

2014 年上海市静安区中考数学二模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. (4 分) 当 $a < -2$ 时， $\sqrt{(a+2)^2}$ 等于 ()

- A. $a+2$ B. $a-2$ C. $2-a$ D. $-a-2$

2. (4 分) 如果 $a < b$ ，那么下列不等式中一定正确的是 ()

- A. $a-2b < -b$ B. $a^2 < ab$ C. $ab < b^2$ D. $a^2 < b^2$

3. (4 分) 已知函数 $y = (k-1)x + k - 2$ (k 为常数)，如果 y 随着 x 的增大而减小，那么 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 1$ B. $k < 1$ C. $k > 2$ D. $k < 2$

4. (4 分) 某校九年级 200 名学生在第一学期的期末考试中数学成绩（分数都是整数）分布如表：

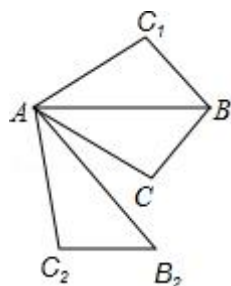
分数段	75 ~ 89	90 ~ 104	105 ~ 119	120 ~ 134	135 ~ 149
频率	0.1	0.15	0.25	0.35	0.15

表中每组数据含最小值和最大值，在最低分为 75 分与最高分为 149 分之间的每个分数都有学生，那么下列关于这 200 名学生成绩的说法中一定正确的是 ()

- A. 中位数在 105 ~ 119 分数段
B. 中位数是 119.5 分
C. 中位数在 120 ~ 134 分数段
D. 众数在 120 ~ 134 分数段

5. (4 分) 如图，将 $\triangle ABC$ 沿直线 AB 翻折后得到 $\triangle ABC_1$ ，再将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle AB_2C_2$ ，对于下列两个结论：

- ① “ $\triangle ABC_1$ 能绕一点旋转后与 $\triangle AB_2C_2$ 重合”；
② “ $\triangle ABC_1$ 能沿一直线翻折后与 $\triangle AB_2C_2$ 重合”的正确性是 ()



A. 结论①、②都正确

B. 结论①、②都错误

C. 结论①正确、②错误

D. 结论①错误、②正确

6. (4分) 如果四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , 且 $AO = CO$, 那么下列条件中不能判断四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是 ()

A. $OB = OD$

B. $AB \parallel CD$

C. $AB = CD$

D. $\angle ADB = \angle$

DBC

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) [在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7. (4分) 计算: 25 的平方根是_____.

8. (4分) 分解因式: $x^2 - 2x - 1 =$ _____.

9. (4分) 如果二次根式 $\sqrt{3-2x}$ 有意义, 那么 x 的取值范围是_____.

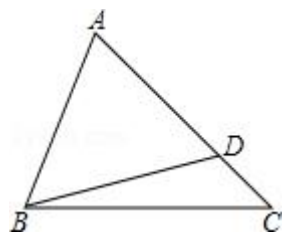
10. (4分) 关于 x 的方程 $x^2 - mx + m^2 + 1 = 0$ 的根的情况是_____.

11. (4分) 如果抛物线 $y = a(x - 1)^2 + h$ 经过 $A(0, 4)$, $B(2, m)$, 那么 m 的值是_____.

12. (4分) 某小组 8 位学生一次数学测试的分数为 121, 123, 123, 124, 126, 127, 128, 128, 那么这个小组测试分数的标准差是_____.

13. (4分) 从 3 位男同学和 2 位女同学中任选 2 人参加志愿者活动, 所选 2 人中恰好是一位男同学和一位女同学的概率是_____.

14. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, $AD = 2CD$, 如果 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BC} =$ _____.

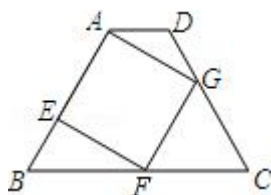


15. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 、 E 分别是边 AC 、 AB 的中点, 点 F 在边 BC 上, AF 与 DE 相交于点 G , 如果 $\angle AFB = 110^\circ$, 那么 $\angle CGF$ 的度数是_____.

16. (4分) 将关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 变形为 $x^2 = -px - q$, 就可将 x^2 表示为关于 x 的一次多项式, 从而达到“降次”的目的, 我们称这样的方法为“降次法”. 已知 $x^2 - x - 1 = 0$, 可用“降次法”求得 $x^4 - 3x - 1$ 的值是_____.

17. (4分) 如果 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A 、 B , $\odot O_1$ 的半径是 5, 点 O_1 到 AB 的距离为 3, 那么 $\odot O_2$ 的半径 r 的取值范围是_____.

18. (4分) 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 、 F 、 G 分别在边 AB 、 BC 、 CD 上, 四边形 $AEFG$ 是正方形, 如果 $\angle B = 60^\circ$, $AD = 1$, 那么 BC 的长是_____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上]

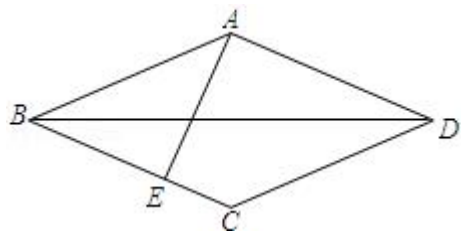
19. (10分) 化简: $(x^{\frac{1}{2}} - 1)(x^{\frac{1}{2}} + 1) + x^{-1} - x$, 并求当 $x = \sqrt{3} + 1$ 时的值.

20. (10分) 解方程: $\frac{3x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x} = 4$.

21. (10分) 已知: 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AE \perp BC$, 垂足为 E , 对角线 $BD = 4$, $\tan \angle CBD = \frac{1}{2}$. 求:

(1) 边 AB 的长;

(2) $\angle ABE$ 的正弦值.

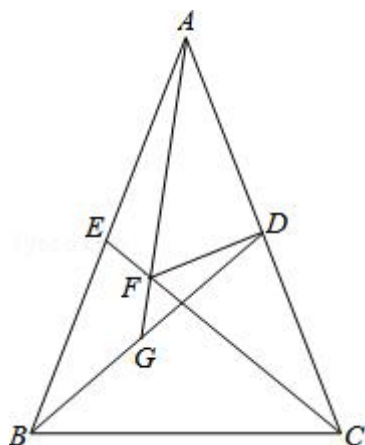


22. (10分) 小丽购买了6支水笔和3本练习本, 共用21元; 小明购买了12支水笔和5本练习本, 共用39元. 已知水笔与练习本的单价分别相同, 求水笔与练习本的单价.

23. (12分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 、 E 分别是边 AC 、 AB 的中点, $DF \perp AC$, DF 与 CE 相交于点 F , AF 的延长线与 BD 相交于点 G .

(1) 求证: $AD^2 = DG \cdot BD$;

(2) 联结 CG , 求证: $\angle ECB = \angle DCG$.

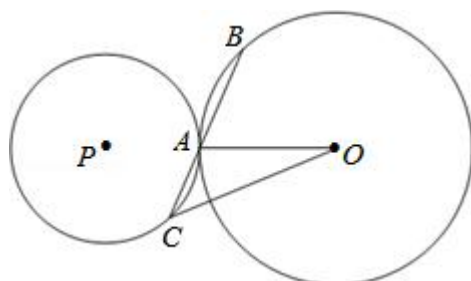


24. (12分) 已知 $\odot O$ 的半径为3, $\odot P$ 与 $\odot O$ 相切于点 A , 经过点 A 的直线与 $\odot O$ 、 $\odot P$ 分别交于点 B 、 C , $\cos \angle BAO = \frac{1}{3}$, 设 $\odot P$ 的半径为 x , 线段 OC 的长为 y .

(1) 求 AB 的长;

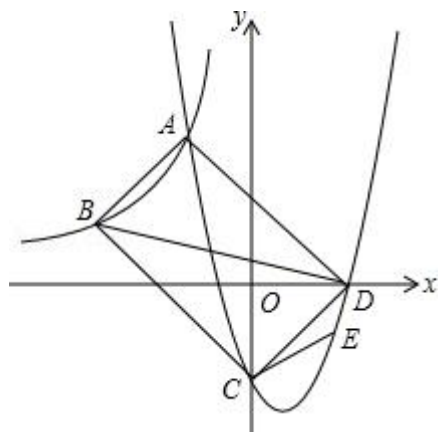
(2) 如图, 当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 外切时, 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出函数的定义域;

(3) 当 $\angle OCA = \angle OPC$ 时, 求 $\odot P$ 的半径.



25. (14分) 如图, 反比例函数的图象经过点 $A(-2, 5)$ 和点 $B(-5, p)$, $\square ABCD$ 的顶点 C 、 D 分别在 y 轴的负半轴、 x 轴的正半轴上, 二次函数的图象经过点 A 、 C 、 D .

- (1) 求直线 AB 的表达式;
- (2) 求点 C 、 D 的坐标;
- (3) 如果点 E 在第四象限的二次函数图象上, 且 $\angle DCE = \angle BDO$, 求点 E 的坐标.



2014 年上海市静安区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. (4 分) 当 $a < -2$ 时， $\sqrt{(a+2)^2}$ 等于 ()

A. $a+2$

B. $a-2$

C. $2-a$

D. $-a-2$

【考点】73：二次根式的性质与化简.

【分析】先判断出 $a+2 < 0$ ，再根据二次根式的性质化简即可.

【解答】解： $\because a < -2$,

$\therefore a+2 < 0$,

$\therefore \sqrt{(a+2)^2} = -a-2$.

故选：D.

【点评】本题考查了二次根式的性质与化简，根据 a 的取值范围判断出 $a+2 < 0$ 是解题的关键.

2. (4 分) 如果 $a < b$ ，那么下列不等式中一定正确的是 ()

A. $a-2b < -b$

B. $a^2 < ab$

C. $ab < b^2$

D. $a^2 < b^2$

【考点】C2：不等式的性质.

【分析】利用不等式的基本性质：①不等式的两边同时加上（或减去）同一个数或同一个含有字母的式子，不等号的方向不变；②不等式的两边同时乘以（或除以）同一个正数，不等号的方向不变；③不等式的两边同时乘以（或除以）同一个负数，不等号的方向改变进行分析即可.

【解答】解：A、 $a < b$ 两边同时减 $2b$ ，不等号的方向不变可得 $a-2b < -b$ ，故此选项正确；

B、 $a < b$ 两边同时乘以 a ，应说明 $a > 0$ 才得 $a^2 < ab$ ，故此选项错误；

C、 $a < b$ 两边同时乘以 b ，应说明 $b > 0$ 才得 $ab < b^2$ ，故此选项错误；

D、 $a < b$ 两边同时乘以相同的数，故此选项错误；

故选：A.

【点评】此题主要考查了不等式的基本性质，关键是要注意不等式的两边同时乘以（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．

3.（4分）已知函数 $y = (k - 1)x + k - 2$ （ k 为常数），如果 y 随着 x 的增大而减小，那么 k 的取值范围是（ ）

- A. $k > 1$ B. $k < 1$ C. $k > 2$ D. $k < 2$

【考点】F7：一次函数图象与系数的关系．

【分析】先根据函数 $y = (k - 1)x + k - 2$ ， y 随着 x 增大而减小得出关于 k 的不等式，求出 k 的取值范围即可．

【解答】解： $\because$ 函数 $y = (k - 1)x + k - 2$ 中， y 随着 x 增大而减小，
 $\therefore k - 1 < 0$ ，解得 $k < 1$ ．

故选：B．

【点评】本题考查的是正比例函数的性质，即正比例函数 $y = kx$ （ $k \neq 0$ ）中，当 $k < 0$ 时， y 随着 x 增大而减小．

4.（4分）某校九年级 200 名学生在第一学期的期末考试中数学成绩（分数都是整数）分布如表：

分数段	75 ~ 89	90 ~ 104	105 ~ 119	120 ~ 134	135 ~ 149
频率	0.1	0.15	0.25	0.35	0.15

表中每组数据含最小值和最大值，在最低分为 75 分与最高分为 149 分之间的每个分数都有学生，那么下列关于这 200 名学生成绩的说法中一定正确的是（ ）

- A. 中位数在 105 ~ 119 分数段
B. 中位数是 119.5 分
C. 中位数在 120 ~ 134 分数段
D. 众数在 120 ~ 134 分数段

【考点】V7：频数（率）分布表；W4：中位数；W5：众数．

【分析】根据中位数与众数的定义对各选项分析判断后利用排除法求解．

【解答】解：分数段位于 75 ~ 89 的人数： $200 \times 0.1 = 20$ ，
分数段位于 90 ~ 104 的人数： $200 \times 0.15 = 30$ ，
分数段位于 105 ~ 119 的人数： $200 \times 0.25 = 50$ ，

分数段位于 120 ~ 134 的人数： $200 \times 0.35 = 70$,

分数段位于 135 ~ 149 的人数： $200 \times 0.15 = 30$,

根据中位数的定义，可知中位数是位于第 100 与 101 个分数的平均数，

即中位数是 $(119+120) \div 2 = 119.5$,

根据众数的定义可知本题的众数不能确定.

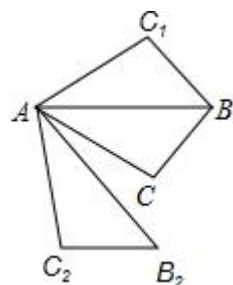
故选：B.

【点评】 本题考查读频率分布表的能力和利用统计图获取信息的能力. 同时考查中位数、众数的求法：给定 n 个数据，按从小到大排序，如果 n 为奇数，位于中间的那个数就是中位数；如果 n 为偶数，位于中间两个数的平均数就是中位数. 任何一组数据，都一定存在中位数的，但中位数不一定是这组数据中的数. 给定一组数据，出现次数最多的那个数，称为这组数据的众数.

5. (4 分) 如图，将 $\triangle ABC$ 沿直线 AB 翻折后得到 $\triangle ABC_1$ ，再将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle AB_2C_2$ ，对于下列两个结论：

① “ $\triangle ABC_1$ 能绕一点旋转后与 $\triangle AB_2C_2$ 重合”；

② “ $\triangle ABC_1$ 能沿一直线翻折后与 $\triangle AB_2C_2$ 重合” 的正确性是 ()



A. 结论①、②都正确

B. 结论①、②都错误

C. 结论①正确、②错误

D. 结论①错误、②正确

【考点】 PB：翻折变换（折叠问题）；R2：旋转的性质.

【分析】 根据旋转的性质和轴对称的性质结合图形进行判断即可得解.

【解答】 解：由图可知，① “ $\triangle ABC_1$ 不能绕一点旋转后与 $\triangle AB_2C_2$ 重合”，故本小题错误；

② “ $\triangle ABC_1$ 沿 BB_2 的垂直平分线翻折后能与 $\triangle AB_2C_2$ 重合”，故本小题正确；

综上所述，结论①错误、②正确.

故选：D.

【点评】 本题考查了旋转的性质，轴对称的性质，熟记性质并准确识图理解图形

的变化是解题的关键.

6. (4分) 如果四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , 且 $AO = CO$, 那么下列条件中不能判断四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是 ()

A. $OB = OD$ B. $AB \parallel CD$ C. $AB = CD$ D. $\angle ADB = \angle$

DBC

【考点】L6: 平行四边形的判定.

【分析】根据题目条件结合平行四边形的判定方法: 对角线互相平分的四边形是平行四边形分别进行分析即可.

【解答】解: A、加上 $BO = DO$ 可利用对角线互相平分的四边形是平行四边形, 故此选项不合题意;

B、加上条件 $AB \parallel CD$ 可证明 $\triangle AOB \cong \triangle COD$ 可得 $BO = DO$, 可利用对角线互相平分的四边形是平行四边形, 故此选项不合题意;

C、加上条件 $AB = CD$ 不能证明四边形是平行四边形, 故此选项符合题意;

D、加上条件 $\angle ADB = \angle DBC$ 可利用 ASA 证明 $\triangle AOD \cong \triangle COB$, 可证明 $BO = DO$, 可利用对角线互相平分的四边形是平行四边形, 故此选项不合题意;

故选: C.

【点评】此题主要考查了平行四边形的判定, 关键是掌握平行四边形的判定定理.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) [在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案]

7. (4分) 计算: 25 的平方根是 ± 5 .

【考点】21: 平方根.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据平方根的定义, 结合 $(\pm 5)^2 = 25$ 即可得出答案.

【解答】解: $\because (\pm 5)^2 = 25$

$\therefore 25$ 的平方根 ± 5 .

故答案为: ± 5 .

【点评】本题考查了平方根的知识, 属于基础题, 解答本题的关键是掌握平方根的定义, 注意一个正数的平方根有两个且互为相反数.

8. (4分) 分解因式: $x^2 - 2x - 1 = \underline{(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})}$.

【考点】58：实数范围内分解因式.

【专题】11：计算题.

【分析】先令 $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，解得 $x = 1 \pm \sqrt{2}$ ，即可对所给代数式因式分解.

【解答】解：先令 $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，

解得 $x = 1 \pm \sqrt{2}$ ，

$$\therefore x^2 - 2x - 1 = [x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})] = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}).$$

故答案是 $(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$.

【点评】本题考查了解因式. 解题的关键是利用公式法求一元二方程的根.

9. (4分) 如果二次根式 $\sqrt{3-2x}$ 有意义，那么 x 的取值范围是 $x \leq \frac{3}{2}$.

【考点】72：二次根式有意义的条件.

【分析】二次根式的被开方数是非负数.

【解答】解：依题意，得

$$3 - 2x \geq 0,$$

$$\text{解得 } x \leq \frac{3}{2}.$$

故答案是： $x \leq \frac{3}{2}$.

【点评】考查了二次根式的意义和性质. 概念：式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 叫二次根式. 性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义.

10. (4分) 关于 x 的方程 $x^2 - mx + m^2 + 1 = 0$ 的根的情况是 无实数根.

【考点】AA：根的判别式.

【分析】根据题意先求出 $\Delta = b^2 - 4ac = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (m^2 + 1)$ ，再判断出 Δ 的符号，即可得出答案.

【解答】解： $\because \Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (m^2 + 1) = m^2 - 4m^2 - 4 = -3m^2 - 4 < 0$ ，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $x^2 - mx + m^2 + 1 = 0$ 的根的情况是无实数根；

故答案为：无实数根.

【点评】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ：当 $\Delta > 0$ ，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根.

11. (4分) 如果抛物线 $y = a(x - 1)^2 + h$ 经过 $A(0, 4)$ ， $B(2, m)$ ，那么 m 的

值是 4 .

【考点】 H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 先求出抛物线的对称轴, 再根据二次函数的对称性解答.

【解答】 解: $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 点 A 、 B 关于对称轴对称,

$\therefore m = 4$.

故答案为: 4.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征, 求出对称轴并观察出点 A 、 B 关于对称轴对称是解题的关键.

12. (4 分) 某小组 8 位学生一次数学测试的分数为 121, 123, 123, 124, 126, 127, 128, 128, 那么这个小组测试分数的标准差是 $\sqrt{6}$.

【考点】 W8: 标准差.

【分析】 先求出 8 个人的成绩的平均数, 再求出方差, 然后求出方差的算术平方根即可.

【解答】 解: 平均数 $= (121 + 123 + 123 + 124 + 126 + 127 + 128 + 128) \div 8 = 125$,

方差 $S^2 = \frac{1}{8} [(121 - 125)^2 + (123 - 125)^2 + (123 - 125)^2 + (124 - 125)^2 + (126 - 125)^2 + (127 - 125)^2 + (128 - 125)^2 + (128 - 125)^2]$,

$= \frac{1}{8} \times 48$,

$= 6$,

所以标准差 $S = \sqrt{6}$,

故答案为: $\sqrt{6}$.

【点评】 本题考查了标准差的计算, 主要利用了平均数, 方差的计算公式, 还需明确标准差即方差的算术平方根.

13. (4 分) 从 3 位男同学和 2 位女同学中任选 2 人参加志愿者活动, 所选 2 人中恰好是一位男同学和一位女同学的概率是 $\frac{3}{5}$.

【考点】 X6: 列表法与树状图法.

【分析】 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与所选 2 人中恰好是一位男同学和一位女同学的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

【解答】解：画树状图：



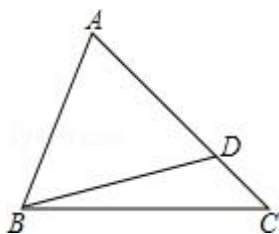
∴共有 20 种等可能的结果，所选 2 人中恰好是一位男同学和一位女同学的有 12 种情况，

∴所选 2 人中恰好是一位男同学和一位女同学的概率是： $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

故答案为： $\frac{3}{5}$.

【点评】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

14. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上， $AD = 2CD$ ，如果 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BC} = \frac{3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}}{2}$.



【考点】LM：*平面向量．

【分析】由 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ，利用三角形法则，可求得 $\overrightarrow{AD}$ 的长，又由在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上， $AD = 2CD$ ，即可求得 $\overrightarrow{AC}$ 的长，再利用三角形法则求解即可求得答案．

【解答】解：∵ $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\because AD = 2CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}(\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{a}.$$

故答案为: $\frac{3}{2}\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{a}$.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意掌握三角形法则的应用, 注意掌握数形结合思想的应用.

15. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 、 E 分别是边 AC 、 AB 的中点, 点 F 在边 BC 上, AF 与 DE 相交于点 G , 如果 $\angle AFB = 110^\circ$, 那么 $\angle CGF$ 的度数是 40° .

【考点】KP: 直角三角形斜边上的中线; KX: 三角形中位线定理.

【分析】作出图形, 根据邻补角的定义求出 $\angle AFC$, 再判断出点 G 是 AF 的中点, 再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $CG = GF$, 然后根据等腰三角形两底角相等列式计算即可得解.

【解答】解: $\because \angle AFB = 110^\circ$,

$$\therefore \angle AFC = 180^\circ - \angle AFB = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ,$$

$\because$ 点 D 、 E 分别是边 AC 、 AB 的中点,

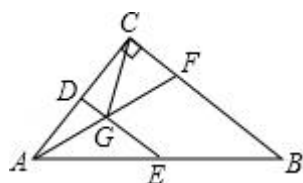
$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore$ 点 G 是 AF 的中点,

$\therefore CG = GF$,

$$\therefore \angle CGF = 180^\circ - 2\angle AFC = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ.$$

故答案为: 40° .



【点评】本题考查了三角形的中位线定理, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质, 等腰三角形的性质, 熟记各性质与定理是解题的关键, 作出图形更形象直观.

16. (4分) 将关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 变形为 $x^2 = -px - q$, 就可将 x^2 表示为关于 x 的一次多项式, 从而达到“降次”的目的, 我们称这样的方法为“降次法”. 已知 $x^2 - x - 1 = 0$, 可用“降次法”求得 $x^4 - 3x - 1$ 的值是

1.

【考点】A3：一元二次方程的解.

【分析】先求得 $x^2 = x+1$ ，再代入 $x^4 - 3x - 1$ 即可得出答案.

【解答】解： $\because x^2 - x - 1 = 0$,

$$\therefore x^2 = x+1,$$

$$\therefore x^4 - 3x - 1 = (x+1)^2 - 3x - 1$$

$$= x^2 + 2x + 1 - 3x - 1$$

$$= x^2 - x$$

$$= x+1 - x$$

$$= 1,$$

故答案为 1.

【点评】本题考查了一元二次方程的解，将四次先降为二次，再将二次降为一次.

17. (4 分) 如果 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A 、 B ， $\odot O_1$ 的半径是 5，点 O_1 到 AB 的距离为 3，那么 $\odot O_2$ 的半径 r 的取值范围是 $r \geq 4$.

【考点】ML：相交两圆的性质.

【分析】根据题意画出图形，利用 AB 为直径时，进而得出 $\odot O_2$ 的半径 r 最小值，即可得出答案.

【解答】解：如图所示：当 AB 为 O_2 的直径， $O_1O_2 \perp AB$,

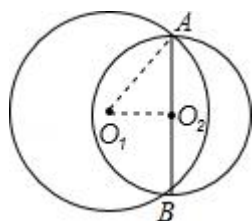
$\odot O_1$ 的半径是 5，点 O_1 到 AB 的距离为 3，

$$\therefore AO_2 = 4,$$

此时 $\odot O_2$ 的半径 r 最小为 4，

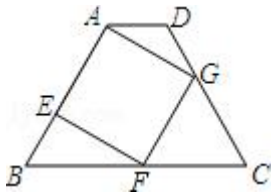
$$\therefore \odot O_2 \text{ 的半径 } r \text{ 的取值范围是： } r \geq 4.$$

故答案为： $r \geq 4$.



【点评】此题主要考查了相交两圆的性质，得出 $\odot O_2$ 的半径 r 的最小值是解题关键.

18. (4分) 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 、 F 、 G 分别在边 AB 、 BC 、 CD 上, 四边形 $AEFG$ 是正方形, 如果 $\angle B = 60^\circ$, $AD = 1$, 那么 BC 的长是 $2 + \sqrt{3}$.



【考点】 KM: 等边三角形的判定与性质; LE: 正方形的性质; LJ: 等腰梯形的性质.

【分析】 过点 D 作 $DN \perp AG$ 于点 N , 利用等腰梯形的性质以及正方形的性质得出 AN 以及 AG 的长, 再利用锐角三角函数关系得出 BF 的长, 再利用等边三角形的判定得出 FC 的长, 即可得出答案.

【解答】 解: 过点 D 作 $DN \perp AG$ 于点 N ,

$\because$ 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 60^\circ$, $AD = 1$,

$\therefore \angle C = 60^\circ$, $\angle BAD = 120^\circ$, $\angle ADC = 120^\circ$,

$\because$ 四边形 $AEFG$ 是正方形,

$\therefore \angle BAG = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAG = 30^\circ$,

$\therefore \angle DGA = 30^\circ$,

$\because DN \perp AG$, $\therefore AN = NG$,

$\therefore AD = DG = 1$, $DN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}$,

$\therefore AN = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore AG = AE = EF = FG = \sqrt{3}$,

$\therefore BF = \frac{EF}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$,

$\because \angle FGA = 90^\circ$, $\angle AGD = 30^\circ$,

$\therefore \angle FGC = 60^\circ$,

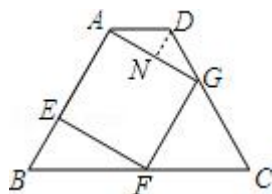
又 $\because \angle C = 60^\circ$,

$\therefore \triangle FGC$ 是等边三角形,

$$\therefore FC = FG = \sqrt{3},$$

$$\therefore BC = BF + FC = 2 + \sqrt{3}.$$

故答案为: $2 + \sqrt{3}$.



【点评】此题主要考查了等腰梯形的性质以及正方形的性质、勾股定理以及锐角三角函数关系等知识，得出 EF 的长是解题关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分) [将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上]

19. (10 分) 化简: $(x^{\frac{1}{2}} - 1)(x^{\frac{1}{2}} + 1) + x^{-1} - x$, 并求当 $x = \sqrt{3} + 1$ 时的值.

【考点】 2F: 分数指数幂; 7A: 二次根式的化简求值.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据平方差公式和负整数指数幂的意义得到原式 $= (\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}})^2 - 1 + \frac{1}{x} - x$
 $= x - 1 + \frac{1}{x} - x$, 然后合并后通分, 再把 x 的值代入后进行分母有理化即可.

【解答】 解: 原式 $= (\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}})^2 - 1 + \frac{1}{x} - x$

$$= x - 1 + \frac{1}{x} - x$$

$$= \frac{1}{x} - 1$$

$$= \frac{1-x}{x},$$

$$\text{当 } x = \sqrt{3} + 1 \text{ 时, 原式} = \frac{1 - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 3}{2}.$$

【点评】 本题考查了二次根式的化简求值: 一定要先化简再代入求值. 二次根式运算的最后, 注意结果要化到最简二次根式, 二次根式的乘除运算要与加减运算区分, 避免互相干扰. 也考查了分数指数幂.

20. (10 分) 解方程: $\frac{3x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{x} = 4$.

【考点】B4：换元法解分式方程.

【分析】可根据方程特点设 $y = \frac{x}{x-1}$ ，则原方程可化为 $y^2 - 4y + 3 = 0$. 解一元二次

方程求 y ，再求 x .

【解答】解：设 $y = \frac{x^2+1}{x}$,

得： $\frac{3}{y} + y = 4$,

$$y^2 - 4y + 3 = 0,$$

解得 $y_1 = 1$, $y_2 = 3$.

当 $y_1 = 1$ 时, $\frac{x^2+1}{x} = 1$, $x^2 - x + 1 = 0$, 此方程没有实数解.

当 $y_2 = 3$ 时, $\frac{x^2+1}{x} = 3$, $x^2 - 3x + 1 = 0$, 解得 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

经检验 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 都是原方程的根,

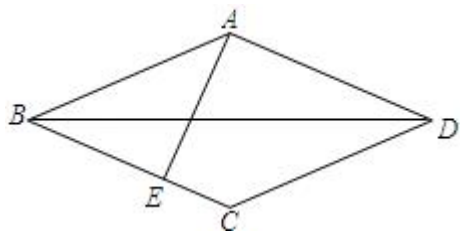
所以原方程的根是 $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

【点评】本题考查用换元法解分式方程的能力. 用换元法解一些复杂的分式方程是比较简单的一种方法, 根据方程特点设出相应未知数, 解方程能够使问题简单化, 注意求出方程解后要验根.

21. (10分) 已知: 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AE \perp BC$, 垂足为 E , 对角线 $BD = 4$, $\tan \angle CBD = \frac{1}{2}$. 求:

(1) 边 AB 的长;

(2) $\angle ABE$ 的正弦值.



【考点】L8：菱形的性质；T7：解直角三角形.

【分析】(1) 首先连接 AC , AC 与 BD 相交于点 O , 由四边形 $ABCD$ 是菱形, 可得 $AC \perp BD$, $BO = \frac{1}{2}BD = 2$, 又由 $\tan \angle CBD = \frac{1}{2}$, 可求得 OC 的长, 然后由勾股定理求得边 AB 的长;

(2) 由 $AE \perp BC$, 利用 $S_{\text{菱形}ABCD} = BC \cdot AE = \frac{1}{2}BD \cdot AC$, 即可求得 AE 的长, 继而求得 $\angle ABE$ 的正弦值.

【解答】 解: (1) 连接 AC , AC 与 BD 相交于点 O ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, BO = \frac{1}{2}BD = 2,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BOC \text{ 中, } \tan \angle CBD = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OC = 1,$$

$$\therefore AB = BC = \sqrt{BO^2 + OC^2} = \sqrt{5};$$

$$(2) \because AE \perp BC,$$

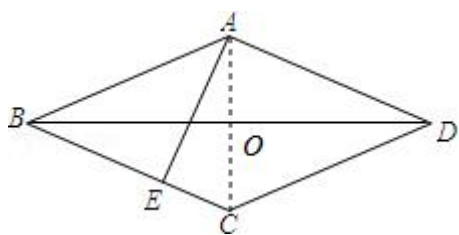
$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = BC \cdot AE = \frac{1}{2}BD \cdot AC,$$

$$\therefore AC = 2OC = 2,$$

$$\therefore \sqrt{5}AE = \frac{1}{2} \times 2 \times 4,$$

$$\therefore AE = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \sin \angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{4}{5}.$$



【点评】 此题考查了菱形的性质、勾股定理以及三角函数等知识. 此题难度适中, 注意掌握辅助线的作法, 注意掌握数形结合思想的应用.

22. (10 分) 小丽购买了 6 支水笔和 3 本练习本, 共用 21 元; 小明购买了 12 支水笔和 5 本练习本, 共用 39 元. 已知水笔与练习本的单价分别相同, 求水笔与练习本的单价.

【考点】 9A: 二元一次方程组的应用.

【分析】 设水笔与练习本的单价分别为 x 元、 y 元, 根据买 6 支水笔和 3 本练习本, 共用 21 元; 买 12 支水笔和 5 本练习本, 共用 39 元, 列方程组求解.

【解答】解：设水笔与练习本的单价分别为 x 元、 y 元，

由题意得，
$$\begin{cases} 6x+3y=21 \\ 12x+5y=39 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

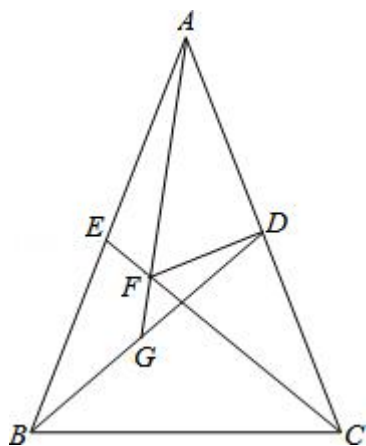
答：水笔与练习本的单价分别是 2 元与 3 元。

【点评】本题考查了二元一次方程组的应用，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系，列方程组求解。

23. (12 分) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 、 E 分别是边 AC 、 AB 的中点， $DF \perp AC$ ， DF 与 CE 相交于点 F ， AF 的延长线与 BD 相交于点 G 。

(1) 求证： $AD^2 = DG \cdot BD$ ；

(2) 联结 CG ，求证： $\angle ECB = \angle DCG$ 。



【考点】KD：全等三角形的判定与性质；KH：等腰三角形的性质；S9：相似三角形的判定与性质。

【专题】14：证明题。

【分析】(1) 根据已知求出 $AD = AE$ ，根据 SAS 证出 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ ，得出 $\angle ABD = \angle ACE$ ，再根据 $DF \perp AC$ ， $AD = CD$ ，得出 $AF = CF$ ， $\angle GAD = \angle ACE$ ，从而得出 $\angle GAD = \angle ABD$ ，再根据 AA 证出 $\triangle GDA \sim \triangle ADB$ ，得出 $\frac{AD}{DB} = \frac{DG}{AD}$ ，即可得出 $AD^2 = DG \cdot BD$ ；

(2) 在 (1) 的基础上证明 $\triangle DCG \sim \triangle DBC$ ，根据相似三角形的性质可以得到相应的答案。

【解答】证明：(1) $\because AB = AC$ ， $AD = \frac{1}{2}AC$ ， $AE = \frac{1}{2}AB$ ，

$\therefore AD = AE$ ，

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAD=\angle CAE, \\ AD=AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE.$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\because DF \perp AC, AD = CD,$$

$$\therefore AF = CF,$$

$$\therefore \angle GAD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle GAD = \angle ABD.$$

$$\because \angle GDA = \angle ADB,$$

$$\therefore \triangle GDA \sim \triangle ADB.$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{DG}{AD},$$

$$\therefore AD^2 = DG \cdot BD.$$

(2) 证明:

$$\because \frac{AD}{DB} = \frac{DG}{AD}, AD = CD,$$

$$\therefore \frac{CD}{DB} = \frac{DG}{CD}.$$

$$\because \angle CDG = \angle BDC,$$

$$\therefore \triangle DCG \sim \triangle DBC.$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCG.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB.$$

$$\because \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle DBC = \angle DCG,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle DCG.$$

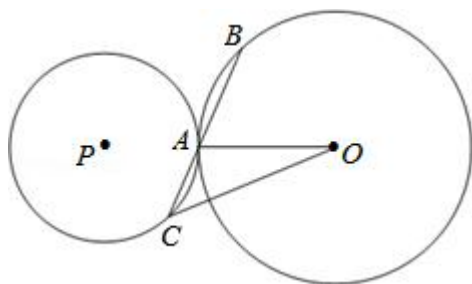
【点评】此题考查了相似形的综合,用到的知识点是相似三角形和全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质,解题的关键是找出相似三角形,利用相似三角形的性质求解.

24. (12分) 已知 $\odot O$ 的半径为3, $\odot P$ 与 $\odot O$ 相切于点 A , 经过点 A 的直线与 $\odot O$ 、 $\odot P$ 分别交于点 B 、 C , $\cos \angle BAO = \frac{1}{3}$, 设 $\odot P$ 的半径为 x , 线段 OC 的长为 y .

(1) 求 AB 的长;

(2) 如图, 当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 外切时, 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出函数的定义域;

(3) 当 $\angle OCA = \angle OPC$ 时, 求 $\odot P$ 的半径.



【考点】MR: 圆的综合题.

【分析】(1) 利用 $\cos \angle BAO = \frac{AD}{OA} = \frac{1}{3}$, 得出 $AB = 2AD$ 进而得出答案;

(2) 首先得出 $PC \parallel OB$, 进而求出 $\frac{AC}{AB} = \frac{PA}{AO}$, 得出 OC 与 x 的函数关系式即可;

(3) 当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 外切时, 根据 $\angle BOA = \angle OCA$, $\angle CAO = \angle POC$, 则 $\triangle OAC \sim \triangle OCP$, 得出 $\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OP}$.

【解答】解: (1) 在 $\odot O$ 中, 作 $OD \perp AB$, 垂足为 D ,

在 $\text{Rt} \triangle OAD$ 中, $\cos \angle BAO = \frac{AD}{OA} = \frac{1}{3}$,

$$\therefore AD = \frac{1}{3}AO = 1,$$

$$\therefore BD = AD = 1,$$

$$\therefore AB = 2AD = 2.$$

(2) 连接 OB 、 PA 、 PC ,

$\because \odot P$ 与 $\odot O$ 相切于点 A ,

$\therefore$ 点 P 、 A 、 O 在一直线上.

$\because PC = PA$, $OA = OB$,

$\therefore \angle PCA = \angle PAC = \angle OAB = \angle OBA$,

$$\therefore PC \parallel OB.$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{PA}{AO},$$

$$\therefore AC = \frac{PA \cdot AB}{AC} = \frac{2x}{3},$$

$$\because OD^2 = OA^2 - AD^2 = 3^2 - 1^2 = 8, \quad CD = AD + AC = \frac{2}{3}x + 1,$$

$$\therefore OC = \sqrt{OD^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}x + 1\right)^2 + 8},$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}\sqrt{4x^2 + 12x + 81}, \quad (\text{定义域为 } x > 0).$$

(3) 当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 外切时,

$$\because \angle BOA = \angle OCA, \quad \angle CAO = \angle POC,$$

$$\therefore \triangle OAC \sim \triangle OCP.$$

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OP},$$

$$\therefore OC^2 = OA \cdot OP,$$

$$\therefore \frac{1}{9} (4x^2 + 12x + 81) = 3(3 + x),$$

$$\therefore x_1 = 0 \quad (\text{不符合题意, 舍去}), \quad x_2 = \frac{15}{4},$$

$$\therefore \text{这时 } \odot P \text{ 的半径为 } \frac{15}{4},$$

如图: 当 $\odot P$ 与 $\odot O$ 内切时,

$$\triangle CAO \sim \triangle PAC,$$

$$\therefore \frac{AC}{PA} = \frac{AO}{AC},$$

$$\therefore \frac{\frac{2}{3}x}{x} = \frac{3}{\frac{2}{3}x}$$

$$\text{解得: } x = \frac{27}{4}$$

$$\therefore \text{这时 } \odot P \text{ 的半径为 } \frac{27}{4},$$

$$\therefore \odot P \text{ 的半径为 } \frac{15}{4} \text{ 或 } \frac{27}{4}.$$

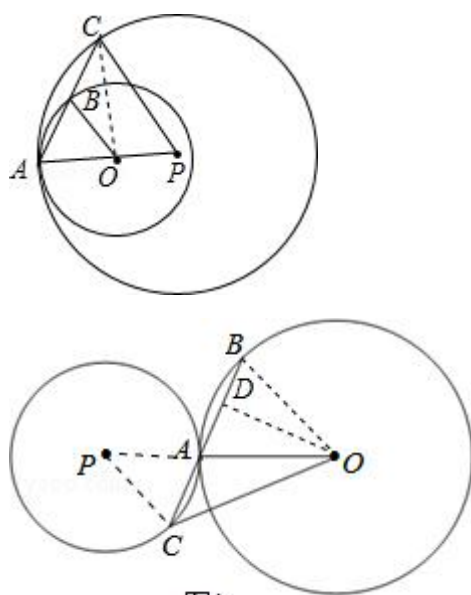


图1

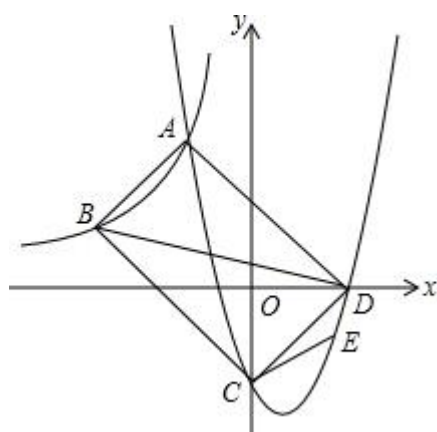
【点评】此题主要考查了圆的综合以及相似三角形的判定与性质和勾股定理等知识，利用分类讨论得出是解题关键．

25. (14分) 如图，反比例函数的图象经过点 $A(-2, 5)$ 和点 $B(-5, p)$ ， $\square ABCD$ 的顶点 C 、 D 分别在 y 轴的负半轴、 x 轴的正半轴上，二次函数的图象经过点 A 、 C 、 D ．

(1) 求直线 AB 的表达式；

(2) 求点 C 、 D 的坐标；

(3) 如果点 E 在第四象限的二次函数图象上，且 $\angle DCE = \angle BDO$ ，求点 E 的坐标．



【考点】HF：二次函数综合题．

【分析】(1) 设反比例函数的解析式为 $\frac{k}{x}$ ．由 A 的坐标可求出 k 的值， B 的横坐标已知，所以可求出纵坐标，设直线 AB 的表达式为 $y = mx + n$ ，分别把 A 、 B

坐标代入求出 m 和 n 的值即可；

(2) 由 $\square ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 可设 CD 的表达式为 $y = x + c$, 根据平行四边形的性质: 对边相等即可求出 c 的值;

(3) 设二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx - 3$, 由已知条件易求 a 和 b 的值, 作 $EF \perp y$ 轴, $BG \perp y$ 轴, 垂足分别为 F 、 G . 设 $CF = 3t$, 则 $EF = 5t$, $OF = 3 - 3t$, 代入抛物线的解析式求出 t 的值即可.

【解答】 解: (1) 设反比例函数的解析式为 $\frac{k}{x}$.

$\because$ 它图象经过点 $A(-2, 5)$ 和点 $B(-5, p)$,

$$\therefore 5 = \frac{k}{-2},$$

$$\therefore k = -10,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = -\frac{10}{x}.$$

$$\therefore p = -\frac{10}{-5} = 2,$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-5, 2)$.

设直线 AB 的表达式为 $y = mx + n$,

$$\text{则 } \begin{cases} 5 = -2m + n, \\ 2 = -5m + n \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = 1, \\ n = 7 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y = x + 7$;

(2) 由 $\square ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 设 CD 的表达式为 $y = x + c$,

$$\therefore C(0, c), D(-c, 0),$$

$$\because CD = AB,$$

$$\therefore CD^2 = AB^2$$

$$\therefore c^2 + c^2 = (-5 + 2)^2 + (2 - 5)^2,$$

$$\therefore c = -3,$$

$\therefore$ 点 C 、 D 的坐标分别是 $(0, -3)$ 、 $(3, 0)$;

(3) 设二次函数的解析式为 $y = ax^2 + bx - 3$, 二次函数的图象经过点 A 、 D .

$$\therefore \begin{cases} 5 = 4a - 2b - 3, \\ 0 = 9a + 3b - 3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 1, \\ b = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

作 $EF \perp y$ 轴, $BG \perp y$ 轴, 垂足分别为 F 、 G .

$\because OC = OD, BG = CG,$

$\therefore \angle BCG = \angle OCD = \angle ODC = 45^\circ$.

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle DCE = \angle BDO,$

$\therefore \angle ECF = \angle BDC,$

$$\therefore \tan \angle ECF = \tan \angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{(0+5)^2 + (3+2)^2}}{\sqrt{(3-0)^2 + (0+3)^2}} = \frac{5}{3},$$

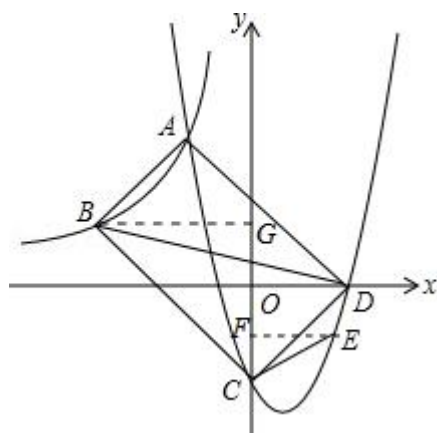
设 $CF = 3t$, 则 $EF = 5t$, $OF = 3 - 3t$,

$\therefore$ 点 $E(5t, 3t - 3)$,

$\therefore 3t - 3 = 25t^2 - 10t - 3$,

$\therefore t = 0$ (舍) 或 $\frac{13}{25}$,

$\therefore$ 点 $E(\frac{13}{5}, -\frac{36}{25})$.



【点评】 此题考查了待定系数法求反比例函数、一次函数、二次函数的解析式、直角三角形的判定和性质、平行四边形的判定和性质、等腰三角形的判定和性质以及锐角三角形的运用和两点间的距离公式的运用. 此题难度较大, 注意掌握方程思想与数形结合思想的应用.