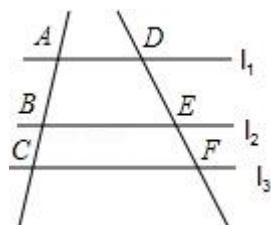


2015 年上海市普陀区中考数学一模试卷

一.选择题

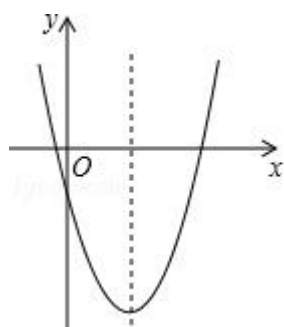
1. (3 分) 如图, 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 两直线 AC 和 DF 与 l_1, l_2, l_3 分别相交于点 A, B, C 和点 D, E, F . 下列各式中, 不一定成立的是 ()



- A. $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ B. $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ C. $\frac{AD}{BE} = \frac{BE}{CF}$ D. $\frac{EF}{FD} = \frac{BC}{CA}$
2. (3 分) 用一个 2 倍放大镜照一个 $\triangle ABC$, 下面说法中错误的是 ()
- A. $\triangle ABC$ 放大后, 面积是原来的 2 倍
- B. $\triangle ABC$ 放大后, 各边长是原来的 2 倍
- C. $\triangle ABC$ 放大后, 周长是原来的 2 倍
- D. $\triangle ABC$ 放大后, 面积是原来的 4 倍
3. (3 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 1$, $AB = 2$, 那么下列结论正确的是 ()

- A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\tan A = \frac{1}{2}$ C. $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cot B = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4. (3 分) 如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 那么 ()



- A. $a < 0, b > 0, c > 0$ B. $a > 0, b < 0, c > 0$
- C. $a > 0, b < 0, c < 0$ D. $a > 0, b > 0, c < 0$
5. (3 分) 下列命题中, 正确的个数是 ()
- (1) 三点确定一个圆; (2) 平分弦的直径垂直于弦;
- (3) 相等的圆心角所对的弧相等; (4) 正五边形是轴对称图形.

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

6. (3 分) 下列判断错误的是 ()

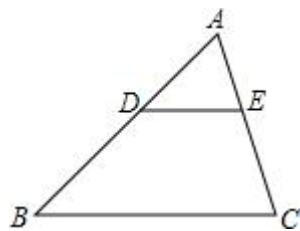
- A. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- B. 如果 $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量), 那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- C. 设 $\vec{e}$ 为单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$
- D. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$

二. 填空题

7. (3 分) 已知 $x:y = 5:2$, 那么 $(x+y):y = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (3 分) 计算: $2\vec{a} - 3(\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. (3 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, DE 与边 AB 相交于点 D , 与边 AC 相交于点 E , 如果 $AD = 3$, $BD = 4$, $AE = 2$, 那么 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$.



10. (3 分) 已知线段 MN 的长为 2 厘米, 点 P 是线段 MN 的黄金分割点, 那么较长的线段 MP 的长是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 厘米.

11. (3 分) 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象与 y 轴的交点坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

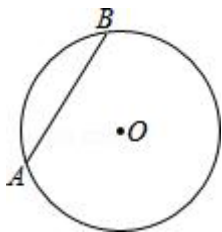
12. (3 分) 如果将抛物线 $y = -2x^2$ 平移, 使顶点移到点 $P(-3, 1)$ 的位置, 那么所得新抛物线的表达式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. (3 分) 正八边形的中心角等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 度.

14. (3 分) 用一根长 50 厘米的铁丝, 把它弯成一个矩形框, 设矩形框的一边长为 x 厘米, 面积为 y 平方厘米, 写出 y 关于 x 的函数解析式: $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. (3 分) 离旗杆 20 米处的地方用测角仪测得旗杆顶的仰角为 α , 如果测角仪高为 1.5 米, 那么旗杆的高为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 米 (用含 α 的三角函数表示).

16. (3 分) 如图, 已知 $\odot O$ 的半径为 5, $\odot O$ 的一条弦 AB 长为 8, 那么以 3 为半径的同心圆与弦 AB 位置关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

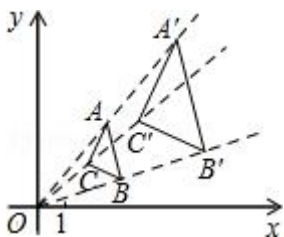


17. (3分) 我们定义: 如果一个图形上的点 A' 、 B' 、 $\dots$ 、 P' 和另一个图形上的点 A 、 B 、 $\dots$ 、 P 分别对应, 并且满足:

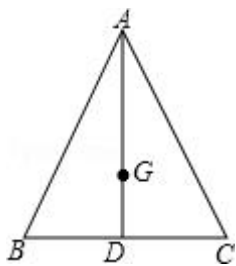
(1) 直线 AA' 、 BB' 、 $\dots$ 、 PP' 都经过同一点 O ;

(2) $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \dots = \frac{OP'}{OP} = k$, 那么这两个图形叫做位似图形, 点 O 叫做位似中心, k 叫做位似比.

如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是以坐标原点 O 为位似中心的位似图形, 且 $OB = BB'$, 如果点 $A(\frac{5}{2}, 3)$, 那么点 A' 的坐标为_____.



18. (3分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\tan B = 2$, $AD \perp BC$ 于点 D , G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 将 $\triangle ABC$ 绕着重心 G 旋转, 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 并且点 B_1 在直线 AD 上, 联结 CC_1 , 那么 $\tan \angle CC_1B_1$ 的值等于_____.



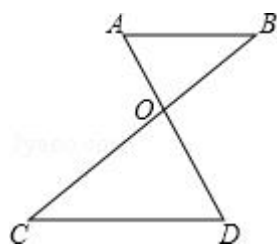
三.解答题

19. 计算: $4\sin 30^\circ - \sqrt{2}\cos 45^\circ + \sqrt{6}\tan 60^\circ$.

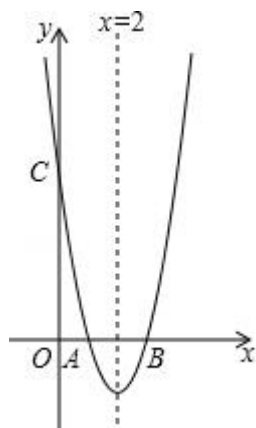
20. 如图, 已知 $AB \parallel CD$, AD 与 BC 相交于点 O , 且 $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$.

(1) 求 $\frac{AO}{AD}$ 的值.

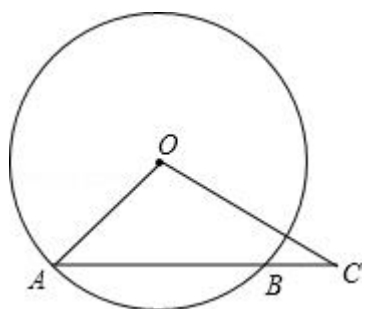
(2) 如果 $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, 请用 $\vec{a}$ 表示 $\overrightarrow{DA}$.



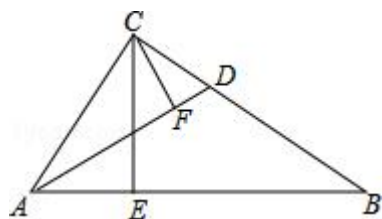
21. 如图，已知二次函数的图象与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0, 6)$ ，对称轴为直线 $x = 2$ ，求二次函数解析式并写出图象最低点坐标.



22. 如图，某新建公园有一个圆形人工湖，湖中心 O 处有一座喷泉，小明为测量湖的半径，在湖边选择 A 、 B 两个点，在 A 处测得 $\angle OAB = 45^\circ$ ，在 AB 延长线上的 C 处测得 $\angle OCA = 30^\circ$ ，已知 $BC = 50$ 米，求人工湖的半径. (结果保留根号)

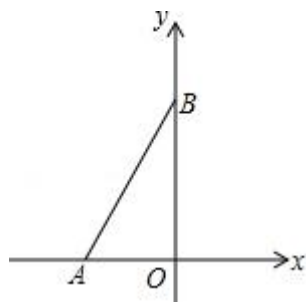


23. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 在边 BC 上， $CE \perp AB$ ， $CF \perp AD$ ， E 、 F 分别是垂足.
- (1) 求证： $AC^2 = AF \cdot AD$;
 - (2) 联结 EF ，求证： $AE \cdot DB = AD \cdot EF$.



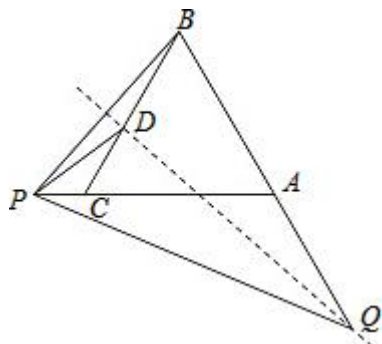
24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-m, 0)$ 和点 $B(0, 2m)$ ($m > 0$)，点 C 在 x 轴上（不与点 A 重合）

- (1) 当 $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOB$ 相似时，请直接写出点 C 的坐标（用 m 表示）
- (2) 当 $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOB$ 全等时，二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象经过 A 、 B 、 C 三点，求 m 的值，并求点 C 的坐标
- (3) P 是 (2) 的二次函数图象上的一点， $\angle APC = 90^\circ$ ，求点 P 的坐标及 $\angle ACP$ 的度数.



25. 如图，等边 $\triangle ABC$ ， $AB = 4$ ，点 P 是射线 AC 上的一动点，联结 BP ，作 BP 的垂直平分线交线段 BC 于点 D ，交射线 BA 于点 Q ，分别联结 PD ， PQ 。

- (1) 当点 P 在线段 AC 的延长线上时，
 - ① 求 $\angle DPQ$ 的度数，并求证： $\triangle DCP \sim \triangle PAQ$ ；
 - ② 设 $CP = x$ ， $AQ = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域；
- (2) 如果 $\triangle PCD$ 是等腰三角形，求 $\triangle APQ$ 的面积。

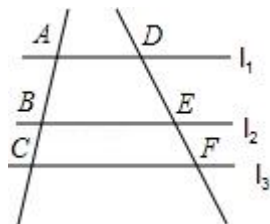


2015 年上海市普陀区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一.选择题

1. (3 分) 如图, 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 两直线 AC 和 DF 与 l_1, l_2, l_3 分别相交于点 A, B, C 和点 D, E, F . 下列各式中, 不一定成立的是 ()



- A. $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ B. $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ C. $\frac{AD}{BE} = \frac{BE}{CF}$ D. $\frac{EF}{FD} = \frac{BC}{CA}$

【考点】S4: 平行线分线段成比例.

【分析】根据平行线分线段成比例的性质 (三条平行线截两条直线, 所得的对应线段成比例), 逐项分析推出正确的比例式, 运用排除法即可找到正确的选项.

【解答】解: 如图, $\because$ 直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \frac{EF}{FD} = \frac{BC}{CA},$$

$\therefore A, B, D$ 选项中的等式成立, C 选项中的等式不一定成立.

故选: C.

【点评】本题主要考查平行线分线段成比例的性质, 关键在于认真的逐项分析找到成比例的线段.

2. (3 分) 用一个 2 倍放大镜照一个 $\triangle ABC$, 下面说法中错误的是 ()

- A. $\triangle ABC$ 放大后, 面积是原来的 2 倍
B. $\triangle ABC$ 放大后, 各边长是原来的 2 倍
C. $\triangle ABC$ 放大后, 周长是原来的 2 倍
D. $\triangle ABC$ 放大后, 面积是原来的 4 倍

【考点】S5: 相似图形.

【分析】用 2 倍的放大镜放大一个 $\triangle ABC$, 得到一个与原三角形相似的三角形; 根据相似三角形的性质: 相似三角形的面积比等于相似比的平方, 周长比等

于相似比. 可知: 放大后三角形的面积是原来的 4 倍, 边长和周长是原来的 2 倍, 而内角的度数不会改变.

【解答】解: $\because$ 放大前后的三角形相似,

$\therefore$ 放大后三角形的内角度数不变, 面积为原来的 4 倍, 周长和边长均为原来的 2 倍.

故选: A.

【点评】本题考查对相似三角形性质的理解.

(1) 相似三角形周长的比等于相似比;

(2) 相似三角形面积的比等于相似比的平方;

(3) 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

3. (3 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 1$, $AB = 2$, 那么下列结论正确的是 ()

A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\tan A = \frac{1}{2}$ C. $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cot B = \frac{\sqrt{3}}{3}$

【考点】T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】直接利用锐角三角函数关系分别求出即可.

【解答】解: 如图所示:

$$\because \angle ACB = 90^\circ, BC = 1, AB = 2,$$

$$\therefore AC = \sqrt{3},$$

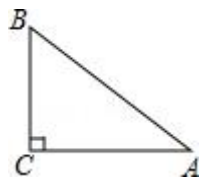
$$\therefore \sin A = \frac{1}{2}, \text{故选项 A 错误};$$

$$\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{故选项 B 错误};$$

$$\cos B = \frac{1}{2}, \text{故选项 C 错误};$$

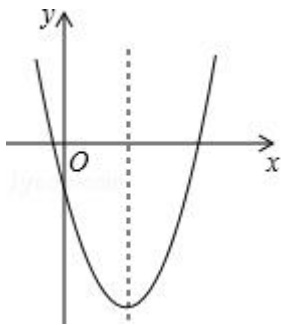
$$\cot B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{正确}.$$

故选: D.



【点评】此题主要考查了锐角三角函数关系, 正确记忆相关比例关系是解题关键.

4. (3 分) 如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 那么 ()



A. $a < 0, b > 0, c > 0$

B. $a > 0, b < 0, c > 0$

C. $a > 0, b < 0, c < 0$

D. $a > 0, b > 0, c < 0$

【考点】 H4: 二次函数图象与系数的关系.

【分析】 首先根据开口方向确定 a 的符号, 再依据对称轴的正负和 a 的符号即可判断 b 的符号, 然后根据与 y 轴的交点的纵坐标即可判断 c 的正负, 由此得出答案即可.

【解答】 解: $\because$ 图象开口方向向上,

$\therefore a > 0$;

$\because$ 图象的对称轴在 x 轴的正半轴上,

$\therefore -\frac{b}{2a} > 0$,

$\because a > 0$,

$\therefore b < 0$;

$\because$ 图象与 y 轴交点在 y 轴的负半轴上,

$\therefore c < 0$;

$\therefore a > 0, b < 0, c < 0$.

故选: C.

【点评】 本题主要考查二次函数的图象与系数的关系, 能根据图象正确确定各个系数的符号是解决此题的关键, 运用了数形结合思想.

5. (3分) 下列命题中, 正确的个数是 ()

(1) 三点确定一个圆;

(2) 平分弦的直径垂直于弦;

(3) 相等的圆心角所对的弧相等;

(4) 正五边形是轴对称图形.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【考点】 O1: 命题与定理.

【分析】 利用确定圆的条件、垂径定理、等弧的定义及正五边形的性质分别判断

后即可确定正确的选项.

【解答】解: (1) 不在同一直线上的三点确定一个圆, 错误;

(2) 平分弦 (不是直径) 的直径垂直于弦, 错误;

(3) 相等的圆心角所对的弧相等, 错误;

(4) 正五边形是轴对称图形, 正确.

故选: A.

【点评】本题考查了命题与定理的知识, 解题的关键是了解确定圆的条件、垂径定理、等弧的定义及正五边形的性质, 难度不大.

6. (3 分) 下列判断错误的是 ()

A. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

B. 如果 $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量), 那么 $\vec{a} // \vec{b}$

C. 设 $\vec{e}$ 为单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$

D. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} = \vec{b}$ 或 $\vec{a} = -\vec{b}$

【考点】LM: *平面向量.

【分析】根据单位向量、平行向量以及模的定义的知识求解即可求得答案, 注意掌握排除法在选择题中的应用.

【解答】解: A、 $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, 故正确;

B、如果 $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ($\vec{b}$ 为非零向量), 那么 $\vec{a} // \vec{b}$; 故正确;

C、设 $\vec{e}$ 为单位向量, 那么 $|\vec{e}| = 1$, 故正确;

D、如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 没法判断 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的关系; 故错误.

故选: D.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意熟记定义是解此题的关键.

二. 填空题

7. (3 分) 已知 $x: y = 5: 2$, 那么 $(x+y): y = \underline{7: 2}$.

【考点】S1: 比例的性质.

【分析】根据合比性质, 可得答案.

【解答】解：由合比性质，得 $(x+y):y=7:2$ ，

故答案为：7:2.

【点评】本题考查了比例的性质，利用了合比性质： $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

8. (3分) 计算： $2\vec{a}-3(\vec{a}-\frac{5}{3}\vec{b})=$ $-\vec{a}+5\vec{b}$.

【考点】LM：*平面向量.

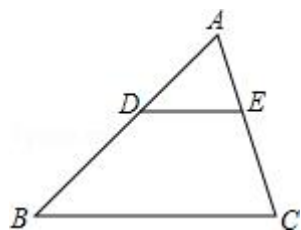
【分析】直接利用平面向量的加减运算法则求解即可求得，注意去括号时符号的变化.

【解答】解： $2\vec{a}-3(\vec{a}-\frac{5}{3}\vec{b})=2\vec{a}-3\vec{a}+5\vec{b}=-\vec{a}+5\vec{b}$.

故答案为： $-\vec{a}+5\vec{b}$.

【点评】此题考查了平面向量的运算. 此题难度不大，注意掌握运算法则是解此题的关键.

9. (3分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE\parallel BC$ ， DE 与边 AB 相交于点 D ，与边 AC 相交于点 E ，如果 $AD=3$ ， $BD=4$ ， $AE=2$ ，那么 $AC=$ $\frac{14}{3}$.



【考点】S4：平行线分线段成比例.

【分析】由平行可得到 $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$ ，代入可求得 EC ，再利用线段的和可求得 AC .

【解答】解： $\because DE\parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}, \text{ 即 } \frac{3}{4}=\frac{2}{EC},$$

$$\text{解得 } EC=\frac{8}{3},$$

$$\therefore AC=AE+EC=2+\frac{8}{3}=\frac{14}{3},$$

故答案为： $\frac{14}{3}$.

【点评】本题主要考查平行线分线段成比例，掌握平行线分线段所得线段对应成比例是解题的关键.

10. (3分) 已知线段 MN 的长为 2 厘米, 点 P 是线段 MN 的黄金分割点, 那么较长的线段 MP 的长是 $(\sqrt{5}-1)$ 厘米.

【考点】S3: 黄金分割.

【专题】11: 计算题.

【分析】直接根据黄金分割的定义求解.

【解答】解: $\because$ 点 P 是线段 MN 的黄金分割点,

$$\therefore \text{较长的线段 } MP \text{ 的长} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}MN = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2 = (\sqrt{5}-1) \text{ cm}.$$

故答案为 $(\sqrt{5}-1)$.

【点评】本题考查了黄金分割: 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC ($AC > BC$), 且使 AC 是 AB 和 BC 的比例中项 (即 $AB:AC=AC:BC$), 叫做把线段 AB 黄金分割, 点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点. 其中 $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB \approx 0.618AB$, 并且线段 AB 的黄金分割点有两个.

11. (3分) 二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象与 y 轴的交点坐标是 $(0, -3)$.

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【专题】11: 计算题.

【分析】计算自变量为 0 时的函数值即可得到抛物线与 y 轴的交点坐标.

【解答】解: 当 $x = 0$ 时, $y = x^2 - 2x - 3 = -3$,

所以二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, -3)$.

故答案为 $(0, -3)$.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

12. (3分) 如果将抛物线 $y = -2x^2$ 平移, 使顶点移到点 $P(-3, 1)$ 的位置, 那么所得新抛物线的表达式是 $y = -2(x+3)^2 + 1$.

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【专题】46: 几何变换.

【分析】由于抛物线平移前后二次项系数不变, 然后根据顶点式写出新抛物线解析式.

【解答】解: 抛物线 $y = -2x^2$ 平移, 使顶点移到点 $P(-3, 1)$ 的位置, 所得新

抛物线的表达式为 $y = -2(x+3)^2+1$.

故答案为 $y = -2(x+3)^2+1$.

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换：由于抛物线平移后的形状不变，故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式.

13. (3 分) 正八边形的中心角等于 45 度.

【考点】 MM: 正多边形和圆.

【分析】 根据中心角是正多边形相邻的两个半径的夹角来解答.

【解答】 解：正八边形的中心角等于 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$;

故答案为 45.

【点评】 本题考查了正多边形和圆的知识，解题的关键是牢记中心角的定义及求法.

14. (3 分) 用一根长 50 厘米的铁丝，把它弯成一个矩形框，设矩形框的一边长为 x 厘米，面积为 y 平方厘米，写出 y 关于 x 的函数解析式： $y = -x^2+25x$.

【考点】 HD: 根据实际问题列二次函数关系式.

【分析】 易得矩形另一边长为周长的一半减去已知边长，那么矩形的面积等于相邻两边长的积.

【解答】 解：由题意得：矩形的另一边长 $= 50 \div 2 - x = 25 - x$,

则 $y = x(25 - x) = -x^2+25x$.

故答案为 $y = -x^2+25x$.

【点评】 本题考查列二次函数关系式；掌握矩形的边长与所给周长与另一边长的关系是解决本题的突破点.

15. (3 分) 离旗杆 20 米处的地方用测角仪测得旗杆顶的仰角为 α ，如果测角仪高为 1.5 米，那么旗杆的高为 $(1.5+20\tan\alpha)$ 米 (用含 α 的三角函数表示).

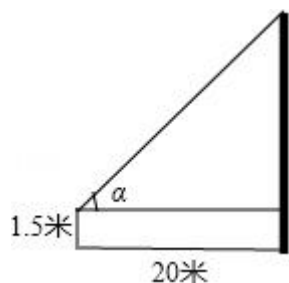
【考点】 TA: 解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 由题意得，在直角三角形中，知道了已知角的邻边求对边，用正切值计

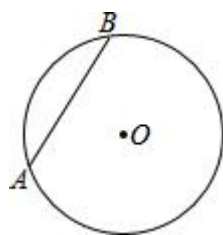
算即可.

【解答】解：根据题意可得：旗杆比仪器高 $20\tan\alpha$ ，测角仪高为 1.5 米，故旗杆的高为 $(1.5+20\tan\alpha)$ 米.



【点评】本题考查仰角的定义，要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形.

16. (3 分) 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 5， $\odot O$ 的一条弦 AB 长为 8，那么以 3 为半径的同心圆与弦 AB 位置关系是相切.



【考点】KQ：勾股定理；M2：垂径定理；MJ：圆与圆的位置关系.

【分析】过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ，连接 OA ，根据垂径定理求出 AC ，根据勾股定理求出 OC ，再根据直线与圆的位置关系进行判断即可.

【解答】解：过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ，连接 OA ，

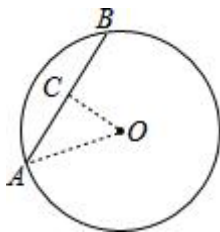
则 $\angle OCA = 90^\circ$ ， $AC = BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OCA$ 中， $OA = 5$ ， $AC = 4$ ，由勾股定理得： $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ，

$\therefore 3 = 3$ ，

$\therefore$ 以 3 为半径的同心圆与弦 AB 位置关系是相切.

故答案为：相切.



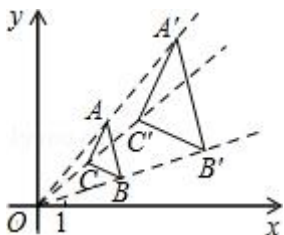
【点评】 本题考查了勾股定理，垂径定理，直线与圆的位置关系的应用，解此题的关键是求出 OC 的长，注意：直线与圆的位置关系有：相离，相切，相交.

17. (3 分) 我们定义：如果一个图形上的点 A' 、 B' 、 $\cdots$ 、 P' 和另一个图形上的点 A 、 B 、 $\cdots$ 、 P 分别对应，并且满足：

(1) 直线 AA' 、 BB' 、 $\cdots$ 、 PP' 都经过同一点 O ；

(2) $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \cdots = \frac{OP'}{OP} = k$ ，那么这两个图形叫做位似图形，点 O 叫做位似中心， k 叫做位似比.

如图，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是以坐标原点 O 为位似中心的位似图形，且 $OB = BB'$ ，如果点 $A(\frac{5}{2}, 3)$ ，那么点 A' 的坐标为 (5, 6).



【考点】 D5：坐标与图形性质；SC：位似变换.

【专题】 11：计算题.

【分析】 根据位似的性质得 $BC \parallel B'C'$ ，根据平行线分线段成比例定理得到

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{1}{2}, \text{ 则 } \triangle A'B'C' \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 的位似比为 } 2, \text{ 然后根据如果}$$

位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k ，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$ 进行求解.

【解答】 解： $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是以坐标原点 O 为位似中心的位似图形，
 $\therefore BC \parallel B'C'$ ，

$$\therefore \frac{BC}{B'C'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 2，

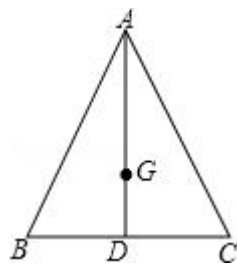
而点 $A(\frac{5}{2}, 3)$,

$\therefore$ 点 A' 的坐标为 $(\frac{5}{2} \times 2, 3 \times 2)$, 即 $A'(5, 6)$.

故答案为 $(5, 6)$.

【点评】 本题考查了位似变换: 如果两个图形不仅是相似图形, 而且对应顶点的连线相交于一点, 对应边互相平行, 那么这样的两个图形叫做位似图形, 这个点叫做位似中心. 在平面直角坐标系中, 如果位似变换是以原点为位似中心, 相似比为 k , 那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$.

18. (3分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\tan B = 2$, $AD \perp BC$ 于点 D , G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 将 $\triangle ABC$ 绕着重心 G 旋转, 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 并且点 B_1 在直线 AD 上, 联结 CC_1 , 那么 $\tan \angle CC_1B_1$ 的值等于 $\frac{\sqrt{13}-2}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{13}+2}{3}$.



【考点】 K5: 三角形的重心; R2: 旋转的性质.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 分类讨论: 当 $\triangle ABC$ 绕着重心 G 逆时针旋转得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 如图 1, 设 $GD = x$, 根据等腰三角形的性质得 $BD = CD$, 再根据重心的性质得 $AG = 2GD = 2x$, 则 $AD = AG + DG = 3x$, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 利用正切定义得到 $BD = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}x$, 则 $CD = \frac{3}{2}x$, 接着根据勾股定理计算出 $CG = \frac{\sqrt{13}}{2}x$, 然后利用旋转的性质得到 $\angle BGD = \angle DGD_1$, $GD = GD_1 = x$, $C_1D_1 = CD = \frac{3}{2}x$, 由于 $GD \perp BC$, 所以 $GD_1 \perp B_1C_1$, 点 D_1 在 CG 上, 于是可得 $CD_1 = CG - GD_1 = \frac{\sqrt{13}-2}{2}x$, 则在 $\text{Rt}\triangle CC_1D_1$ 中, 利用正切的定义得到 $\tan \angle CC_1D_1 = \frac{CD_1}{C_1D_1} = \frac{\sqrt{13}-2}{3}$; 当 $\triangle ABC$ 绕着重心 G 顺时针旋转得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 如图 2, 设 $DG = x$, 与前面一样, 可求得 $GD_1 = GD = x$, $C_1D_1 = CD = \frac{3}{2}x$, 则 $CD_1 = \frac{\sqrt{13}+2}{2}x$,

在 $\text{Rt}\triangle CC_1D_1$ 中, 利用正切定理得到 $\tan \angle CC_1D_1 = \frac{CD_1}{C_1D_1} = \frac{\sqrt{13}+2}{3}$.

【解答】解: 当 $\triangle ABC$ 绕着重心 G 逆时针旋转得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 如图 1, 设 $GD =$

x ,

$\because AB = AC$, $AD \perp BC$ 于点 D ,

$\therefore BD = CD$,

$\therefore$ 重心 G 在 AD 上,

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore AG = 2GD = 2x$,

$\therefore AD = AG + DG = 3x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\because \tan B = \frac{AD}{BD} = 2$,

$\therefore BD = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}x$,

$\therefore CD = \frac{3}{2}x$,

在 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中, $CG = \sqrt{DG^2 + CD^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}x$,

$\because \triangle ABC$ 绕着重心 G 旋转, 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 并且点 B_1 在直线 AD 上,

$\therefore \angle BGD = \angle DGD_1$, $GD = GD_1 = x$, $C_1D_1 = CD = \frac{3}{2}x$,

而 $GD \perp BC$,

$\therefore GD_1 \perp B_1C_1$, 点 D_1 在 CG 上,

$\therefore CD_1 = CG - GD_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}x - x = \frac{\sqrt{13}-2}{2}x$,

在 $\text{Rt}\triangle CC_1D_1$ 中, $\tan \angle CC_1D_1 = \frac{CD_1}{C_1D_1} = \frac{\frac{\sqrt{13}-2}{2}x}{\frac{3}{2}x} = \frac{\sqrt{13}-2}{3}$;

当 $\triangle ABC$ 绕着重心 G 顺时针旋转得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 如图 2, 设 $DG = x$,

与前面一样, 可求得 $GD_1 = GD = x$, $C_1D_1 = CD = \frac{3}{2}x$, 则 $CD_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}x + x = \frac{\sqrt{13}+2}{2}x$,

在 $\text{Rt}\triangle CC_1D_1$ 中, $\tan \angle CC_1D_1 = \frac{CD_1}{C_1D_1} = \frac{\frac{\sqrt{13}+2}{2}x}{\frac{3}{2}x} = \frac{\sqrt{13}+2}{3}$,

综上所述, $\tan \angle CC_1B_1$ 的值等于 $\frac{\sqrt{13}-2}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{13}+2}{3}$.

故答案为 $\frac{\sqrt{13}-2}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{13}+2}{3}$.

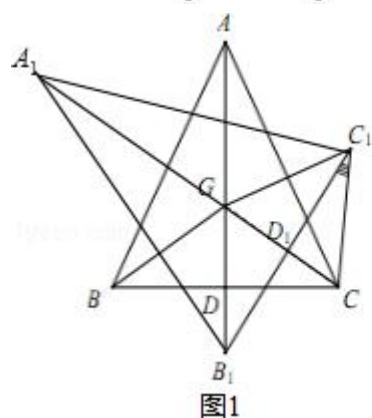


图1

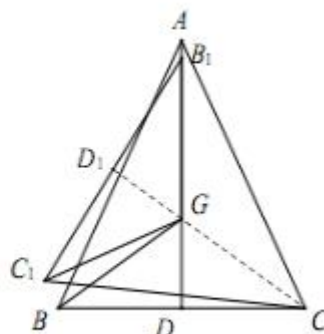


图2

【点评】 本题考查了三角形重心：三角形的重心是三角形三边中线的交点，重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2：1．也考查了等腰三角形的性质、旋转的性质解直角三角形．

三.解答题

19. 计算： $4\sin 30^\circ - \sqrt{2}\cos 45^\circ + \sqrt{6}\tan 60^\circ$.

【考点】 T5：特殊角的三角函数值．

【分析】 根据特殊角三角函数值，可得答案．

【解答】 解：原式 $= 4 \times \frac{1}{2} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{6} \times \sqrt{3}$

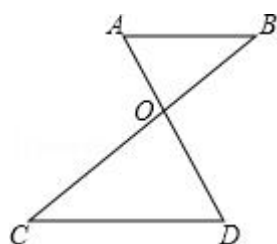
$= 1 + 3\sqrt{2}$.

【点评】 本题考查了特殊角三角函数值，解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值．

20. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ， AD 与 BC 相交于点 O ，且 $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$.

(1) 求 $\frac{AO}{AD}$ 的值．

(2) 如果 $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ ，请用 $\vec{a}$ 表示 $\overrightarrow{DA}$.



【考点】LM: *平面向量.

【分析】(1) 由 $AB \parallel CD$, 可得 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 求得 $\frac{AO}{AD}$ 的值.

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } \overrightarrow{DA} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AO} = -\frac{5}{2}\vec{a}.$$

【解答】解: (1) $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle DOC,$$

$$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{3},$$

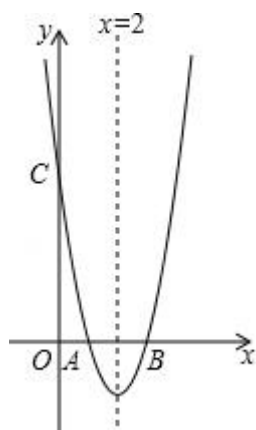
$$\therefore \frac{AO}{AD} = \frac{2}{5};$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } AD = \frac{5}{2}AO,$$

$$\therefore \overrightarrow{DA} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AO} = -\frac{5}{2}\vec{a}.$$

【点评】此题考查了平面向量的知识以及相似三角形的判定与性质. 此题难度不大, 注意掌握数形结合思想的应用.

21. 如图, 已知二次函数的图象与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0, 6)$, 对称轴为直线 $x = 2$, 求二次函数解析式并写出图象最低点坐标.



【考点】H7: 二次函数的最值; H8: 待定系数法求二次函数解析式.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据二次函数的对称轴为直线 $x = 2$, 设出二次函数解析式, 把 A 与 C 坐标代入求出 a 与 k 的值, 确定出二次函数解析式, 找出函数图象最低点坐标即可.

【解答】解：设二次函数解析式为 $y = a(x - 2)^2 + k$,

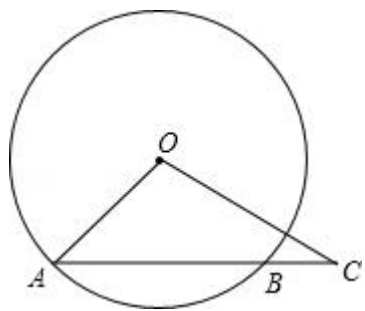
把 $A(1, 0)$, $C(0, 6)$ 代入得: $\begin{cases} a+k=0 \\ 4a+k=6 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} a=2 \\ k=-2 \end{cases}$,

则二次函数解析式为 $y = 2(x - 2)^2 - 2 = 2x^2 - 8x + 6$, 二次函数图象的最低点,
即顶点坐标为 $(2, -2)$.

【点评】此题考查了待定系数法求二次函数解析式, 以及二次函数的最值, 熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

22. 如图, 某新建公园有一个圆形人工湖, 湖中心 O 处有一座喷泉, 小明为测量湖的半径, 在湖边选择 A 、 B 两个点, 在 A 处测得 $\angle OAB = 45^\circ$, 在 AB 延长线上的 C 处测得 $\angle OCA = 30^\circ$, 已知 $BC = 50$ 米, 求人工湖的半径. (结果保留根号)



【考点】M3: 垂径定理的应用.

【分析】过点 O 作 $OD \perp AC$ 于点 D , 由垂径定理可知 $AD = BD$, 根据 $\angle OAB = 45^\circ$ 可知 $AD = OD$, 设 $AD = x$, 则 $OD = x$, $OA = \sqrt{2}x$, $CD = x + BC = (x + 50)$ 米, 再根据 $\angle OCA = 30^\circ$ 即可得出 x 的值, 进而得出结论.

【解答】解: 过点 O 作 $OD \perp AC$ 于点 D , 则 $AD = BD$,

$$\because \angle OAB = 45^\circ,$$

$$\therefore AD = OD,$$

$$\therefore \text{设 } AD = x, \text{ 则 } OD = x, OA = \sqrt{2}x, CD = x + BC = x + 50).$$

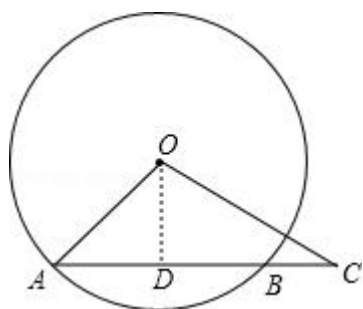
$$\because \angle OCA = 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{OD}{CD} = \tan 30^\circ, \text{ 即 } \frac{x}{x+50} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{解得 } x = 25\sqrt{3} + 25,$$

$$\therefore OA = \sqrt{2}x = \sqrt{2} \times (25\sqrt{3} + 25) = (25\sqrt{6} + 25\sqrt{2}) \text{ (米)}.$$

答：人工湖的半径为 $(25\sqrt{6}+25\sqrt{2})$ 米.

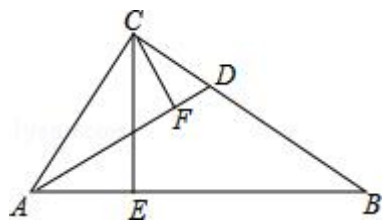


【点评】 本题考查的是垂径定理的应用，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键.

23. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 在边 BC 上， $CE \perp AB$ ， $CF \perp AD$ ， E 、 F 分别是垂足.

(1) 求证： $AC^2 = AF \cdot AD$;

(2) 联结 EF ，求证： $AE \cdot DB = AD \cdot EF$.



【考点】 S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 证明 $\triangle ACD \sim \triangle AFC$ ，得到 $\frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AC}$ ，即可解决问题.

(2) 证明 A 、 E 、 F 、 C 四点共圆，得到 $\angle AFE = \angle ACE$ ，这是解决该问题的关键性结论；证明 $\angle AFE = \angle B$ ，结合 $\angle FAE = \angle BAD$ ，得到 $\triangle AEF \sim \triangle ADB$ ，列出比例式即可解决问题.

【解答】 解：(1) 如图， $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $CF \perp AD$ ，

$\therefore \angle ACD = \angle AFC$ ，而 $\angle CAD = \angle FAC$ ，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle AFC$ ，

$$\therefore \frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AF \cdot AD.$$

(2) 如图， $\because CE \perp AB$ ， $CF \perp AD$ ，

$\therefore \angle AEC = \angle AFC = 90^\circ$ ，

$\therefore A$ 、 E 、 F 、 C 四点共圆，

$\therefore \angle AFE = \angle ACE$; 而 $\angle ACE + \angle CAE = \angle CAE + \angle B$,

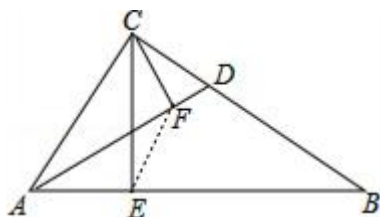
$\therefore \angle ACE = \angle B$, $\angle AFE = \angle B$;

$\therefore \angle FAE = \angle BAD$,

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ADB$,

$\therefore AE : AD = BD : EF$,

$\therefore AE \cdot DB = AD \cdot EF$.



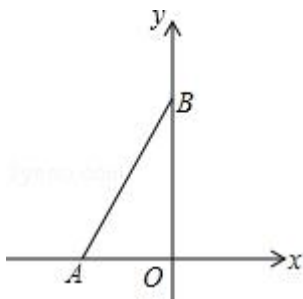
【点评】该题主要考查了相似三角形的判定及其性质的应用问题；解题的关键是灵活运用相似三角形的判定及其性质来分析、判断、推理或解答．

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-m, 0)$ 和点 $B(0, 2m)$ ($m > 0$)，点 C 在 x 轴上（不与点 A 重合）

(1) 当 $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOB$ 相似时，请直接写出点 C 的坐标（用 m 表示）

(2) 当 $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOB$ 全等时，二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象经过 A 、 B 、 C 三点，求 m 的值，并求点 C 的坐标

(3) P 是 (2) 的二次函数图象上的一点， $\angle APC = 90^\circ$ ，求点 P 的坐标及 $\angle ACP$ 的度数．



【考点】HF：二次函数综合题．

【分析】(1) 分类讨论： $\triangle BOC \sim \triangle BOA$ ， $\triangle BOC \sim \triangle AOB$ ，根据相似三角形的性质，可得答案；

(2) 根据全等三角形的性质，可得 C 点坐标，根据待定系数法，可得函数解析式；

(3) 根据相似三角形的性质，可得关于 a 的方程，根据解方程，可得 a 的值可

得 p 点坐标, 分类讨论: 当点 P 的坐标为 $(\sqrt{3}, 1)$ 时, 根据正弦函数数据, 可得 $\angle COP$ 的度数, 根据等腰三角形得到性质, 可得答案; 当点 P 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 1)$ 时, 根据正弦函数数据, 可得 $\angle AOP$ 的度数, 根据三角形外角的性质, 可得答案.

【解答】解: (1) 点 C 的坐标为 $(m, 0)$ 或 $(4m, 0)$. 或 $(-4m, 0)$;

(2) 当 $\triangle BOC$ 与 $\triangle AOB$ 全等时, 点 C 的坐标为 $(m, 0)$,

二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象经过 A 、 B 、 C 三点,

$$\begin{cases} c=2m \\ -m^2 - mb + c = 0, \\ -m^2 + mb + c = 0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b=0 \\ c=4. \\ m=2 \end{cases}$$

二次函数解析式为 $y = -x^2 + 4$, 点 C 的坐标为 $(2, 0)$;

(3) 作 $PH \perp AC$ 于 H , 设点 P 的坐标为 $(a, -a^2 + 4)$,

$\because \angle AHP = \angle PHC = 90^\circ$, $\angle APH = \angle PCH = 90^\circ - \angle CPH$,

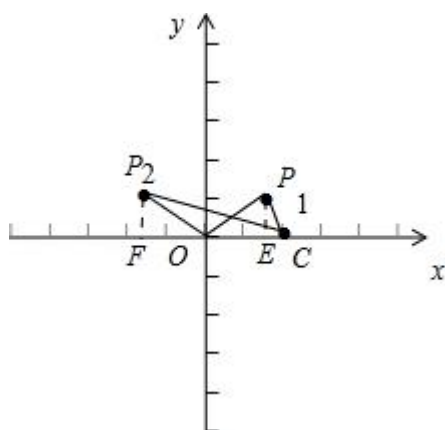
$\therefore \triangle APH \sim \triangle PCH$, $\therefore \frac{AH}{PH} = \frac{PH}{CH}$,

即 $PH^2 = AH \cdot CH$,

$$(-a^2 + 4)^2 = (a + 2)(2 - a).$$

解得 $a = \sqrt{3}$, 或 $a = -\sqrt{3}$, 即 $P(\sqrt{3}, 1)$ 或 $(-\sqrt{3}, 1)$,

如图:



当点 P_1 的坐标为 $(\sqrt{3}, 1)$ 时, $OP_1 = 2 = OC$, $\sin \angle P_1OE = \frac{P_1E}{P_1O} = \frac{1}{2} \therefore \angle COP =$

$$30^\circ, \therefore \angle ACP = \frac{180^\circ - \angle POC}{2} = 75^\circ$$

当点 P 的坐标为 $(-\sqrt{3}, 1)$ 时, $\sin \angle P_2OF = \frac{P_2F}{P_2O} = \frac{1}{2}$, $\angle P_2OF = 30^\circ$.

由三角形外角的性质, 得 $\angle P_2OF = 2\angle ACP$, 即 $\angle ACP = 15^\circ$.

【点评】 本题考查了二次函数综合题, (1) 利用了相似三角形的性质, 分类讨论是解题关键; (2) 利用全等三角形的性质, 解三元一次方程组; (3) 利用了相似三角形的性质, 分类讨论是解题关键, 正弦函数及等腰三角形的性质, 三角形外角的性质.

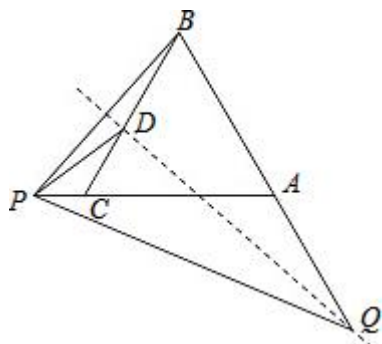
25. 如图, 等边 $\triangle ABC$, $AB = 4$, 点 P 是射线 AC 上的一动点, 联结 BP , 作 BP 的垂直平分线交线段 BC 于点 D , 交射线 BA 于点 Q , 分别联结 PD , PQ .

(1) 当点 P 在线段 AC 的延长线上时,

①求 $\angle DPQ$ 的度数, 并求证: $\triangle DCP \sim \triangle PAQ$;

②设 $CP = x$, $AQ = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出它的定义域;

(2) 如果 $\triangle PCD$ 是等腰三角形, 求 $\triangle APQ$ 的面积.



【考点】 K8: 三角形的外角性质; KD: 全等三角形的判定与性质; KG: 线段垂直平分线的性质; KH: 等腰三角形的性质; SO: 相似形综合题.

【专题】 15: 综合题.

【分析】 (1) ①根据线段垂直平分线的性质可得 $BD = PD$, $BQ = PQ$, 即可证到 $\triangle BDQ \cong \triangle PDQ$, 从而有 $\angle DPQ = \angle DBQ = 60^\circ$; 易证 $\angle APQ = \angle CDP$, $\angle DCP = \angle QAP$, 就可证到 $\triangle DCP \sim \triangle PAQ$;

②利用 $\triangle DCP \sim \triangle PAQ$ 可求出 CD 、 BD (用 x 、 y 的代数式表示), 然后根据 $CD + BD = BC = 4$ 就可得到 y 关于 x 的函数解析式, 然后根据 x 、 y 均为正数可求出 x 的范围;

(2) ①当点 P 在 AC 的延长线上时, $\angle DCP = 120^\circ$, 由 $\triangle PCD$ 是等腰三角形,

可得 $CP = CD$ ，由此可得到 $y = x + 4$ ，把它代入函数关系式，就可求出 x 的值，从而可求出 CP 、 AP 、 AQ 的值，就可求出 $\triangle APQ$ 的面积；②当点 P 在线段 AC 上时， $\angle C = 60^\circ$ ，由 $\triangle PCD$ 是等腰三角形可得 $\triangle PCD$ 是等边三角形，从而有 $\angle BDP = 120^\circ$ ，进而可求出 $\angle DPB = 30^\circ$ ， $\angle BPC = 90^\circ$ ，根据等腰三角形的性质可得 $AP = CP = 2$ 。由 $\triangle DCP \sim \triangle PAQ$ ， $\triangle PCD$ 是等边三角形可得 $\triangle APQ$ 也是等边三角形，就可求出 $\triangle APQ$ 的面积。

【解答】解：（1）①如图 1，

$\because DQ$ 是线段 BP 的中垂线，

$\therefore BD = PD$ ， $BQ = PQ$ 。

在 $\triangle BDQ$ 和 $\triangle PDQ$ 中，

$$\begin{cases} BD=PD \\ BQ=PQ, \\ DQ=DQ \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDQ \cong \triangle PDQ$ (SSS)，

$\therefore \angle DPQ = \angle DBQ = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CPD + \angle APQ = 60^\circ$ 。

又 $\because \angle ACB = \angle CDP + \angle CPD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle APQ = \angle CDP$ 。

又 $\because \angle DCP = \angle QAP = 120^\circ$ ，

$\therefore \triangle DCP \sim \triangle PAQ$ ；

② $\because \triangle DCP \sim \triangle PAQ$ ，

$$\therefore \frac{CD}{AP} = \frac{CP}{AQ} = \frac{DP}{PQ},$$

$$\therefore \frac{CD}{x+4} = \frac{x}{y} = \frac{BD}{4+y},$$

$$\therefore CD = \frac{x^2+4x}{y}, \quad BD = \frac{4x+xy}{y},$$

$\because BC = BD + CD = 4$ ，

$$\therefore \frac{4x+xy}{y} + \frac{x^2+4x}{y} = 4,$$

$$\text{整理得: } y = \frac{x^2 + 8x}{4-x}.$$

$$\because x > 0, y > 0, \therefore 0 < x < 4.$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = \frac{x^2 + 8x}{4-x}, \text{ 它的定义域为 } 0 < x < 4;$$

(2) ①当点 P 在线段 AC 的延长线上时, $\angle DCP = 120^\circ$.

$\therefore$ 当 $\triangle PCD$ 是等腰三角形时, $CD = CP$,

$$\therefore \frac{x^2 + 4x}{y} = x,$$

$$\therefore y = x + 4,$$

$$\therefore \frac{x^2 + 8x}{4-x} = x + 4,$$

$$\text{解得: } x_1 = -2 - 2\sqrt{3} \text{ (舍去)}, x_2 = -2 + 2\sqrt{3},$$

$$\therefore CP = -2 + 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AQ = AP = AC + CP = 4 - 2 + 2\sqrt{3} = 2 + 2\sqrt{3}.$$

过点 Q 作 $QH \perp AP$, 交 PA 的延长线于点 H , 如图 2,

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} AP \cdot QH = \frac{1}{2} AP \cdot AQ \cdot \sin \angle HAQ$$

$$= \frac{1}{2} \times (2 + 2\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} + 6;$$

②当点 P 在线段 AC 上时, $\angle C = 60^\circ$,

$\therefore$ 当 $\triangle PCD$ 是等腰三角形时, $\triangle PCD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BDP = 120^\circ.$$

又 $\because BD = DP$,

$$\therefore \angle DBP = \angle DPB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = 90^\circ, \text{ 即 } BP \perp AC.$$

$$\because BC = BA,$$

$$\therefore AP = CP = 2.$$

$\because \triangle DCP \sim \triangle PAQ$, $\triangle PCD$ 是等边三角形,

$\therefore \triangle APQ$ 是等边三角形,

$$\therefore AP = AQ.$$

过点 Q 作 $QH \perp AP$ 于 H , 如图 3,

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2}AP \cdot QH = \frac{1}{2}AP \cdot AQ \cdot \sin \angle HAQ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

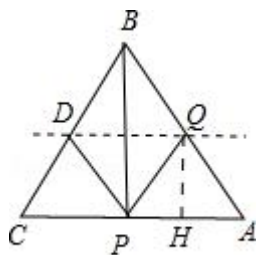


图3

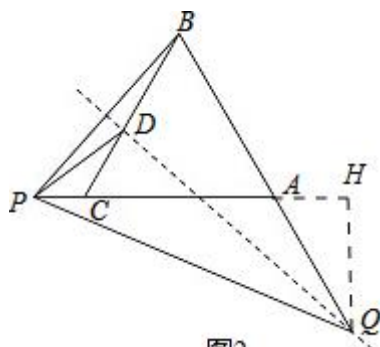


图2

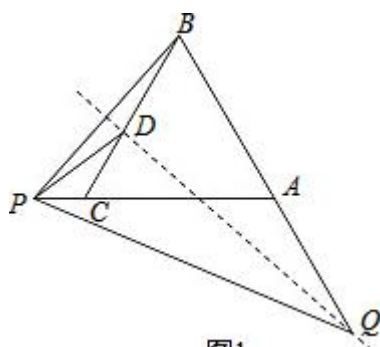


图1

【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质、线段垂直平分线的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、等边三角形的性质等知识，运用（1）中结论求出 CD 、 BD （用 x 、 y 的代数式表示），并利用 $CD+BD=BC=4$ 建立等式是解决第（2）小题的关键，运用分类讨论的思想是解决第（3）小题的关键。