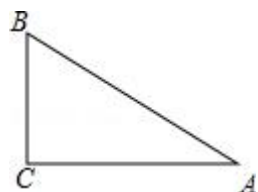


2015 年上海市宝山区中考数学一模试卷

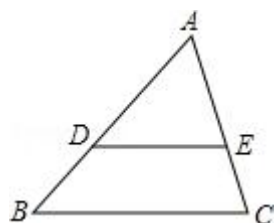
一、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1. (4 分) 如图，在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 1$ ， $AC = \sqrt{2}$ ，下列判断正确的是（ ）



- A. $\angle A = 90^\circ$ B. $\angle A = 45^\circ$ C. $\cot A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\tan A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. (4 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别为边 AB 、 AC 上的点，且 $DE \parallel BC$ ，下列判断错误的是（ ）



- A. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ B. $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$ C. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

3. (4 分) 如果在两个圆中有两条相等的弦，那么（ ）

- A. 这两条弦所对的圆心角相等
B. 这两条弦所对的弧相等
C. 这两条弦都被与它垂直的半径平分
D. 这两条弦所对的弦心距相等

4. (4 分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，下列命题中是假命题的是（ ）

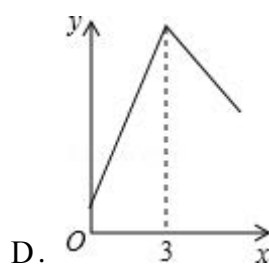
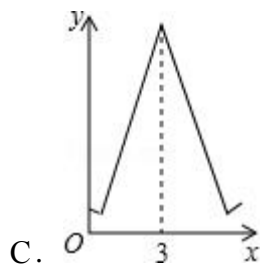
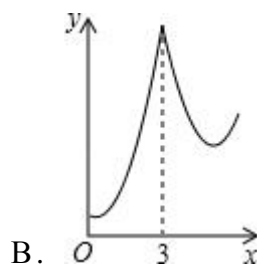
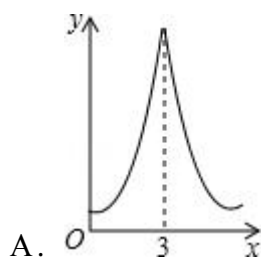
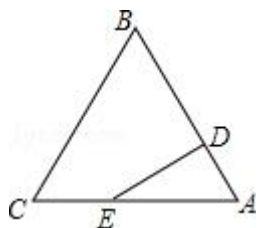
- A. 如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ B. 如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
C. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ D. 如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ， $\vec{b} = 2\vec{c}$ ，那么 $\vec{a} \parallel \vec{c}$

5. (4 分) 已知 $\odot O$ 半径为 3， M 为直线 AB 上一点，若 $MO = 3$ ，则直线 AB 与 $\odot O$ 的位置关系为（ ）

- A. 相切 B. 相交 C. 相切或相离 D. 相切或相交

6. (4 分) 如图，边长为 3 的等边 $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 的三等分点 ($AD = \frac{1}{2}BD$)，

三角形边上的动点 E 从点 A 出发,沿 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 的方向运动,到达点 B 时停止,设点 E 运动的路程为 x , $DE^2 = y$, 则 y 关于 x 的函数图象大致为 ()



二、填空题 (每题 4 分, 共 48 分)

7. (4 分) 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项, 且 $a = 1$ 、 $b = 2$, 那么 $c =$ _____.

8. (4 分) 两个相似三角形的相似比为 $2:3$, 则它们的面积之比为_____.

9. (4 分) 已知两圆半径分别为 3 和 7 , 圆心距为 d , 若两圆相离, 则 d 的取值范围是_____.

10. (4 分) 已知 $\triangle ABC$ 的三边之比为 $2:3:4$, 若 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 且 $\triangle DEF$ 的最大边长为 20 , 则 $\triangle DEF$ 的周长为_____.

11. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cot A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么 $\angle C =$ _____.

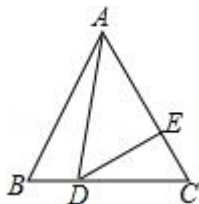
12. (4 分) B 在 A 北偏东 30° 方向 (距 A) 2 千米处, C 在 B 的正东方向 (距 B) 2 千米处, 则 C 和 A 之间的距离为_____千米.

13. (4 分) 抛物线 $y = -(x-3)^2 + 4$ 的对称轴是_____.

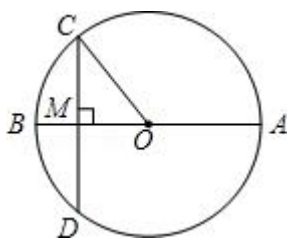
14. (4 分) 不经过第二象限的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的开口方向向_____.

15. (4 分) 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 为函数 $y = -2(x-1)^2 + 3$ 的图象上的两点, 若 $x_1 > x_2 > 1$, 则 y_1 _____ y_2 .

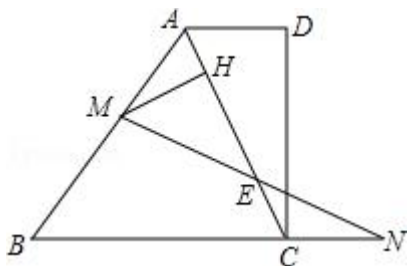
16. (4分) 如图, D 为等边 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点, $\angle ADE = 60^\circ$, 交 AC 于 E , 若 $BD = 2$, $CD = 3$, 则 $CE =$ _____.



17. (4分) 如图, $\odot O$ 的直径 AB 垂直弦 CD 于 M , 且 M 是半径 OB 的中点, $CD = 2\sqrt{6}$, 则直径 AB 的长为 _____.



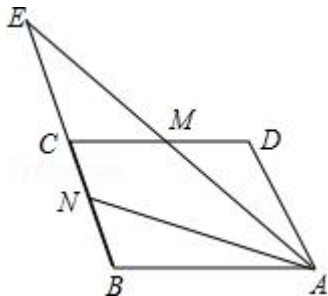
18. (4分) 如图, 直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $CD = 2$, $AB = BC$, $AD = 1$, 动点 M 、 N 分别在 AB 边和 BC 的延长线运动, 而且 $AM = CN$, 联结 AC 交 MN 于 E , $MH \perp AC$ 于 H , 则 $EH =$ _____.



三、解答题 (78分)

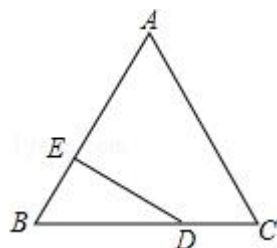
19. (8分) 计算: $\frac{\sin 60^\circ}{\cos^2 60^\circ} + \cot 30^\circ - \frac{2}{2\cos 45^\circ + \tan 60^\circ}$.

20. (8分) 如图, 已知 M 、 N 分别是平行四边形 $ABCD$ 边 DC 、 BC 的中点, 射线 AM 和射线 BC 相交于 E , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AE}$; (直接写出结果)

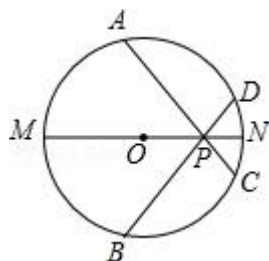


21. (8分) 已知一个二次函数的图象经过点 $A(1, 0)$ 和点 $B(0, 6)$, $C(4, 6)$, 求这个抛物线的表达式以及该抛物线的顶点坐标.

22. (8分) 如图, D 为等边 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点, $DE \perp AB$ 于 E , 若 $BD:CD = 2:1$, $DE = 2\sqrt{3}$, 求 AE .



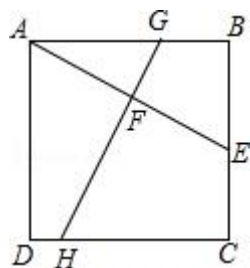
23. (10分) 如图, P 为 $\odot O$ 的直径 MN 上一点, 过 P 作弦 AC 、 BD 使 $\angle APM = \angle BPM$, 求证: $PA = PB$.



24. (10分) 如图, 正方形 $ABCD$ 中,

(1) E 为边 BC 的中点, AE 的垂直平分线分别交 AB 、 AE 、 CD 于 G 、 F 、 H , 求 $\frac{GF}{FH}$;

(2) E 的位置改动为边 BC 上一点, 且 $\frac{BE}{EC} = k$, 其他条件不变, 求 $\frac{GF}{FH}$ 的值.



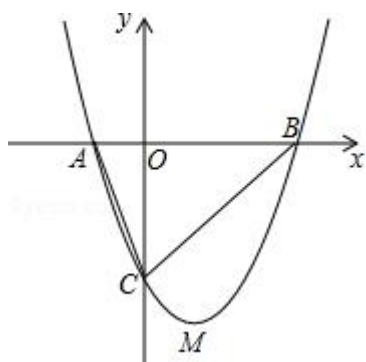
25. (12分) (1) 数学小组的单思稿同学认为形如的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 系数 a 、 b 、 c 一旦确定, 抛物线的形状、大小、位置就不会变化, 所以称数 a 、 b 、 c 为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的特征数, 记作 $\{a, b, c\}$; 请求出与 y 轴交于点 $C(0, -3)$ 的抛物线 $y = x^2 - 2x + k$ 在单同学眼中的特征数;

(2) 同数学小组的尤格星同学喜欢将抛物线设成 $y = a(x+m)^2 + k$ 的顶点式, 因

此坚持称 a 、 m 、 k 为抛物线的特征数，记作 $\{a, m, k\}$ ；请求出上述抛物线在尤同学眼中的特征数；

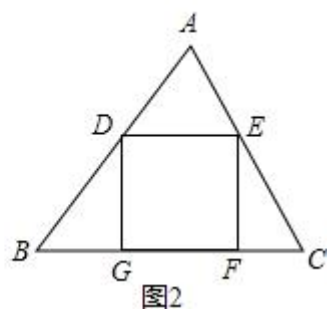
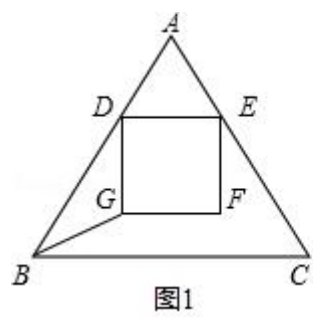
- (3) 同一个问题在上述两位同学眼中的特征数各不相同，为了让两人的研究保持一致，同组的董和谐将上述抛物线表述成：特征数为 $\{u, v, w\}$ 的抛物线沿平行于某轴方向平移某单位后的图象，即此时的特征数 $\{u, v, w\}$ 无论按单思稿同学还是按尤恪星同学的理解做出的结果是一样的，请你根据数学推理将董和谐的表述完整地写出来；

- (4) 在直角坐标系 xOy 中，上述 (1) 中的抛物线与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 的左边)，请直接写出 $\triangle ABC$ 的重心坐标。



26. (14分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC = 10$ ， $AC = 4\sqrt{5}$ ， D 为边 AB 上一动点 (D 和 A 、 B 不重合)，过 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E ，并以 DE 为边向 BC 一侧作正方形 $DEFG$ ，设 $AD = x$ ，

- (1) 请用 x 的代数式表示正方形 $DEFG$ 的面积，并求出当边 FG 落在 BC 边上时的 x 的值；
- (2) 设正方形 $DEFG$ 与 $\triangle ABC$ 重合部分的面积为 y ，求 y 关于 x 的函数及其定义域；
- (3) 点 D 在运动过程中，是否存在 D 、 G 、 B 三点中的两点落在以第三点为圆心的圆上的情况？若存在，请直接写出此时 AD 的值，若不存在，则请说明理由。

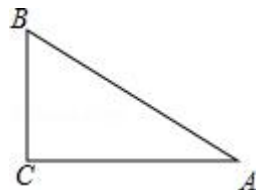


2015 年上海市宝山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每题 4 分，共 24 分）

1. (4 分) 如图，在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 1$ ， $AC = \sqrt{2}$ ，下列判断正确的是（ ）



- A. $\angle A = 90^\circ$ B. $\angle A = 45^\circ$ C. $\cot A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\tan A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

【考点】T5：特殊角的三角函数值.

【分析】根据三角函数的定义求出 $\tan A$ 的值，进而可得出结论.

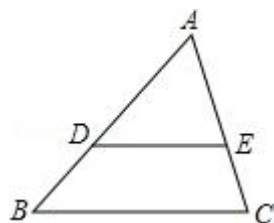
【解答】解： $\because$ 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 1$ ， $AC = \sqrt{2}$ ，

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：D.

【点评】本题考查的是特殊角的三角函数值，熟记各特殊角度的三角函数值是解答此题的关键.

2. (4 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别为边 AB 、 AC 上的点，且 $DE \parallel BC$ ，下列判断错误的是（ ）



- A. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ B. $\frac{AD}{DB} = \frac{DE}{BC}$ C. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

【考点】S4：平行线分线段成比例.

【分析】如图，证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，得到 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ ；证明 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \neq \frac{DE}{BC}$ ，即可解决问题.

【解答】解：如图， $\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

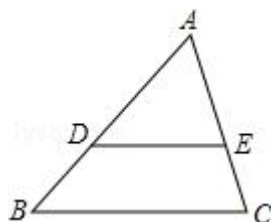
$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

$\therefore C、D$ 正确．

$\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \neq \frac{DE}{BC},$$

故选：B．



【点评】该题主要考查了平行线分线段成比例定理及其应用问题；观察图形、数形结合，正确写出比例式是解题的关键．

3. (4 分) 如果在两个圆中有两条相等的弦，那么 ()

- A. 这两条弦所对的圆心角相等
- B. 这两条弦所对的弧相等
- C. 这两条弦都被与它垂直的半径平分
- D. 这两条弦所对的弦心距相等

【考点】M2：垂径定理；M4：圆心角、弧、弦的关系．

【分析】在同圆和等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦也相等，但在不同圆中则应另当别论．

【解答】解：A、这两条弦所对的圆心角不一定相等，原说法错误，故本选项错误；

B、这两条弦所对的弧不一定相等，原说法错误，故本选项错误；

C、这两条弦都被垂直于弦的半径平分（垂径定理），原说法正确，故本选项正确；

D、这两条弦所对的弦心距不一定相等，原说法错误，故本选项错误；

故选：C．

【点评】本题考查了圆心角、弧、弦的关系，注意在同圆和等圆这个条件，不要

盲目解答.

4. (4分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$, 下列命题中是假命题的是 ()

A. 如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$, 那么 $\vec{a} // \vec{b}$

B. 如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$, 那么 $\vec{a} // \vec{b}$

C. 如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 那么 $\vec{a} // \vec{b}$

D. 如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$, $\vec{b} = 2\vec{c}$, 那么 $\vec{a} // \vec{c}$

【考点】LM: *平面向量.

【分析】根据平行向量的性质, 可得 A, B, D 均正确; 由向量模的意义, 可知 C 错误.

【解答】解: A 、如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$, 那么 $\vec{a} // \vec{b}$, 且方向相同; 故正确;

B 、如果 $\vec{a} = -2\vec{b}$, 那么 $\vec{a} // \vec{b}$, 且方向相反; 故正确;

C 、如果 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 不能判定 $\vec{a} // \vec{b}$; 故错误;

D 、如果 $\vec{a} = 2\vec{b}$, $\vec{b} = 2\vec{c}$, 那么 $\vec{a} // \vec{c}$; 正确.

故选: C .

【点评】本题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意理解平行向量与模的意义是解此题的关键.

5. (4分) 已知 $\odot O$ 半径为 3, M 为直线 AB 上一点, 若 $MO = 3$, 则直线 AB 与 $\odot O$ 的位置关系为 ()

A. 相切

B. 相交

C. 相切或相离

D. 相切或相交

【考点】MB: 直线与圆的位置关系.

【分析】直线和圆的位置关系与数量之间的联系:

若 $d < r$, 则直线与圆相交; 若 $d = r$, 则直线与圆相切; 若 $d > r$, 则直线与圆相离.

【解答】解: 因为垂线段最短, 所以圆心到直线的距离小于等于 3.

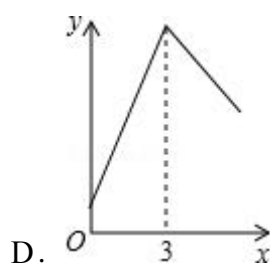
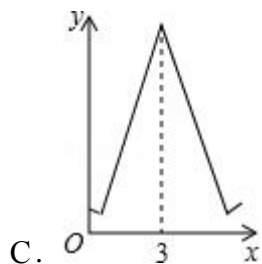
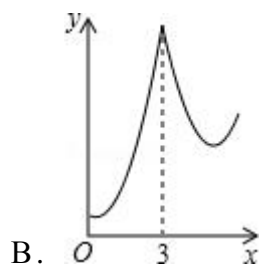
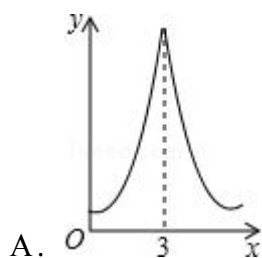
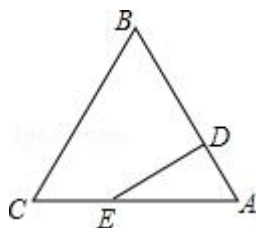
此时和半径 3 的大小不确定, 则直线和圆相交、相切都有可能.

故选: D .

【点评】本题考查了直线与圆的位置关系, 判断直线和圆的位置关系, 必须明确圆心到直线的距离. 特别注意: 这里的 3 不一定是圆心到直线的距离.

6. (4分) 如图, 边长为 3 的等边 $\triangle ABC$ 中, D 为 AB 的三等分点 ($AD = \frac{1}{2}BD$),

三角形边上的动点 E 从点 A 出发,沿 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 的方向运动,到达点 B 时停止,
 设点 E 运动的路程为 x , $DE^2 = y$, 则 y 关于 x 的函数图象大致为 ()



【考点】 E7: 动点问题的函数图象.

【分析】 根据题意求出在 $0 \leq x \leq 3$ 和 $3 \leq x \leq 6$ 时 y 与 x 的函数关系式, 选择适合的图象.

【解答】 解: 当 $0 \leq x \leq 3$ 时,

如图 1, 作 $DF \perp AC$ 于 F ,

$\because D$ 为 AB 的三等分点, $AB = 3$,

$\therefore AD = 1$, 又 $\angle A = 60^\circ$,

$$\therefore DF = \frac{\sqrt{3}}{2}, AF = \frac{1}{2},$$

$\because AE = x$,

$$\therefore EF = x - \frac{1}{2},$$

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = x^2 - x + 1$$

当 $3 \leq x \leq 6$ 时,

如图 2, 作 $DH \perp BC$ 于 H ,

$$\because \angle B = 60^\circ, BD = 2,$$

$$\therefore DH = \sqrt{3}, BH = 1,$$

$$y = x^2 - 10x + 28,$$

故选：B.

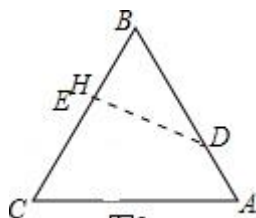


图2

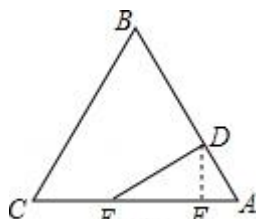


图1

【点评】 本题考查的是动点问题的函数图象，根据题意求出各个取值范围内的函数关系式是解题的关键，解答时，注意勾股定理的运用.

二、填空题（每题 4 分，共 48 分）

7. (4 分) 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项，且 $a = 1$ 、 $b = 2$ ，那么 $c = \underline{4}$.

【考点】 S2：比例线段.

【分析】 根据比例中项的定义可得 $b^2 = ac$ ，从而易求 b .

【解答】 解： $\because$ 线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项，

$$\therefore b^2 = ac,$$

$$\text{即 } 2^2 = 1 \times c,$$

$$\therefore c = 4.$$

故答案是 4.

【点评】 本题考查了比例线段，解题的关键是理解比例中项的定义.

8. (4 分) 两个相似三角形的相似比为 2:3，则它们的面积之比为 4:9.

【考点】 S7：相似三角形的性质.

【专题】 2B：探究型.

【分析】 直接根据相似三角形的性质进行解答即可.

【解答】 解： $\because$ 两个相似三角形的相似比为 2:3，

∴ 它们的面积之比为 4: 9.

故答案为: 4: 9

【点评】 本题考查的是相似三角形的性质, 即相似三角形面积的比等于相似比的平方.

9. (4 分) 已知两圆半径分别为 3 和 7, 圆心距为 d , 若两圆相离, 则 d 的取值范围是 $0 \leq d < 4$ 或 $d > 10$.

【考点】 MJ: 圆与圆的位置关系.

【分析】 若两圆相离, 则可能外离或内含, 据此考虑圆心距的取值范围.

【解答】 解: 若两圆相离, 则可能外离或内含,

外离时的数量关系应满足 $d > 10$;

内含时的数量关系应满足 $0 \leq d < 4$.

故答案为: $0 \leq d < 4$ 或 $d > 10$.

【点评】 考查了两圆的位置关系和数量关系之间的等价关系, 牢记两圆的半径与圆心距之间的关系是解答此题的关键.

10. (4 分) 已知 $\triangle ABC$ 的三边之比为 2: 3: 4, 若 $\triangle DEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 且 $\triangle DEF$ 的最大边长为 20, 则 $\triangle DEF$ 的周长为 45.

【考点】 S7: 相似三角形的性质.

【分析】 根据相似三角形的性质可求得 $\triangle DEF$ 的三边比, 再结合条件可分别求得 $\triangle DEF$ 的三边长, 可求得答案.

【解答】 解: $\because \triangle DEF \sim \triangle ABC$, $\triangle ABC$ 的三边之比为 2: 3: 4,

$\therefore \triangle DEF$ 的三边之比为 2: 3: 4,

又 $\because \triangle DEF$ 的最大边长为 20,

$\therefore \triangle DEF$ 的另外两边分别为 10、15,

$\therefore \triangle DEF$ 的周长为 $10+15+20=45$,

故答案为: 45.

【点评】 本题主要考查相似三角形的性质, 掌握相似三角形的对应边的比相等是解题的关键.

11. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cot A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 那么 $\angle C =$ 90° .

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】根据特殊角三角函数值，可得 $\angle A$ ， $\angle B$ ，根据三角形的内角和定理，可得答案.

【解答】解：由 $\triangle ABC$ 中， $\cot A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，得

$$\angle A = 60^\circ, \angle B = 30^\circ.$$

由角形的内角和定理，得 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ ，故答案为： 90° .

【点评】本题考查了特殊角三角函数值，熟记特殊角三角函数值是解题关键.

12. (4分) B 在 A 北偏东 30° 方向(距 A)2千米处， C 在 B 的正东方向(距 B)2千米处，则 C 和 A 之间的距离为 $2\sqrt{3}$ 千米.

【考点】TB：解直角三角形的应用-方向角问题.

【分析】过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ，根据等腰三角形的性质得出 $\angle BAD = \angle BCD = 30^\circ$ ， $AD = CD$ ，再由 $AD = AB \cdot \cos 30^\circ$ 即可得出 AD 的长，进而得出结论.

【解答】解：如图所示，过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ，

$\because B$ 在 A 北偏东 30° 方向，

$$\therefore \angle BAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

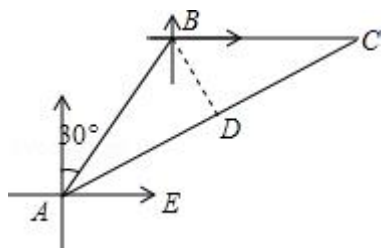
$$\because AB = BC = 2,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BCD = 30^\circ, AD = CD,$$

$$\therefore AD = AB \cdot \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AC = 2AD = 2\sqrt{3} \text{ (千米)}.$$

故答案为： $2\sqrt{3}$.



【点评】本题考查的是解直角三角形的应用-方向角问题，根据题意画出图形，利用数形结合求解是解答此题的关键.

13. (4分) 抛物线 $y = -(x-3)^2 + 4$ 的对称轴是直线 $x = 3$.

【考点】H3：二次函数的性质.

【分析】直接利用顶点式的特殊性可求对称轴.

【解答】解：∵抛物线 $y = -(x-3)^2+4$ 是顶点式，

∴顶点坐标为 $(3, 4)$ ，对称轴是 $x = 3$ ，

故答案为：直线 $x = 3$.

【点评】主要考查了求抛物线的对称轴的方法，牢记二次函数的顶点式的形式是解答本题的关键，难度不大.

14. (4分) 不经过第二象限的抛物线 $y = ax^2+bx+c$ 的开口方向向__下__.

【考点】H3：二次函数的性质.

【分析】根据二次函数的性质结合其图象的位置直接回答即可.

【解答】解：当二次函数 $y = ax^2+bx+c$ 的图象不经过第二象限时可能是其图象完全在 x 轴的下方或位于一、三、四象限，

故不经过第二象限的抛物线 $y = ax^2+bx+c$ 的开口方向向下，

故答案为：下.

【点评】本题考查了二次函数的性质，采用数形结合的方法是解决本题最好的方法.

15. (4分) 已知点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 为函数 $y = -2(x-1)^2+3$ 的图象上的两点，若 $x_1 > x_2 > 1$ ，则 y_1 __<__ y_2 .

【考点】H5：二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】先根据函数解析式确定出对称轴为直线 $x = 1$ ，再根据二次函数图象上的点， $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而减小解答.

【解答】解：∵ $y = -2(x-1)^2+3$ ，

∴抛物线的开口向下，二次函数图象的对称轴为直线 $x = 1$ ，

∵ $x_1 > x_2 > 1$ ，

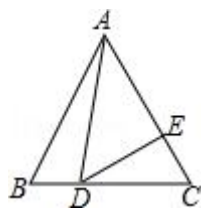
∴ $y_1 < y_2$.

故答案为：< .

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，主要利用了二次函数的增减性，求出对称轴解析式是解题的关键.

16. (4分) 如图， D 为等边 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点， $\angle ADE = 60^\circ$ ，交 AC 于 E ，

若 $BD = 2$, $CD = 3$, 则 $CE = \frac{6}{5}$.



【考点】 KK: 等边三角形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 如图, 证明 $AB = 5$, $\angle B = \angle C = 60^\circ$; 证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$, 得到 $\frac{AB}{CD} = \frac{BD}{CE}$,

求出 CE 即可解决问题.

【解答】 解: 如图, $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore AB = BC = 2 + 3 = 5$, $\angle B = \angle C = 60^\circ$;

$\because \angle ADE = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAD + \angle ADB = \angle ADB + \angle EDC$,

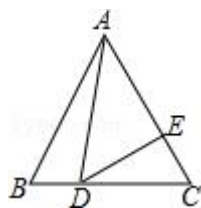
$\therefore \angle BAD = \angle EDC$, 而 $\angle B = \angle C$,

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE$,

$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BD}{CE}$,

解得: $CE = \frac{6}{5}$.

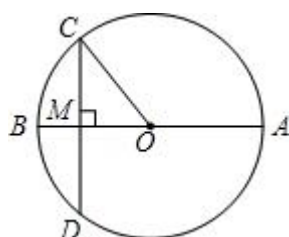
故答案为 $\frac{6}{5}$.



【点评】 该题以等边三角形为载体, 主要考查了等边三角形的性质、相似三角形的判定及其性质的应用等问题; 牢固掌握定理是灵活运用、解题的关键.

17. (4 分) 如图, $\odot O$ 的直径 AB 垂直弦 CD 于 M , 且 M 是半径 OB 的中点,

$CD = 2\sqrt{6}$, 则直径 AB 的长为 $4\sqrt{2}$.



【考点】KQ：勾股定理；M2：垂径定理.

【分析】先根据垂径定理求出 CM 的长，再根据 M 是半径 OB 的中点得出 $OM = \frac{1}{2}OC$ ，再根据勾股定理即可得出 OC 的长，进而得出结论.

【解答】解：∵ $\odot O$ 的直径 AB 垂直弦 CD 于 M ，

$$\therefore CM = \frac{1}{2}CD = \sqrt{6}.$$

∵ M 是半径 OB 的中点，

$$\therefore OM = \frac{1}{2}OC,$$

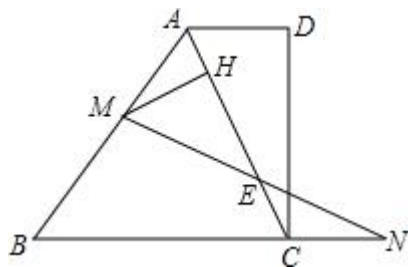
$$\therefore CM^2 + OM^2 = OC^2, \text{ 即 } (\sqrt{6})^2 + \left(\frac{OC}{2}\right)^2 = OC^2, \text{ 解得 } OC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AB = 2OC = 4\sqrt{2}.$$

故答案为： $4\sqrt{2}$.

【点评】本题考查的是垂径定理，熟知平分弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧是解答此题的关键.

18. (4分) 如图，直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $CD = 2$ ， $AB = BC$ ， $AD = 1$ ，动点 M 、 N 分别在 AB 边和 BC 的延长线运动，而且 $AM = CN$ ，联结 AC 交 MN 于 E ， $MH \perp AC$ 于 H ，则 $EH = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

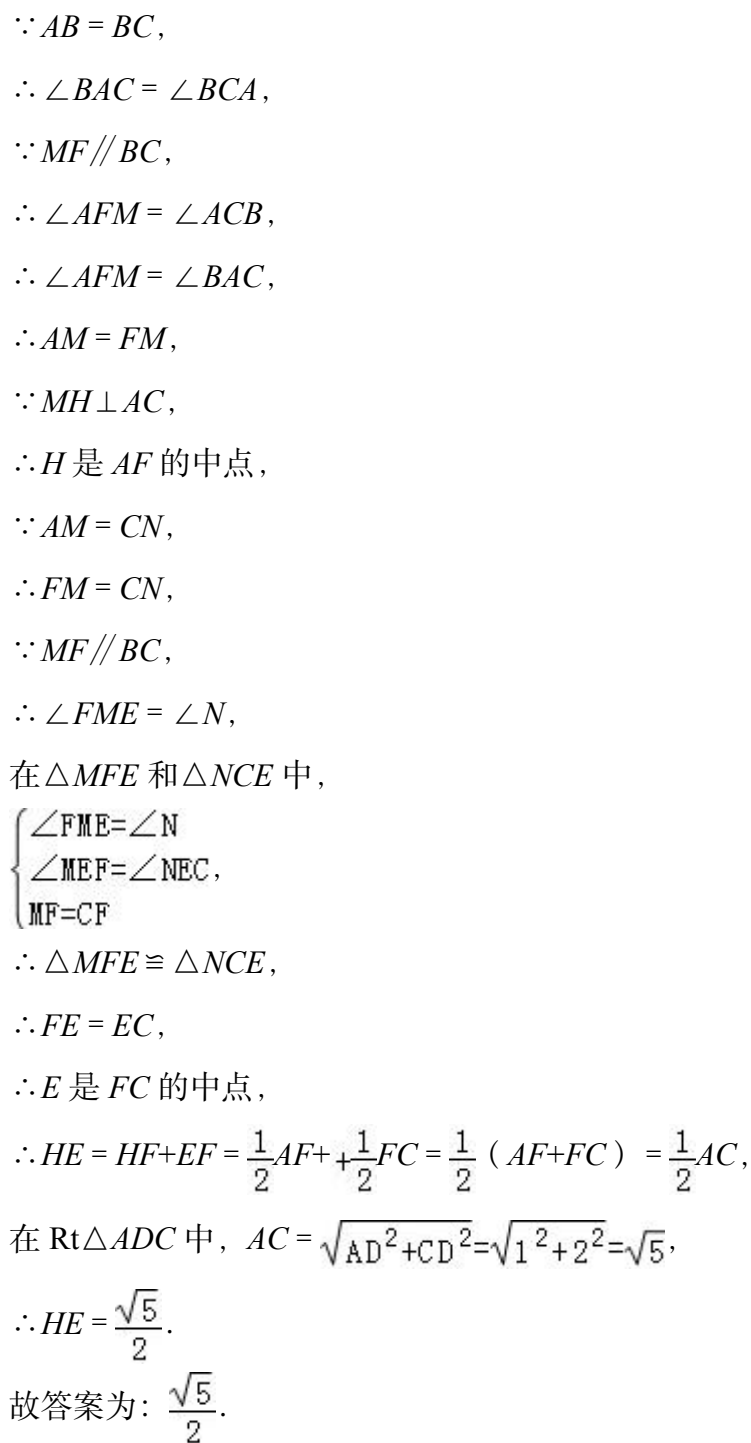


【考点】KD：全等三角形的判定与性质；LI：直角梯形.

【分析】过点 M 作 BC 的平行线交 AC 于点 F ，由于 $AB = BC$ ， $MF \parallel BC$ ，得到 $AM = FM$ ，因为 $MH \perp AC$ ， H 是 AF 的中点，再证 $\triangle MFE \cong \triangle NCE$ ，得到 $FE = EC$ ，所以 E 是 FC 的中点，

所以 $EH = \frac{1}{2}AC$ ，即可解答.

【解答】解：过点 M 作 BC 的平行线交 AC 于点 F ，



【点评】 本题考查了全等三角形的性质与判定，解决本题的关键是作辅助线，过

点 M 作 BC 的平行线交 AC 于点 F , 得到 H 是 AF 的中点, E 是 FC 的中点.

三、解答题 (78 分)

19. (8 分) 计算: $\frac{\sin 60^\circ}{\cos^2 60^\circ} + \cot 30^\circ - \frac{2}{2\cos 45^\circ + \tan 60^\circ}$.

【考点】T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】根据特殊角三角函数值, 可得答案.

【解答】解: 原式 = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2})^2} + \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

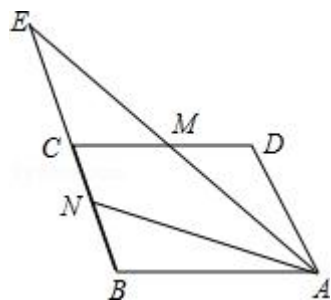
$$= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3} + 2\sqrt{2}.$$

【点评】本题考查了特殊角三角函数值, 解决此类题目的关键是熟记特殊角的三角函数值.

20. (8 分) 如图, 已知 M 、 N 分别是平行四边形 $ABCD$ 边 DC 、 BC 的中点, 射线 AM 和射线 BC 相交于 E , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AE}$; (直接写出结果)



【考点】LM: *平面向量.

【分析】由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 可得 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 又由 M 、 N 分别是平行四边形 $ABCD$ 边 DC 、 BC 的中点, 即可得 $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a}$, 然后由三角形法则求得 $\overrightarrow{AN}$ 与 $\overrightarrow{AM}$ 的值, 再由 $\triangle ECM \sim \triangle EBA$, 根据相似三角形的对应边成比例, 即可求得答案.

【解答】解: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$\because M、N$ 分别是平行四边形 $ABCD$ 边 $DC、BC$ 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

$\because AB \parallel CD$ ， M 是 CD 中点，

$$\therefore \triangle ECM \sim \triangle EBA, \quad CM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore EM:EA = CM:AB = 1:2,$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM} = \vec{a} + 2\vec{b}.$$

【点评】 本题考查了平面向量及平行四边形的性质，解答本题注意利用平行线分线段成比例的知识，难度一般.

21. (8 分) 已知一个二次函数的图象经过点 $A(1, 0)$ 和点 $B(0, 6)$, $C(4, 6)$ ，求这个抛物线的表达式以及该抛物线的顶点坐标.

【考点】 H8: 待定系数法求二次函数解析式.

【分析】 把点 $A(1, 0)$ 和点 $B(0, 6)$, $C(4, 6)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，即可求出二次函数的解析式及它的图象的顶点坐标.

【解答】 解：设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，

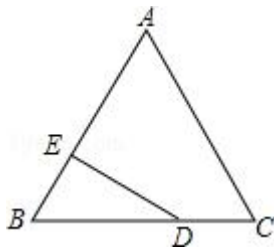
$$\text{把点 } A(1, 0) \text{ 和点 } B(0, 6), C(4, 6) \text{ 代入得 } \begin{cases} a+b+c=0 \\ c=6 \\ 16a+4b+c=6 \end{cases},$$
$$\text{解得 } \begin{cases} a=2 \\ b=-8 \\ c=6 \end{cases},$$

所以抛物线的表达式为 $y = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x-2)^2 - 2$ ，

所以顶点的坐标为 $(2, -2)$.

【点评】 本题主要考查了待定系数法求二次函数解析式，解题的关键是利用待定系数法求二次函数解析式.

22. (8 分) 如图， D 为等边 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点， $DE \perp AB$ 于 E ，若 $BD:CD = 2:1$ ， $DE = 2\sqrt{3}$ ，求 AE .



【考点】KK：等边三角形的性质；T7：解直角三角形．

【分析】由等边三角的性质可得： $AB = BC$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，由 $DE \perp AB$ 于 E ，可得： $\angle DEB = 90^\circ$ ， $\angle BDE = 30^\circ$ ，由直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半，可得： $BD = 2BE$ ，然后由勾股定理可求 BE 和 BD 的值，再由 $BD:CD = 2:1$ ，可求 CD 的长，进而确定 BC 的长，由 $AB = BC$ 即可求出 AE 的长．

【解答】解：∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = BC, \angle B = 60^\circ,$$

$$\because DE \perp AB \text{ 于 } E,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = 2BE,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中，设 $BE = x$ ，则 $BD = 2x$ ，

$$\because DE = 2\sqrt{3},$$

$$\text{由勾股定理得：}(2x)^2 - x^2 = (2\sqrt{3})^2,$$

$$\text{解得：} x = 2,$$

$$\text{所以 } BE = 2, BD = 4,$$

$$\because BD:CD = 2:1,$$

$$\therefore CD = 2,$$

$$\therefore BC = BD + CD = 6,$$

$$\because AB = BC,$$

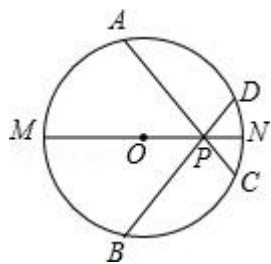
$$\therefore AB = 6,$$

$$\because AE = AB - BE$$

$$\therefore AE = 6 - 2 = 4.$$

【点评】此题考查了解直角三角形，解题的关键是：利用直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半，得到： $BD = 2BE$ ．

23. (10分) 如图, P 为 $\odot O$ 的直径 MN 上一点, 过 P 作弦 AC 、 BD 使 $\angle APM = \angle BPM$, 求证: $PA = PB$.



【考点】KU: 勾股定理的应用.

【专题】14: 证明题.

【分析】根据角平分线性质的性质求出 $OE = OF$, 根据勾股定理求出 $AE = BF$, $PE = PF$, 即可得出答案;

【解答】解: 过 O 作 $OE \perp AC$ 于 E , $OF \perp BD$ 于 F , 连接 OB 、 OA ,

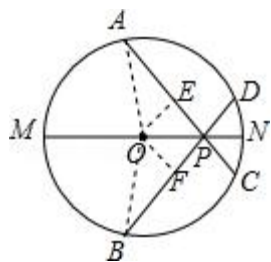
$$\because \angle APM = \angle BPM,$$

$$\therefore OE = OF,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AEO$ 和 $\text{Rt}\triangle BFO$ 中, $OF = OE$, $OA = OB$, 由勾股定理得: $AE = BF$,

在 $\text{Rt}\triangle PEO$ 和 $\text{Rt}\triangle PFO$ 中, $OF = OE$, $OP = OP$, 由勾股定理得: $PE = PF$,

$$\therefore PA = PB.$$



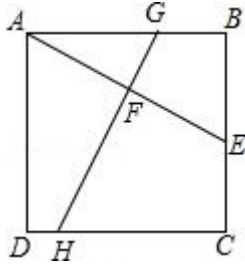
【点评】本题考查了角平分线的性质, 勾股定理的应用, 熟练掌握性质和作出辅助线构建直角三角形是本题的关键.

24. (10分) 如图, 正方形 $ABCD$ 中,

(1) E 为边 BC 的中点, AE 的垂直平分线分别交 AB 、 AE 、 CD 于 G 、 F 、 H ,

求 $\frac{GF}{FH}$;

(2) E 的位置改动为边 BC 上一点, 且 $\frac{BE}{EC} = k$, 其他条件不变, 求 $\frac{GF}{FH}$ 的值.



【考点】 LE：正方形的性质；S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】（1）如图 1，作辅助线；证明 $\frac{AE}{EK} = \frac{BE}{CE}$ ；证明 $BE = CE$ ， $AE = EK$ ， $FK = 3AF$ ；证明 $\triangle AGF \sim \triangle KHF$ ，得到 $\frac{GF}{FH} = \frac{AF}{FK} = \frac{1}{3}$ ．

（2）如图 2，作辅助线；类比（1）中的解法、思路，即可完成（2）的解答．

【解答】解：（1）如图 1，分别延长 AE 、 DC 交于点 K ；

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB \parallel CK$ ， $\triangle ABE \sim \triangle KCE$ ，

$$\therefore \frac{AE}{EK} = \frac{BE}{CE}；$$

$\because E$ 为边 BC 的中点，

$\therefore BE = CE$ ， $AE = EK$ ；

$\because GH$ 平分 AE ，

$\therefore EK = AE = 2AF$ ， $FK = 3AF$ ；

$\because AG \parallel HK$ ，

$\therefore \triangle AGF \sim \triangle KHF$ ，

$$\therefore \frac{GF}{FH} = \frac{AF}{FK} = \frac{1}{3}．$$

（2）如图 2，分别延长 AE 、 DC 交于点 K ；

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB \parallel CK$ ， $\triangle ABE \sim \triangle KCE$ ，

$$\therefore \frac{AE}{EK} = \frac{BE}{CE}；$$

$$\therefore \frac{BE}{EC} = k，$$

$\therefore AE = kEK$ ；

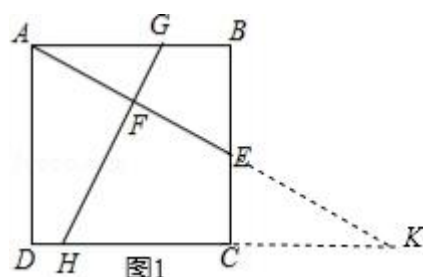
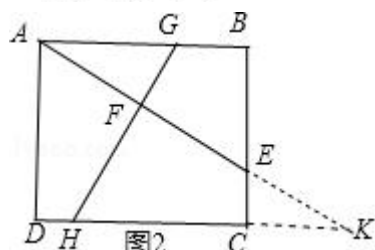
$\because GH$ 平分 AE ，

$$\therefore AF = EF = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}kEK, \quad FK = \frac{k+2}{2}EK;$$

$$\therefore AG \parallel HK,$$

$$\therefore \triangle AGF \sim \triangle KHF,$$

$$\therefore \frac{FG}{FH} = \frac{AF}{FK} = \frac{k}{k+2}.$$



【点评】该题主要考查了相似三角形的判定及其性质的应用问题；解题的关键是作辅助线，构造相似三角形，灵活运用正方形的性质等几何知识点来分析、判断、推理或解答．

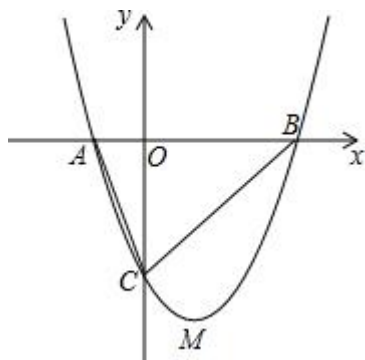
25. (12分)(1) 数学小组的单思稿同学认为形如的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ，系数 a 、 b 、 c 一旦确定，抛物线的形状、大小、位置就不会变化，所以称数 a 、 b 、 c 为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的特征数，记作 $\{a, b, c\}$ ；请求出与 y 轴交于点 $C(0, -3)$ 的抛物线 $y = x^2 - 2x + k$ 在单同学眼中的特征数；

(2) 同数学小组的尤恪星同学喜欢将抛物线设成 $y = a(x+m)^2 + k$ 的顶点式，因此坚持称 a 、 m 、 k 为抛物线的特征数，记作 $\{a, m, k\}$ ；请求出上述抛物线在尤同学眼中的特征数；

(3) 同一个问题在上述两位同学眼中的特征数各不相同，为了让两人的研究保持一致，同组的董和谐将上述抛物线表述成：特征数为 $\{u, v, w\}$ 的抛物线沿平行于某轴方向平移某单位后的图象，即此时的特征数 $\{u, v, w\}$ 无论按单思稿同学还是按尤恪星同学的理解做出的结果是一样的，请你根据数学推理将董和谐的表述完整地写出来；

(4) 在直角坐标系 xOy 中，上述(1)中的抛物线与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在

B 的左边), 请直接写出 $\triangle ABC$ 的重心坐标.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【专题】 15: 综合题.

【分析】 (1) 把 C 坐标代入抛物线解析式求出 k 的值, 确定出抛物线解析式,

即可得出抛物线在单同学眼中的特征数;

(2) 把抛物线解析式化为顶点形式, 确定出抛物线在尤同学眼中的特征数即可;

(3) 把抛物线解析式化为顶点形式, 要使单思稿同学和尤恪星同学的理解做出

的结果是一样的, 必须满足
$$\begin{cases} b = \frac{b}{2a} \\ c = c - \frac{b^2}{4a} \end{cases}$$
, 得到 $b = 0$, 即可得出董和谐的表述;

(4) 找出 AB 的中点, 求出 AB 边中线方程, 同理求出 AC 边中线方程, 联立求出重心坐标即可.

【解答】 解: (1) 把 $C(0, -3)$ 代入抛物线解析式得: $k = -3$,

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$,

则该抛物线在单同学眼中的特征数为 $\{1, -2, -3\}$;

(2) $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$,

$\therefore$ 上述抛物线在尤同学眼中的特征数为 $\{1, -1, -4\}$;

(3) $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$,

要使单思稿同学和尤恪星同学的理解做出的结果是一样的,

必须满足
$$\begin{cases} b = \frac{b}{2a} \\ c = c - \frac{b^2}{4a} \end{cases}$$
, 即 $b = 0$,

$\because y = (x - 1)^2 - 4$ 可以看做 $y = x^2 - 4$ 沿平行于 x 轴方向向右平移 1 个单位而成,

$\therefore$ 董和谐的表述为: 特征数 $\{1, 0, -4\}$ 的抛物线沿平行于 x 轴方向向右平移 1

个单位的图象；

(4) 对于抛物线解析式 $y = x^2 - 2x - 3$,

令 $y = 0$, 得到 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 即 $(x - 3)(x + 1) = 0$,

解得: $x = 3$ 或 $x = -1$, 即 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, -3)$,

$\therefore$ 线段 AB 中点坐标为 $(1, 0)$, AB 边的中线方程为 $y = \frac{-3-0}{0-1}(x-1) = 3(x-1)$
 $= 3x - 3$;

$\therefore AC$ 边中点坐标为 $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, AC 边的中线方程为 $y = \frac{-\frac{3}{2}-0}{-\frac{1}{2}-3}(x-3) = \frac{3}{7}(x$

$-3) = \frac{3}{7}x - \frac{9}{7}$,

联立得:
$$\begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = \frac{3}{7}x - \frac{9}{7} \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

则 $\triangle ABC$ 的重心坐标为 $(\frac{2}{3}, -1)$.

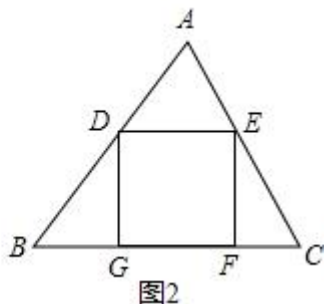
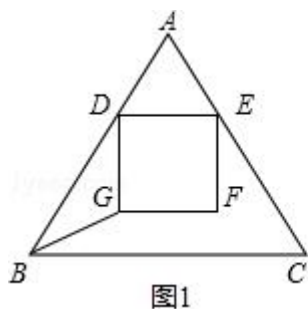
【点评】 此题属于二次函数综合题, 涉及的知识有: 待定系数法求二次函数解析式, 线段中点坐标公式, 直线的点斜式方程, 以及新定义, 弄清题中的新定义是解本题的关键.

26. (14分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 10$, $AC = 4\sqrt{5}$, D 为边 AB 上一动点 (D 和 A 、 B 不重合), 过 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E , 并以 DE 为边向 BC 一侧作正方形 $DEFG$, 设 $AD = x$,

(1) 请用 x 的代数式表示正方形 $DEFG$ 的面积, 并求出当边 FG 落在 BC 边上时的 x 的值;

(2) 设正方形 $DEFG$ 与 $\triangle ABC$ 重合部分的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数及其定义域;

(3) 点 D 在运动过程中, 是否存在 D 、 G 、 B 三点中的两点落在以第三点为圆心的圆上的情况? 若存在, 请直接写出此时 AD 的值, 若不存在, 则请说明理由.



【考点】 SO：相似形综合题.

【分析】 (1) 首先设 BC 边上的高 AM 交 DE 于点 P . 由在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$, 即可求得 BM 与 AM 的值, 又由 $DE \parallel BC$, 可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形高的比等于相似比, 即可求得答案;

(2) 首先根据三角函数的定义求得正方形 $DEFG$ 的边长为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}x$, 然后分别从当 FG 在 $\triangle ABC$ 的内部时与当 FG 在 $\triangle ABC$ 的外部时去分析求解即可求得答案.

(3) 根据题意即可得出结论.

【解答】 解: (1) 作 $AM \perp BC$ 于 M , 作 $BH \perp AC$ 于 H , DE 如图 1 所示: $\frac{DE}{10} = \frac{x}{10}$

$$\because AB = BC = 10, AC = 4\sqrt{5}, BH \perp AC,$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - (2\sqrt{5})^2 = 80,$$

$$\therefore BH = 4\sqrt{5}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AM = \frac{1}{2}AC \cdot BH,$$

$$\therefore AM = \frac{AC \cdot BH}{BC} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{10} = 8,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}, \text{ 即 } \frac{DE}{10} = \frac{x}{10},$$

$$\therefore DE = x,$$

$$\therefore \text{正方形 } DEFG \text{ 的面积为 } DE^2 = x^2;$$

当 FG 落在 BC 上时, 如图 2 所示: 设 DE 交 AM 于 P ,

$$\because \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}, \text{ 即 } \frac{x}{10} = \frac{8-x}{8},$$

$$\text{解得: } x = \frac{40}{9};$$

(2) 由 (1) 得, $DE = x$,

①当 FG 在 $\triangle ABC$ 的内部时,

如图 2 所示: $y = DE^2 = x^2$, ($0 < x < \frac{40}{9}$);

②当 FG 与 BC 重合或在 $\triangle ABC$ 的外部时, 设 DG 交 BC 于点 N ; 如图 3 所示:

在 $\text{Rt}\triangle DBN$ 中, $DN = 8 - \frac{4}{5}x$,

$$\therefore y = DE \cdot DN = x \cdot (8 - \frac{4}{5}x) = -\frac{4}{5}x^2 + 8x \quad (\frac{40}{9} \leq x < 10);$$

(3) ①当 $AD = 5$ 时, G 、 B 在以 D 为圆心 ($DB = DG$ 为半径) 的圆上; 理由如下:

当 G 、 B 在以 D 为圆心的圆上时, $DB = DG = DE = AD$,

$\therefore D$ 为 AB 的中点,

$\therefore AD = 5$;

②当 $AD = \frac{80}{13}$ 时, D 、 G 在以 B 为圆心 ($BD = BG$ 为半径) 的圆上; 理由如下:

当 $BD = BG$ 时, N 为 DG 的中点,

$$\therefore DN = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \frac{1}{2}x = 8 - \frac{4}{5}x,$$

$$\text{解得: } x = \frac{80}{13}, \text{ 即 } AD = \frac{80}{13};$$

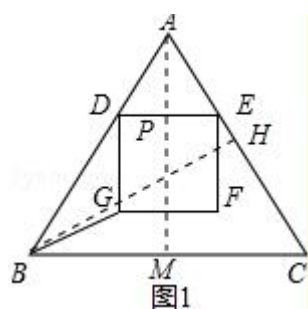
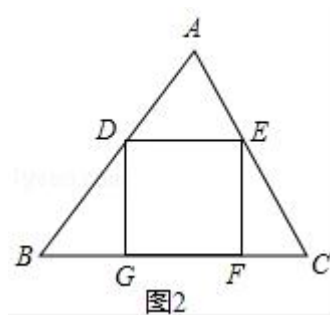
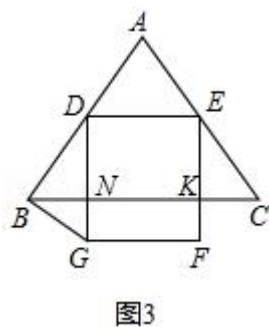
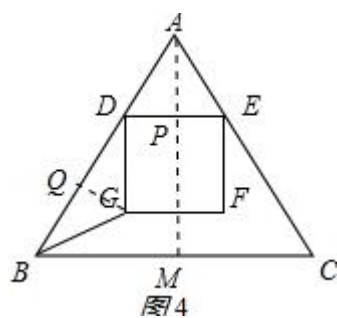
③当 $AD = \frac{50}{13}$ 时, D 、 B 在以 G 为圆心 ($GD = GB$ 为半径) 的圆上; 理由如下:

根据题意得: $GD = GB = DE = x$, 作 $GQ \perp AB$ 于 Q , 如图 4 所示:

则 Q 为 BD 的中点, $DQ = \frac{1}{2}BD = 5 - \frac{x}{2}$, $\triangle DGQ \cong \triangle ADP$,

$$\therefore DQ = AP, \text{ 即 } 5 - \frac{x}{2} = \frac{4}{5}x,$$

$$\text{解得: } x = \frac{50}{13}; \text{ 即 } AD = \frac{50}{13}.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、正方形的性质以及面积的计算；
 本题难度较大，解题的关键是画出图形，注意准确作出辅助线，掌握数形结合思想的运用。