

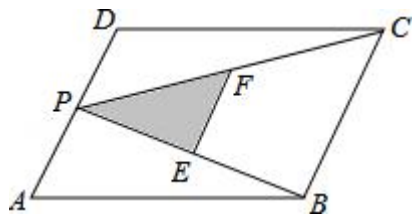
2015 年上海市奉贤区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每小题只有一个正确选项，在答题纸的相应题号的选项上用 **2B** 铅笔填涂]

1. (4 分) 已知 $3x=2y$ ，那么下列等式一定成立的是 ()
A. $x=2, y=3$ B. $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ C. $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ D. $3x+2y=0$
2. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $BC=1$ ， $AC=2$ ，则下列结论正确的是 ()
A. $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\tan A=\frac{1}{2}$ C. $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\tan B=\sqrt{3}$
3. (4 分) 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象向右平移 2 个单位长度后所得新的抛物线的顶点坐标为 ()
A. $(0, -2)$ B. $(0, 2)$ C. $(-2, 0)$ D. $(2, 0)$
4. (4 分) 在直角坐标平面中， $M(2, 0)$ ，圆 M 的半径为 4，那么点 $P(-2, 3)$ 与圆 M 的位置关系是 ()
A. 点 P 在圆内 B. 点 P 在圆上 C. 点 P 在圆外 D. 不能确定
5. (4 分) 一斜坡长为 $\sqrt{10}$ 米，高度为 1 米，那么坡比为 ()
A. 1: 3 B. 1: $\frac{1}{3}$ C. 1: $\sqrt{10}$ D. 1: $\frac{\sqrt{10}}{10}$
6. (4 分) 在同圆或等圆中，下列说法错误的是 ()
A. 相等弦所对的弧相等
B. 相等弦所对的圆心角相等
C. 相等圆心角所对的弧相等
D. 相等圆心角所对的弦相等

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. (4分) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 方向相反且长度为3, 那么 $\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}} \vec{e}$.
8. (4分) 若 α 为锐角, 已知 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, 那么 $\tan\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. (4分) $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, G 为其重心, 若 $CG = 2$, 那么 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. (4分) 一个矩形的周长为16, 设其一边的长为 x , 面积为 S , 则 S 关于 x 的函数解析式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
11. (4分) 如果抛物线 $y = x^2 + mx - 1$ 的顶点横坐标为1, 那么 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
12. (4分) 正 n 边形的边长与半径的夹角为 75° , 那么 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.
13. (4分) 相邻两边长的比值是黄金分割数的矩形, 叫做黄金矩形, 从外形看, 它最具美感. 现在想要制作一张“黄金矩形”的贺年卡, 如果较长的一条边长等于20厘米, 那么相邻一条边的边长等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 厘米.
14. (4分) 已知抛物线经过点 $(5, -3)$, 其对称轴为直线 $x = 4$, 则抛物线一定经过另一点的坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. (4分) 如图, P 为平行四边形 $ABCD$ 边 AD 上一点, E 、 F 分别为 PB 、 PC 的中点, 若 $\triangle PEF$ 的面积为3, 那么 $\triangle PDC$ 与 $\triangle PAB$ 的面积和等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.



点 B 正好在同一直线上, 那么 $\angle A'AC'$ 的正切值等于_____.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

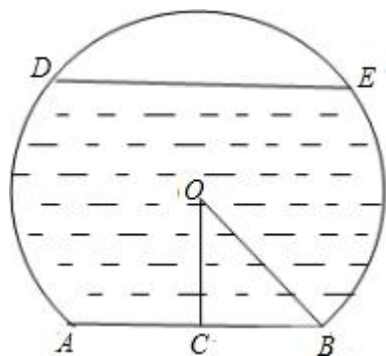
19. (10 分) 计算: $\frac{2\sin 30^\circ}{2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ} - \frac{3}{2}\cos 60^\circ$.

20. (10 分) 一个弓形桥洞截面示意图如图所示, 圆心为 O, 弦 AB 是水底线,

$OC \perp AB$, $AB=24\text{m}$, $\sin \angle COB = \frac{12}{13}$, DE 是水位线, $DE \parallel AB$.

(1) 当水位线 $DE=4\sqrt{30}\text{m}$ 时, 求此时的水深;

(2) 若水位线以一定的速度下降, 当水深 8m 时, 求此时 $\angle ACD$ 的余切值.

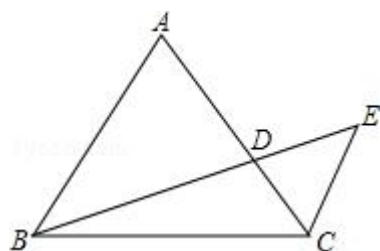


21. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=12$, $DC=4$, 过点 C 作 $CE \parallel AB$ 交

BD 的延长线于点 E, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

(1) 求 $\overrightarrow{BE}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示);

(2) 求作向量 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$ (不要求写作法, 但要指出所作图中表示结论的向量).

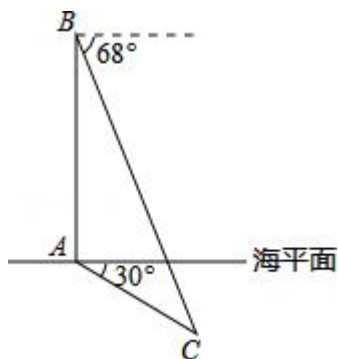


22. (10 分) 在中俄“海上联合 - 2014”反潜演习中, 我军舰 A 测得潜艇 C 的俯

角为 30° , 位于军舰 A 正上方 1000 米的反潜直升机 B 测得潜艇 C 的俯角为

68° , 试根据以上数据求出潜艇 C 离开海平面的下潜深度. (结果保留整数,

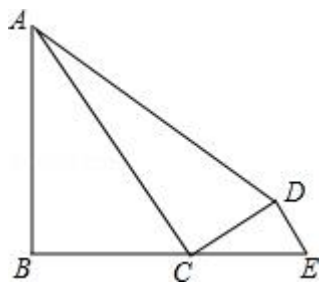
参考数据: $\sin 68^\circ \approx 0.9$, $\cos 68^\circ \approx 0.4$, $\tan 68^\circ \approx 2.5$, $\sqrt{3} \approx 1.7$)



23. (12 分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle ACD$, 过 D 作 $AC \parallel DE$ 交 BC 的延长线于点 E , 且 $CD^2 = AC \cdot DE$

(1) 求证: $\angle DAC = \angle DCE$;

(2) 若 $AD^2 = AB \cdot AD + AC \cdot DE$, 求证: $\angle ACD = 90^\circ$.

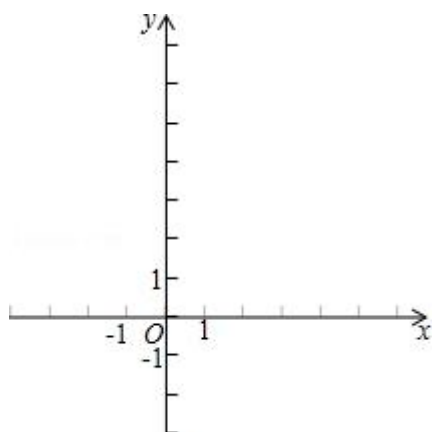


24. (12 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$, D 为 OC 中点, 直线 $y = -2x + 2$ 与 x 轴交于点 A , 与 y 轴交于点 D .

(1) 求此抛物线解析式和顶点 P 坐标;

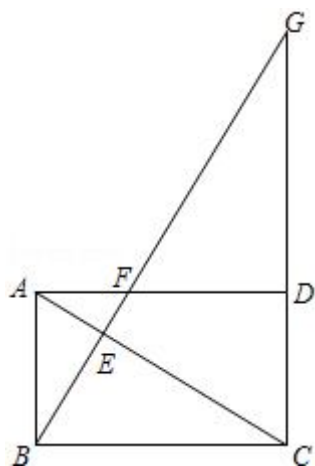
(2) 求证: $\angle ODB = \angle OAD$;

(3) 设直线 AD 与抛物线的对称轴交于点 M , 点 N 在 x 轴上, 若 $\triangle AMP$ 与 $\triangle BND$ 相似, 求点 N 坐标.



25. (14 分) 已知: 矩形 $ABCD$ 中, 过点 B 作 $BG \perp AC$ 交 AC 于点 E , 分别交射线 AD 于 F 点、交射线 CD 于 G 点, $BC=6$.

- (1) 当点 F 为 AD 中点时, 求 AB 的长;
- (2) 联结 AG , 设 $AB=x$, $S_{\triangle AFG}=y$, 求 y 关于 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围;
- (3) 是否存在 x 的值, 使以 D 为圆心的圆与 BC 、 BG 都相切? 若存在, 求出 x 的值; 若不存在, 请说明理由.



2015 年上海市奉贤区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每小题只有一个正确选项，在答题纸的相应题号的选项上用 2B 铅笔填涂]

1. (4 分) 已知 $3x=2y$ ，那么下列等式一定成立的是 ()

- A. $x=2, y=3$ B. $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ C. $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ D. $3x+2y=0$

【考点】S1：比例的性质.

【分析】根据比例的性质，代数式求值，可得答案.

【解答】解：A、 $x=2, y=3$ 时， $3x=2y$ ，故 A 正确；

C、当 $y=0$ 时， $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ 无意义，故 C 错误；

故选：A.

【点评】本题考查了比例的性质，利用了比例的性质：两内项的积等于两外项的积，利用了代数式求值.

2. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $BC=1$ ， $AC=2$ ，则下列结论正确的是 ()

- A. $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\tan A=\frac{1}{2}$ C. $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\tan B=\sqrt{3}$

【考点】T5：特殊角的三角函数值.

【分析】先利用勾股定理求出 AB 的长度，然后求出 $\sin A$ 、 $\tan A$ 、 $\cos B$ 、 $\tan B$ 的值，进行判断.

【解答】解： $\because \angle ACB=90^\circ$ ， $BC=1$ ， $AC=2$ ，

$$\therefore AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{5},$$

$$\text{则 } \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{5}}, \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}, \cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{5}}, \tan B=\frac{AC}{BC}=2.$$

故选：B.

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值，解答本题的关键是掌握三角函数的定义.

3. (4 分) 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象向右平移 2 个单位长度后所得新的抛物线的顶点坐标为 ()
- A. (0, -2) B. (0, 2) C. (-2, 0) D. (2, 0)

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】 原抛物线的顶点坐标是 (0, 0)，再根据函数图象平移的法则进行解答即可.

【解答】 解: $\because$ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的顶点坐标为 (0, 0),

$\therefore$ 向右平移 2 个单位得到新抛物线的解析式, 所得抛物线的顶点坐标是 (2, 0).

故选: D.

【点评】 本题考查的是二次函数的图象与几何变换, 要求熟练掌握平移的规律: 左加右减, 上加下减.

4. (4 分) 在直角坐标平面中, M (2, 0), 圆 M 的半径为 4, 那么点 P (-2, 3) 与圆 M 的位置关系是 ()
- A. 点 P 在圆内 B. 点 P 在圆上 C. 点 P 在圆外 D. 不能确定

【考点】 D5: 坐标与图形性质; M8: 点与圆的位置关系.

【分析】 求得线段 MP 的长后与圆 M 的半径比较即可确定正确的选项.

【解答】 解: $\because$ M (2, 0), P (-2, 3),

$$\therefore MP = \sqrt{(2+2)^2 + (0-3)^2} = 5,$$

$\because$ 圆 M 的半径为 4,

$\therefore$ 点 P 在圆外,

故选: C.

【点评】 考查了点与圆的位置关系, 判断点与圆的位置关系, 也就是比较点与圆

心的距离和半径的大小关系.

5. (4分) 一斜坡长为 $\sqrt{10}$ 米, 高度为1米, 那么坡比为 ()

- A. 1: 3 B. 1: $\frac{1}{3}$ C. 1: $\sqrt{10}$ D. 1: $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【考点】T9: 解直角三角形的应用 – 坡度坡角问题.

【分析】直接利用坡度的定义, 坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比, 又叫做坡比, 进而得出答案.

【解答】解: $\because$ 一斜坡长为 $\sqrt{10}$ 米, 高度为1米,

$\therefore$ 坡的水平宽度为: 3m,

$\therefore$ 坡比为: $\frac{1}{3}$.

故选: A.

【点评】此题主要考查了坡度的定义, 正确把握定义是解题关键.

6. (4分) 在同圆或等圆中, 下列说法错误的是 ()

- A. 相等弦所对的弧相等
B. 相等弦所对的圆心角相等
C. 相等圆心角所对的弧相等
D. 相等圆心角所对的弦相等

【考点】M4: 圆心角、弧、弦的关系.

【分析】利用在同圆和等圆中, 相等的弦所对的圆心角相等, 相等的圆心角所对的弧相等, 所对的弦也相等, 判断出 B、C、D 三选项都正确; 而同圆或等圆中, 同一条弦 (不是直径) 对应两条弧, 其中一条是优弧, 一条是劣弧, 所以可判断出 A 选项错误.

【解答】解: A、相等弦所对的弧不一定相等, 故本选项错误;

B、相等弦所对的圆心角相等, 故本选项正确;

C、相等圆心角所对的弧相等，故本选项正确；

D、相等圆心角所对的弦相等，故本选项正确.

故选：A.

【点评】此题考查了圆心角、弧、弦的关系定理的推论：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等. 注意：同一条弦对应两条弧，其中一条是优弧，一条是劣弧，而在本推论中的“弧”是指同为优弧或劣弧.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. (4 分) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 方向相反且长度为 3，那么 $\vec{a} = \underline{-3} \vec{e}$.

【考点】LM: *平面向量.

【分析】由 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 方向相反且长度为 3，根据向量的概念，即可得 $\vec{a} = -3\vec{e}$.

【解答】解：∵ $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 方向相反且长度为 3，

$$\therefore \vec{a} = -3\vec{e}.$$

故答案为：-3.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大，注意理解平面向量的概念是解此题的关键.

8. (4 分) 若 α 为锐角，已知 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ ，那么 $\tan\alpha = \underline{\sqrt{3}}$.

【考点】T3: 同角三角函数的关系.

【分析】根据正弦的平方与余弦的平方和等于 1，可得正弦函数值，根据正切函数等于正弦值与余弦的比，可得答案.

【解答】解：由 α 为锐角，已知 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ ，得 $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由正切函数等于正弦值与余弦的比，得 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查了同角三角函数关系, 正弦的平方与余弦的平方和等于 1, 正切函数等于正弦值与余弦的比.

9. (4 分) $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, G 为其重心, 若 $CG=2$, 那么 $AB=$ 6.

【考点】 K5: 三角形的重心.

【分析】 如图, 运用三角形重心的性质, 求出 $DG=1$, $CD=3$; 运用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 即可解决问题.

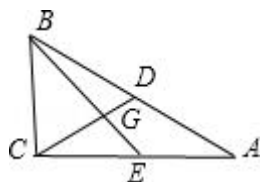
【解答】 解: 如图, $\because$ 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $CG=2$,

$$\therefore CG=2DG=2,$$

$$\therefore DG=1, CD=3;$$

由直角三角形的性质得: $AB=2CD=6$,

故答案为 6.



【点评】 该题主要考查了三角形重心的性质及其应用问题; 解题的关键是牢固掌握三角形重心的性质, 这是灵活运用、解题的关键.

10. (4 分) 一个矩形的周长为 16, 设其一边的长为 x , 面积为 S , 则 S 关于 x 的函数解析式是 $8x - x^2$.

【考点】 HD: 根据实际问题列二次函数关系式.

【分析】 首先求得矩形的另一边长, 则面积=两边长的乘积, 得出函数解析式.

【解答】 解: $\because$ 矩形的周长为 16, 其一边的长为 x ,

$$\therefore \text{另一边长为 } 8 - x,$$

$$\therefore S = x(8 - x) = 8x - x^2.$$

故答案为: $S=8x-x^2$.

【点评】此题考查列二次函数关系式; 得到矩形的另一边长是解决本题的突破点.

11. (4 分) 如果抛物线 $y=x^2+mx-1$ 的顶点横坐标为 1, 那么 m 的值为 -2.

【考点】H3: 二次函数的性质.

【分析】根据抛物线的顶点公式列方程求解即可.

【解答】解: 由题意得, $-\frac{m}{2 \times 1}=1$,

解得 $m=-2$.

故答案为: -2.

【点评】本题考查了二次函数的性质, 熟记顶点坐标公式是解题的关键.

12. (4 分) 正 n 边形的边长与半径的夹角为 75° , 那么 $n=\underline{12}$.

【考点】MM: 正多边形和圆.

【分析】先根据正 n 边形的边长与半径的夹角为 75° 求出一个内角的度数, 再根据正多边形的各角都相等可列出关于 n 的方程, 求出 n 的值即可.

【解答】解: $\because$ 正 n 边形的边长与半径的夹角为 75° ,

$\therefore$ 一个内角的度数 $=150^\circ$, 即 $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}=150^\circ$. 解得 $n=12$.

故答案为: 12.

【点评】本题考查的是正多边形和圆, 熟知正多边形的性质是解答此题的关键.

13. (4 分) 相邻两边长的比值是黄金分割数的矩形, 叫做黄金矩形, 从外形看, 它最具美感. 现在想要制作一张“黄金矩形”的贺年卡, 如果较长的一条边长等于 20 厘米, 那么相邻一条边的边长等于 $(10\sqrt{5}-10)$ 厘米.

【考点】S3: 黄金分割.

【分析】由黄金矩形的定义, 可知黄金矩形的宽与长之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 设所求边长

为 x ，代入已知数据即可得出答案.

【解答】解：设所求边长为 x ，由题意，

$$\text{得 } \frac{x}{20} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

解得 $x = (10\sqrt{5} - 10) \text{ cm}$.

故答案为 $(10\sqrt{5} - 10)$.

【点评】本题主要考查了黄金分割点的概念，需要熟记黄金比的值，难度适中.

14. (4分) 已知抛物线经过点 $(5, -3)$ ，其对称轴为直线 $x=4$ ，则抛物线一定经过另一点的坐标是 $(3, -3)$.

【考点】H5：二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】根据二次函数的对称性求解即可.

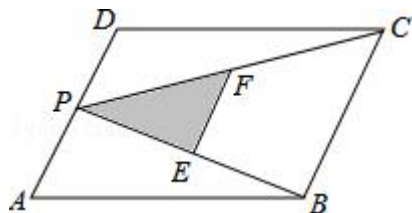
【解答】解： $\because$ 点 $(5, -3)$ 关于对称轴直线 $x=4$ 的对称点为 $(3, -3)$ ，

$\therefore$ 抛物线一定经过另一点的坐标是 $(3, -3)$.

故答案为： $(3, -3)$.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，主要利用了二次函数的对称性.

15. (4分) 如图， P 为平行四边形 $ABCD$ 边 AD 上一点， E 、 F 分别为 PB 、 PC 的中点，若 $\triangle PEF$ 的面积为 3，那么 $\triangle PDC$ 与 $\triangle PAB$ 的面积和等于 12.



【考点】KX：三角形中位线定理；L5：平行四边形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】利用三角形中位线的性质以及相似三角形的判定与性质得出 $\frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle CPB}} = \frac{1}{4}$,

进而得出答案.

【解答】解: $\because$ E、F 分别为 PB、PC 的中点,

$$\therefore EF \parallel \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle CPB}} = \frac{1}{4},$$

$\therefore \triangle PEF$ 的面积为 3,

$$\therefore S_{\triangle PBC} = 12,$$

$\therefore$ P 为平行四边形 ABCD 边 AD 上一点,

$$\therefore S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形 ABCD}} = 12,$$

$\therefore \triangle PDC$ 与 $\triangle PAB$ 的面积和等于 12.

故答案为: 12.

【点评】此题主要考查了平行四边形的性质以及三角形中位线的性质等知识, 得

出 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形 ABCD}}$ 是解题关键.

16. (4 分) 已知圆 A 与圆 B 内切, $AB=10$, 圆 A 半径为 4, 那么圆 B 的半径为

14.

【考点】MJ: 圆与圆的位置关系.

【分析】根据内切两圆的半径之差等于两圆的圆心距即可求解.

【解答】解: 设圆 B 的半径为 R,

根据题意得: $R - 4 = 10$,

解得: $R = 14$,

故答案为: 14.

【点评】本题考查了圆与圆的位置关系, 解题的关键是能够了解两圆内切时圆心距等于两圆的半径之差.

17. (4 分) 已知抛物线 $y = a(x+1)^2 + 2$ 过 $(0, y_1)$ 、 $(3, y_2)$, 若 $y_1 > y_2$, 那么

a 的取值范围是 $a < 0$.

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】根据二次函数图象上点的坐标特征得到 $y_1 = a + 2$, $y_2 = 16a + 2$, 再由 $y_1 > y_2$, 得 $a > 16a$, 然后解不等式即可.

【解答】 $a < 0$; 解: $\because$ 抛物线 $y = a(x+1)^2 + 2$ 过 $(0, y_1)$ 、 $(3, y_2)$,

$$\therefore y_1 = a + 2, y_2 = 16a + 2,$$

$$\because y_1 > y_2,$$

$$\therefore a > 16a,$$

$$\therefore a < 0.$$

故答案为 $a < 0$.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

18. (4 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$. 在平面内将 $\triangle ABC$ 绕 B 点旋转, 点 A 落到 A' , 点 C 落到 C' , 若旋转后点 C 的对应点 C' 和点 A 、点 B 正好在同一直线上, 那么 $\angle A'AC'$ 的正切值等于 $\frac{1}{3}$ 或 3 .

【考点】R2: 旋转的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】分类讨论: 当 C' 点在线段 AB 上, 如图 1, 连结 AA' , 先利用勾股定理计算出 $AB = 5$, 在根据旋转的性质得 $BC' = BC = 4$, $A'C' = AC = 3$, 则 $AC' = AB - BC' = 1$, 然后在 $Rt \triangle AA'C'$ 中, 利用正切的定义即可得到 $\tan \angle A'AC' = \frac{A'C'}{AC'} = 3$; 当 C' 点在线段 AB 的延长线上, 如图 2 连结 AA' , 根据旋转的性质得 $BC' = BC = 4$, $A'C' = AC = 3$, 则 $AC' = AB + BC' = 9$, 然后在 $Rt \triangle$

AA'C'中，根据正切的定义得到 $\tan \angle A'AC' = \frac{A'C'}{AC'} = \frac{1}{3}$.

【解答】解：当 C' 点在线段 AB 上，如图 1，连结 AA'，

$\because \angle C = 90^\circ$ ，AC=3，BC=4，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$ ，

$\therefore$ 在平面内将 $\triangle ABC$ 绕 B 点旋转，点 A 落到 A'，点 C 落到 C'，

$\therefore BC' = BC = 4$ ，A'C' = AC = 3，

$\therefore AC' = AB - BC' = 1$ ，

在 Rt $\triangle AA'C'$ 中， $\tan \angle A'AC' = \frac{A'C'}{AC'} = \frac{3}{1} = 3$ ；

当 C' 点在线段 AB 的延长线上，如图 2，连结 AA'，

$\therefore$ 在平面内将 $\triangle ABC$ 绕 B 点旋转，点 A 落到 A'，点 C 落到 C'，

$\therefore BC' = BC = 4$ ，A'C' = AC = 3，

$\therefore AC' = AB + BC' = 9$ ，

在 Rt $\triangle AA'C'$ 中， $\tan \angle A'AC' = \frac{A'C'}{AC'} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，

综合所述， $\angle A'AC'$ 的正切值等于 $\frac{1}{3}$ 或 3.

故答案为 $\frac{1}{3}$ 或 3.

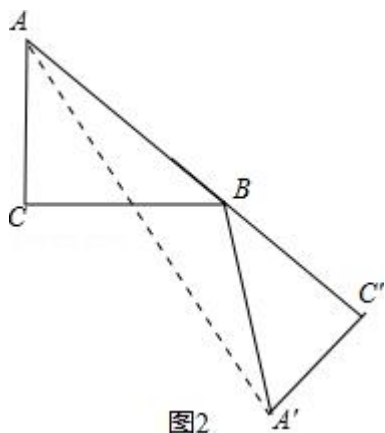


图2

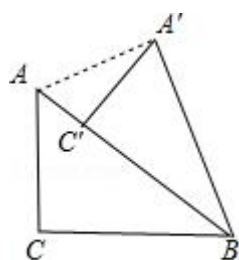


图1

【点评】 本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了锐角三角函数的定义．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算： $\frac{2\sin 30^\circ}{2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ} - \frac{3}{2}\cos 60^\circ$.

【考点】 T5：特殊角的三角函数值.

【分析】 将特殊角的三角函数值代入求解即可.

【解答】 解：原式 $= \frac{2 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}.$$

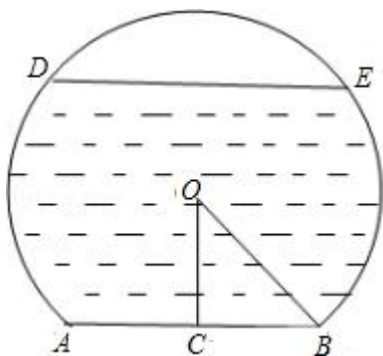
【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值，解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值.

20. (10 分) 一个弓形桥洞截面示意图如图所示，圆心为 O，弦 AB 是水底线，

$OC \perp AB$ ， $AB=24\text{m}$ ， $\sin \angle COB = \frac{12}{13}$ ，DE 是水位线， $DE \parallel AB$.

(1) 当水位线 $DE=4\sqrt{30}\text{m}$ 时，求此时的水深；

(2) 若水位线以一定的速度下降，当水深 8m 时，求此时 $\angle ACD$ 的余切值.



【考点】 KQ: 勾股定理; M3: 垂径定理的应用.

【分析】 (1) 延长 CO 交 DE 于点 F, 连接 OD, 根据垂径定理求出 BC 的长,

由 $\sin \angle COB = \frac{BC}{OB}$ 得出 OB 的长, 根据 $DE \parallel AB$ 可知 $\angle ACD = \angle CDE$, $\angle DFO =$

$\angle BCO = 90^\circ$. 由 OF 过圆心可得出 DF 的长, 再根据勾股定理求出 OF 的长,

进而可得出 CF 的长;

(2) 若水位线以一定的速度下降, 当水深 8m 时, 即 $CF = 8m$, 则 $OF = CF -$

$OC = 3m$, 连接 CD, 在 $Rt\triangle ODF$ 中由勾股定理求出 DF 的长, 由 $\cot \angle ACD = \cot$

$\angle CDF$ 即可得出结论.

【解答】 解: (1) 延长 CO 交 DE 于点 F, 连接 OD

$\because OC \perp AB$, OC 过圆心, $AB = 24m$,

$\therefore BC = \frac{1}{2}AB = 12m$.

在 $Rt\triangle BCO$ 中, $\sin \angle COB = \frac{BC}{OB} = \frac{12}{13}$,

$\therefore OB = 13m, CO = 5m$.

$\because DE \parallel AB$,

$\therefore \angle ACD = \angle CDE$, $\angle DFO = \angle BCO = 90^\circ$.

又 $\because OF$ 过圆心,

$\therefore DF = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{30} = 2\sqrt{30}m$.

在 $Rt\triangle DFO$ 中, $OF = \sqrt{OD^2 - DF^2} = \sqrt{169 - 120} = 7m$,

$\therefore CF=CO+OF=12\text{m}$, 即当水位线 $DE=4\sqrt{30}\text{m}$ 时, 此时的水深为 12m ;

(2) 若水位线以一定的速度下降, 当水深 8m 时, 即 $CF=8\text{m}$, 则 $OF=CF-OC=3\text{m}$,

连接 CD , 在 $\text{Rt}\triangle ODF$ 中, $DF=\sqrt{OD^2-OF^2}=\sqrt{13^2-3^2}=4\sqrt{10}\text{m}$.

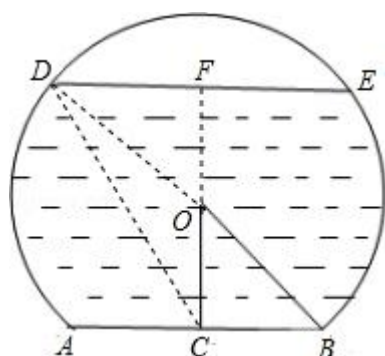
在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中, $\cot\angle CDF=\frac{DF}{CF}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

$\therefore DE\parallel AB$,

$\therefore \angle ACD=\angle CDE$,

$\therefore \cot\angle ACD=\cot\angle CDF=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

答: 若水位线以一定的速度下降, 当水深 8m 时, 此时 $\angle ACD$ 的余切值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

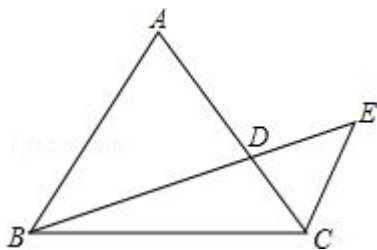


【点评】 本题考查的是垂径定理的应用, 根据题意作出辅助线, 构造出直角三角形是解答此题的关键.

21. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=12$, $DC=4$, 过点 C 作 $CE\parallel AB$ 交 BD 的延长线于点 E , $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

(1) 求 $\overrightarrow{BE}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示);

(2) 求作向量 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$ (不要求写作法, 但要指出所作图中表示结论的向量).



【考点】LM: *平面向量.

【分析】(1) 由在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=12$, $DC=4$, $CE \parallel AB$, 可得 $AB=2CE$,

然后由 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 即可求得 $\overrightarrow{BE}$;

(2) 由平行线分线段成比例定理, 可得 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE}$, 然后由三角形法则, 即可求得答案.

【解答】解: (1) $\because CE \parallel AB$,

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CE},$$

$$\because AB=AC=12, DC=4,$$

$$\therefore AD=8;$$

$$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB=2CE,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CE} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a},$$

(2) 如图, $\overrightarrow{AF}$ 即为所求.

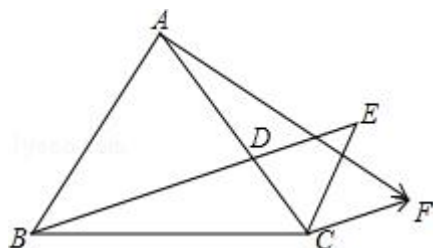
$$\because AB \parallel CE,$$

$$\therefore BD:DE=AB:CE=2,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a},$$

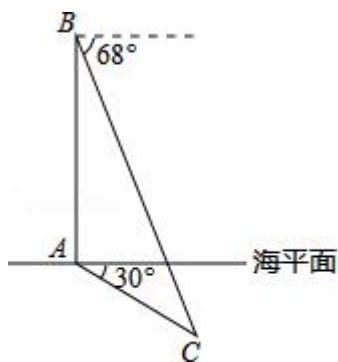
$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \frac{4}{3} \overrightarrow{b} + \frac{5}{6} \overrightarrow{a}.$$



【点评】 本题考查了平面向量的知识. 此题难度适中, 注意掌握三角形法则的应用, 注意数形结合思想的应用.

22. (10 分) 在中俄“海上联合-2014”反潜演习中, 我军舰 A 测得潜艇 C 的俯角为 30° , 位于军舰 A 正上方 1000 米的反潜直升机 B 测得潜艇 C 的俯角为 68° , 试根据以上数据求出潜艇 C 离开海平面的下潜深度. (结果保留整数, 参考数据: $\sin 68^\circ \approx 0.9$, $\cos 68^\circ \approx 0.4$, $\tan 68^\circ \approx 2.5$, $\sqrt{3} \approx 1.7$)



【考点】 TA: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

【专题】 121: 几何图形问题.

【分析】 过点 C 作 $CD \perp AB$, 交 BA 的延长线于点 D, 则 AD 即为潜艇 C 的下潜深度, 分别在 $Rt\triangle ACD$ 中表示出 CD 和在 $Rt\triangle BCD$ 中表示出 BD, 从而利用二者之间的关系列出方程求解.

【解答】 解: 过点 C 作 $CD \perp AB$, 交 BA 的延长线于点 D, 则 AD 即为潜艇 C 的下潜深度,

根据题意得: $\angle ACD = 30^\circ$, $\angle BCD = 68^\circ$,

设 $AD = x$, 则 $BD = BA + AD = 1000 + x$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $CD = \frac{AD}{\tan \angle ACD} = \frac{x}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x$,

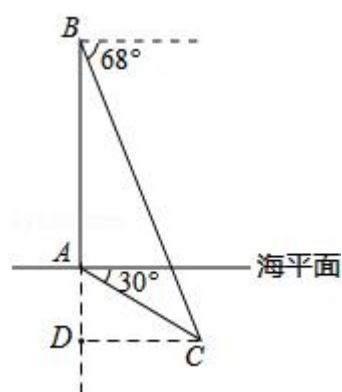
在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BD = CD \cdot \tan 68^\circ$,

$$\therefore 1000 + x = \sqrt{3}x \cdot \tan 68^\circ$$

$$\text{解得: } x = \frac{1000}{\sqrt{3} \cdot \tan 68^\circ - 1} \approx \frac{1000}{1.7 \times 2.5 - 1} \approx 308 \text{ 米,}$$

(分母有理化化简得到 296 米) 两个答案都是正确的.

$\therefore$ 潜艇 C 离开海平面的下潜深度为 308 米或 296 米.

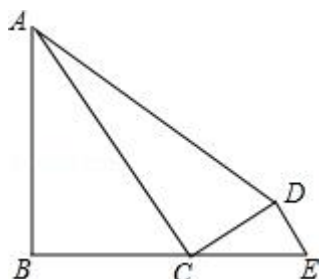


【点评】 本题考查了解直角三角形的应用, 解题的关键是从题目中抽象出直角三角形并选择合适的边角关系求解.

23. (12 分) 如图, 在四边形 ABCD 中, $\angle B = \angle ACD$, 过 D 作 $AC \parallel DE$ 交 BC 的延长线于点 E, 且 $CD^2 = AC \cdot DE$

(1) 求证: $\angle DAC = \angle DCE$;

(2) 若 $AD^2 = AB \cdot AD + AC \cdot DE$, 求证: $\angle ACD = 90^\circ$.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 14: 证明题.

【分析】(1) 证明 $\angle ACD = \angle CDE$, $\frac{CD}{AC} = \frac{DE}{CD}$, 得到 $\triangle ACD \sim \triangle CDE$, 即可解决问题.

(2) 证明 $\angle ACB = \angle ADC$, 此为解题的关键性结论; 结合 $\angle B = \angle ACD$, 得到 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, 进而证明 $AC^2 = AD \cdot AB$, 结合已知条件证明 $AD^2 = AC^2 + CD^2$, 即可解决问题.

【解答】证明: (1) 如图, $\because AC \parallel DE$,

$$\therefore \angle ACD = \angle CDE;$$

$$\text{又} \because CD^2 = AC \cdot DE,$$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{DE}{CD};$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCE.$$

$$(2) \because \triangle ACD \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle E;$$

$$\because AC \parallel DE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle E,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ADC;$$

$$\because \angle B = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD,$$

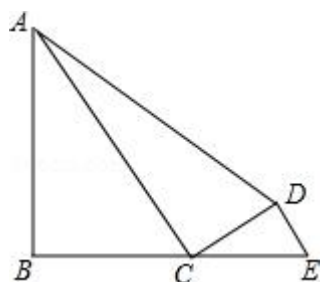
$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AD \cdot AB,$$

$$\because AD^2 = AB \cdot AD + AC \cdot DE, \quad CD^2 = AC \cdot DE,$$

$$\therefore AD^2 = AC^2 + CD^2,$$

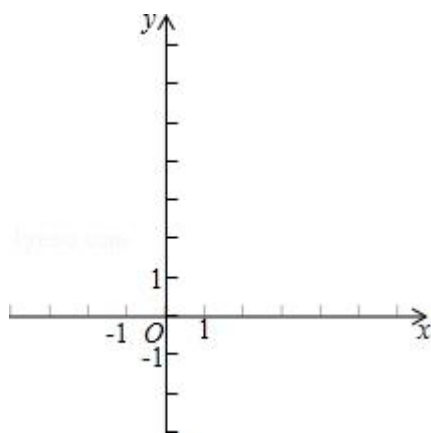
$$\therefore \angle ACD = 90^\circ.$$



【点评】该题主要考查了相似三角形的判定及其性质的应用问题；牢固掌握判定定理及性质定理是灵活解题的基础和关键.

24. (12 分) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C, 对称轴为直线 $x=\frac{5}{2}$, D 为 OC 中点, 直线 $y=-2x+2$ 与 x 轴交于点 A, 与 y 轴交于点 D.

- (1) 求此抛物线解析式和顶点 P 坐标;
- (2) 求证: $\angle ODB = \angle OAD$;
- (3) 设直线 AD 与抛物线的对称轴交于点 M, 点 N 在 x 轴上, 若 $\triangle AMP$ 与 $\triangle BND$ 相似, 求点 N 坐标.



【考点】HF: 二次函数综合题.

【专题】16: 压轴题.

【分析】(1) 利用直线解析式求出点 A、D, 然后求出点 C 的坐标, 根据对称轴求出点 B 的坐标, 然后利用待定系数法求二次函数解析式解答;

(2) 求出 $\angle ODB$ 和 $\angle OAD$ 的正切值, 然后根据等角的正切值相等证明;

(3) 先求出点 M 的坐标，再求出 $\angle AMP = \angle OBD$ ，然后求出 AM、PM、BD，再根据相似三角形对应边成比例，分两种情况讨论求出 BN，再求出 ON，最后写出点 N 的坐标即可。

【解答】 (1) 解： $\because$ 直线 $y = -2x + 2$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 D，

$\therefore A(1, 0), D(0, 2)$,

$\because D$ 为 OC 中点，

$\therefore C(0, 4)$,

$\because A(1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore B(4, 0)$ ，

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A、B、C 点，

$$\therefore \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 4 \end{cases}$$

$\therefore$ 此抛物线的解析式为 $y = x^2 - 5x + 4$ ，

顶点 P 的坐标为 $(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4})$ ；

(2) 证明：在 $Rt\triangle AOD$ 和 $Rt\triangle ACD$ 中， $\angle DOB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle ODB = \frac{OB}{OD} = \frac{4}{2} = 2, \quad \tan \angle OAD = \frac{OD}{OA} = \frac{2}{1} = 2,$$

$\therefore \angle ODB = \angle OAD$ ；

(3) 解： $\because$ 直线 AD 与抛物线的对称轴交于点 M，对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$ ，

$\therefore M(\frac{5}{2}, -3)$ ，

$\because \angle ODB = \angle OAD$ ，

$$\therefore \angle ADO = \angle OBD,$$

$\therefore$ 对称轴平行于 y 轴,

$$\therefore \angle ADO = \angle AMP,$$

$$\therefore \angle AMP = \angle OBD,$$

$$\therefore AM = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}, \quad PM = -\frac{9}{4} - (-3) = \frac{3}{4}, \quad BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$\therefore$ N 点在点 B 左侧, 可有 $\triangle AMP \sim \triangle DBN$ 或 $\triangle AMP \sim \triangle NBD$,

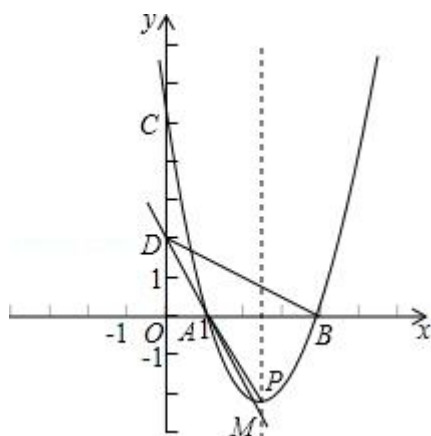
$$\therefore \frac{AM}{DB} = \frac{PM}{BN} \text{ 或 } \frac{AM}{BN} = \frac{PM}{BD},$$

$$\therefore \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\frac{3}{4}}{BN} \text{ 或 } \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{BN} = \frac{\frac{3}{4}}{2\sqrt{5}},$$

解得 $BN=1$ 或 $BN=20$,

$$\therefore ON=4-1=3 \text{ 或 } ON=20-4=16,$$

$$\therefore N(3, 0) \text{ 或 } (-16, 0).$$



【点评】 本题是二次函数综合题型, 主要利用了待定系数法求二次函数解析式,

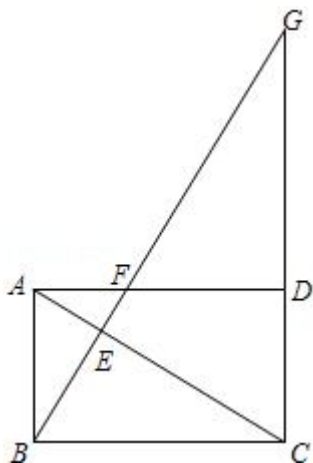
锐角三角函数, 勾股定理, 相似三角形的判定与性质, 难点在于 (3) 要分情况讨论.

25. (14 分) 已知: 矩形 ABCD 中, 过点 B 作 $BG \perp AC$ 交 AC 于点 E, 分别交射线 AD 于 F 点、交射线 CD 于 G 点, $BC=6$.

(1) 当点 F 为 AD 中点时, 求 AB 的长;

(2) 联结 AG ，设 $AB=x$ ， $S_{\triangle AFG}=y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围；

(3) 是否存在 x 的值，使以 D 为圆心的圆与 BC 、 BG 都相切？若存在，求出 x 的值；若不存在，请说明理由。



【考点】SO：相似形综合题.

【专题】15：综合题.

【分析】(1) 易证 $\triangle ABF \sim \triangle BCA$ ，然后根据相似三角形的性质就可求出 AB 的值；

(2) 由 (1) 可得 $\triangle ABF \sim \triangle BCA$ ，根据相似三角形的性质就可求得 $AF = \frac{x^2}{6}$ ，同理可得 $CG = \frac{36}{x}$ 。然后分点 F 在线段 AD 上及在线段 AD 延长线上两种情况进行讨论，只需求出 AF 、 DG ，就可解决问题；

(3) 过点 D 作 $DH \perp BG$ 于点 H ，易得 $\angle ACB = 30^\circ$ ，在 $Rt\triangle ABC$ 中运用三角函数就可解决问题。

【解答】解：(1) $\because$ 点 F 为 AD 中点，且 $AD=BC=6$ ，

$\therefore AF=3$ 。

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $BG \perp AC$ 于点 E ，

$\therefore \angle ABE + \angle EBC = 90^\circ$ ， $\angle ACB + \angle EBC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle ACB$ 。

$$\therefore \angle FAB = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AF}{BA},$$

$$\therefore \frac{AB}{6} = \frac{3}{AB},$$

$$\therefore AB = 3\sqrt{2};$$

(2) 由 (1) 可得 $\triangle ABF \sim \triangle BCA$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AF}{AB}.$$

$$\therefore AB = x, \quad BC = 6,$$

$$\therefore AF = \frac{AB^2}{BC} = \frac{x^2}{6},$$

$$\text{同理可得: } CG = \frac{BC^2}{AB} = \frac{36}{x}.$$

①当 F 点在线段 AD 上时, 如图 1,

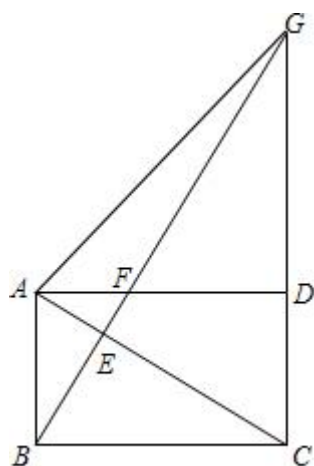


图1

$$DG = CG - CD = \frac{36}{x} - x = \frac{36 - x^2}{x},$$

$$\therefore S_{\triangle AFG} = \frac{1}{2} AF \cdot DG = \frac{36x - x^3}{12},$$

$$\text{即 } y = \frac{36x - x^3}{12} \quad (0 < x < 6);$$

②当 F 点在线段 AD 延长线上时, 如图 2,

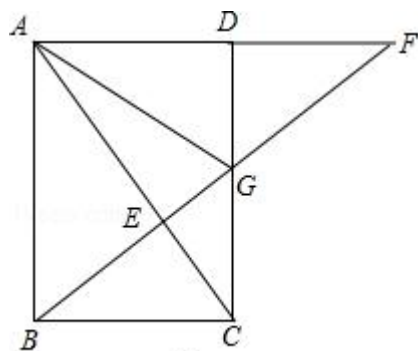


图2

$$DG = CD - CG = x - \frac{36 - x^2}{x},$$

$$\therefore S_{\triangle AFG} = \frac{1}{2} AF \cdot DG = \frac{x^3 - 36x}{12},$$

$$\text{即 } y = \frac{x^3 - 36x}{12} \quad (x > 6);$$

(3) 过点 D 作 $DH \perp BG$ 于点 H, 如图 3,

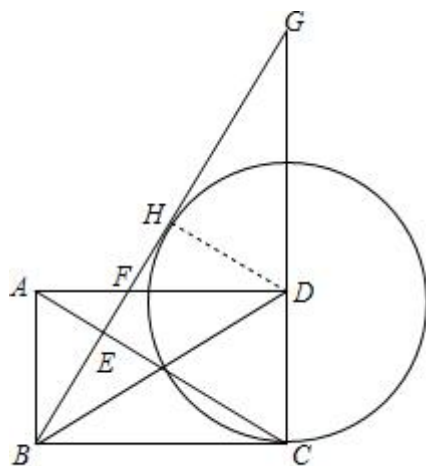


图3

$\therefore$ 以点 D 为圆心的圆与 BC、BG 都相切,

$$\therefore CD = DH,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle CBD.$$

$\therefore$ 矩形 ABCD 中, $\angle ACB = \angle CBD$,

$$\therefore \text{Rt} \triangle BEC \text{ 中, } \angle ACB + \angle CBD + \angle DBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle ABC \text{ 中, } \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC},$$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{x}{6},$$

$$\therefore x = 2\sqrt{3},$$

即当 $x = 2\sqrt{3}$ 时，以点 D 为圆心的圆与 BC、BG 都相切.

【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质、矩形的性质、切线长定理、三角函数等知识，运用分类讨论的思想是解决第（2）小题的关键.