$, 即可解决问题.

(2) 证明 $\triangle APO \sim \triangle BPO_1$, 得到 $\frac{AP}{BP} = \frac{OA}{O_1B}$; 证明 $\triangle OAC \sim \triangle O_1BD$, 得到 $\frac{AC}{BD} = \frac{OA}{O_1B}$,

即可解决问题.

【解答】 解: (1) $\because OC \parallel O_1D$,

$$\therefore \angle OCP = \angle O_1DP,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle O_1DB;$$

$$\because OA = OC, OB = OD,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA, \angle O_1DB = \angle O_1BD,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle O_1BD,$$

$$\therefore OA \parallel O_1B.$$

$$(2) \because \angle OAC = \angle O_1BD, \angle APO = \angle BPO_1,$$

$$\therefore \triangle APO \sim \triangle BPO_1,$$

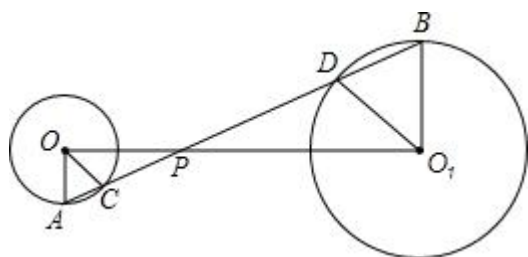
$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{OA}{O_1B};$$

$$\because \angle OAC = \angle O_1BD, \angle OCA = \angle O_1DB,$$

$$\therefore \triangle OAC \sim \triangle O_1BD,$$

$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{OA}{O_1B},$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BD}.$$



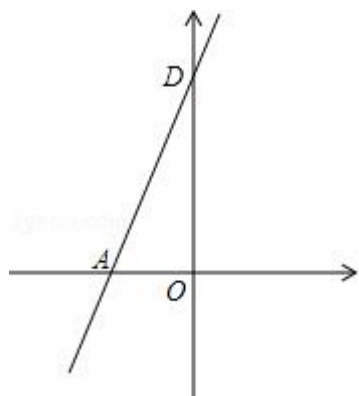
【点评】该题以圆为载体，以考查圆的性质、相似三角形的判定及其性质等几何知识点为核心构造而成；对综合的分析问题解决问题的能力提出了较高的要求。

24. (12分) 如图，已知直线 $y = 2x + 6$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 D 两点，抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ ($a \neq 0$) 经过点 A 和点 $B(1, 0)$ 。

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 在线段 AD 上取一点 F (点 F 不与点 A 重合)。过点 F 作 x 轴的垂线交抛物线于点 G 、交 x 轴于点 H 。当 $FG = GH$ 时，求点 H 的坐标；

(3) 设抛物线的对称轴与直线 AD 交于点 E ，抛物线与 y 轴的交点为 C ，点 M 在线段 AB 上，当 $\triangle AEM$ 与 $\triangle BCM$ 相似时，求点 M 的坐标。



【考点】HF：二次函数综合题。

【分析】(1) 根据函数值，可得相应自变量的值，根据待定系数法，可得函数解析式；

(2) 根据自变量的值，可得相应函数值，根据 $FG = GH$ ，可得关于 a 的方程，解方程，可得答案；

(3) 根据相似三角形的性质，可得关于 b 的方程，解方程，可得答案。

【解答】解：(1) 当 $y = 0$ 时， $2x + 6 = 0$ 。解得 $x = -3$ ，即 $A(-3, 0)$ ，由抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$ ，得

$$\begin{cases} 9a-3b+2=0 \\ a+b+2=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-\frac{2}{3} \\ b=-\frac{4}{3} \end{cases}.$$

故抛物线为 $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$;

(2) 设 H 点的坐标为 $(a, 0)$, $F(a, 2a+6)$, $G(a, -\frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{3}a + 2)$.

由 $FG = GH$, 得

$$2a+6 = 2(-\frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{3}a + 2).$$

化简, 得 $2a^2 + 7a + 3 = 0$.

解得 $a = -\frac{1}{2}$, $a = -3$ (不符合题意要舍去),

点 H 的坐标 $(-\frac{1}{2}, 0)$;

(3) 设 M 点坐标为 $(b, 0)$, $AM = b+3$, $BM = 1-b$,

抛物线的对称轴与直线 AD 交于点 E , 抛物线与 y 轴的交点为 C , 得

$E(-1, 4)$, $C(0, 2)$.

由勾股定理, 得

$$AE = 2\sqrt{5}, BC = \sqrt{5}.$$

当 $\triangle AEM \sim \triangle BCM$ 时, $\frac{AE}{BC} = \frac{AM}{BM}$, 即 $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{b+3}{1-b}$.

化简, 得 $3b = -1$, 解得 $b = -\frac{1}{3}$, 即 $M(-\frac{1}{3}, 0)$;

当 $\triangle AEM \sim \triangle BMC$ 时, $\frac{AE}{BM} = \frac{AM}{BC}$, 即 $\frac{2\sqrt{5}}{1-b} = \frac{b+3}{\sqrt{5}}$,

化简, 得 $b^2 + 2b + 7 = 0$. 实数 b 不存在;

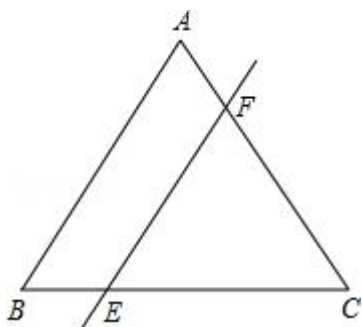
综上所述: $M(-\frac{1}{3}, 0)$.

【点评】 本题考查了二次函数综合题, (1) 利用了待定系数法求函数解析式, (2)

利用了线段中点的性质, (3) 利用了相似三角形的性质.

25. (14 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $BC = 12$, 点 E, F 分别在边 BC, AC 上 (点 F 不与点 A, C 重合) $EF \parallel AB$. 把 $\triangle ABC$ 沿直线 EF 翻折, 点 C 与点 D 重合, 设 $FC = x$.

- (1) 求 $\angle B$ 的余切值;
- (2) 当点 D 在 $\triangle ABC$ 的外部时, DE 、 DF 分别交 AB 于 M 、 N , 若 $MN=y$, 求 y 关于 x 的函数关系式并写出定义域;
- (3) (下列所有问题只要直接写出结果即可) 以 E 为圆心、 BE 长为半径的 $\odot E$ 与边 AC .
- ①没有公共点时, 求 x 的取值范围;
- ②一个公共点时, 求 x 的取值范围;
- ③两个公共点时, 求 x 的取值范围.



【考点】 SO: 相似形综合题.

【分析】 (1) 作 $AH \perp BC$, 垂足为 H , 先求出 BH , 再根据勾股定理求出 AH , 即可得出结果;

(2) 先求出 $EC = \frac{6}{5}x$, $BE = 12 - \frac{6}{5}x$, 再求出 $ME = BE = 12 - \frac{6}{5}x$, $DM = DE - ME = \frac{12}{5}x - 12$, 然后由 $EF \parallel MN$, 得出比例式 $\frac{DM}{DE} = \frac{MN}{EF}$, 即可求出 $y = 2x - 10$,
($5 < x < 10$);

(3) 根据题意即可得出结果.

【解答】 解: (1) 作 $AH \perp BC$, 垂足为 H , 如图 1 所示:

$$\because AB = AC = 10, BC = 12,$$

$$\therefore BH = CH = 6,$$

$$\therefore AH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\therefore \cot B = \frac{BH}{AH} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

(2) 如图 2 所示:

$$\because EF \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{EC}{BC} = \frac{FC}{AC},$$

$$\text{即 } \frac{EC}{12} = \frac{x}{10},$$

$$\therefore EC = \frac{6}{5}x,$$

$$\therefore BE = 12 - \frac{6}{5}x,$$

$$\because \angle CEF = \angle DEF, EF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle BME = \angle DEF, \angle CEF = \angle B,$$

$$\therefore \angle BME = \angle B,$$

$$\therefore ME = BE = 12 - \frac{6}{5}x,$$

$$\therefore DM = DE - ME = \frac{12}{5}x - 12,$$

$$\because EF \parallel MN,$$

$$\therefore \frac{DM}{DE} = \frac{MN}{EF},$$

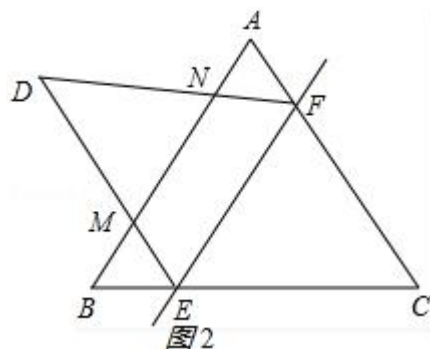
$$\text{即 } \frac{\frac{12}{5}x - 12}{\frac{6}{5}x} = \frac{y}{x},$$

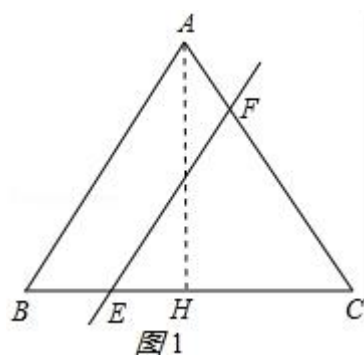
$$\therefore y = 2x - 10, (5 < x < 10);$$

(3) ①当 $0 < x < \frac{55}{18}$ 或 $\frac{50}{9} < x < 10$ 时, $\odot E$ 与边 AC 没有公共点;

②当 $x = \frac{50}{9}$ 或 $\frac{55}{18} \leq x < 5$ 时, $\odot E$ 与边 AC 有一个公共点;

③当 $5 \leq x < \frac{50}{9}$ 时, $\odot E$ 与边 AC 有两个公共点.





【点评】 本题考查了勾股定理、相似三角形的判定与性质、三角函数以及圆的切线等知识；构造直角三角形求三角函数和由平行线得出比例式是解题的关键．