

2014 年上海市长宁区中考数学二模试卷

一、单项选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$, 则 $\sin B$ 的值是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 2

2. (4 分) 计算 $(-x^3)^2$ 的结果是 ()

- A. x^5 B. x^6 C. $-x^5$ D. $-x^6$

3. (4 分) 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{9x}$ B. $\sqrt{x^2-3}$ C. $\sqrt{\frac{x-y}{x}}$ D. $\sqrt{3a^2b}$

4. (4 分) 若 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (其中点 A 和 A_1 、 B 和 B_1 、 C 和 C_1 分别对应), 且 $AB = 4$, $A_1B_1 = 6$, 则 $\triangle ABC$ 的周长和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长之比是 ()

- A. 9: 4 B. 4: 9 C. 2: 3 D. 3: 2

5. (4 分) 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A. 平行四边形 B. 正五边形 C. 圆 D. 等边三角形

6. (4 分) 下列函数中, y 的值随着 x 逐渐增大而减小的是 ()

- A. $y = 2x$ B. $y = x^2$ C. $y = -\frac{2}{x}$ D. $y = \frac{2}{x} (x > 0)$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 函数 $y = \sqrt{x-3}$ 的定义域是_____.

8. (4 分) 分解因式: $x^2y^2 - 9 =$ _____.

9. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} 3x-1 < 2x \\ -5x \geq 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

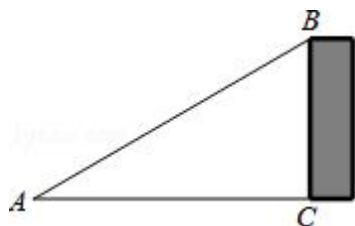
10. (4 分) 用换元法解方程 $\frac{x^2+1}{x} - \frac{3x}{x^2+1} = 2$, 若设 $y = \frac{x^2+1}{x}$, 则原方程可化为

关于 y 的整式方程是_____.

11. (4 分) 若抛物线 $y = 2x^2 - 2ax + 5$ 的顶点在直线 $x = 1$ 上, 则实数 $a =$ _____.

12. (4 分) 小红、小芳做游戏时约定用“石头、剪刀、布”的方式确定游戏的先后顺序, 问两个人都出“石头”的概率是_____.

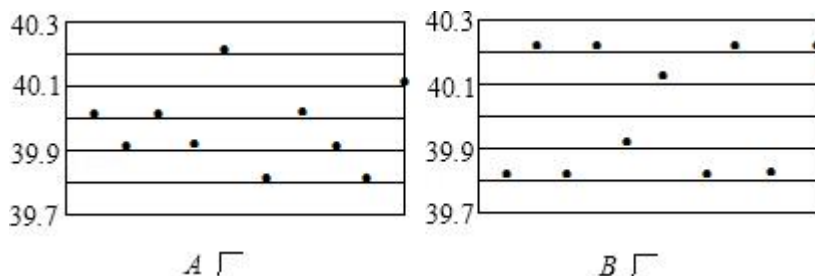
13. (4 分) 如图, 若某人在距离大厦 BC 底端 C 处 200 米远的 A 地测得塔顶 B 的仰角是 30° , 则塔高 $BC \approx$ _____米. ($\sqrt{3} \approx 1.732$, 精确到 0.1 米)



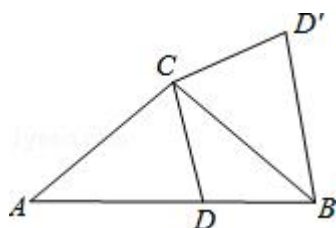
14. (4分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的长度相等且方向相反, 若 $\vec{a} = k\vec{b}$, 则 k = _____.

15. (4分) 在 $\odot O$ 中, 弦 $AB = 8\text{cm}$, 弦心距 $OC = 3\text{cm}$, 则该圆的半径为 _____ cm .

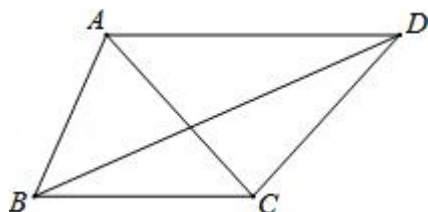
16. (4分) 质检部门从 A 、 B 两厂生产的乒乓球中各抽取了 10 个, 检测它们的直径 (单位: mm), 并将有关数据绘制成下图, 若所测两组数据的方差分别是 S_A^2 、 S_B^2 , 则 S_A^2 _____ S_B^2 . (填 “>、< 或 =”)



17. (4分) 如图, 点 D 是等腰 $\triangle ABC$ 的底边 AB 上的点, 若 $AC = BC$ 且 $\angle ACB = 100^\circ$, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 逆时针旋转, 使它与 $\triangle BCD'$ 重合, 则 $\angle D'BA$ = _____ 度.



18. (4分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 若 $AD \parallel BC$, $BC = CD = AC = 6$, $AB = 3\sqrt{2}$, 则 BD 长为 _____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

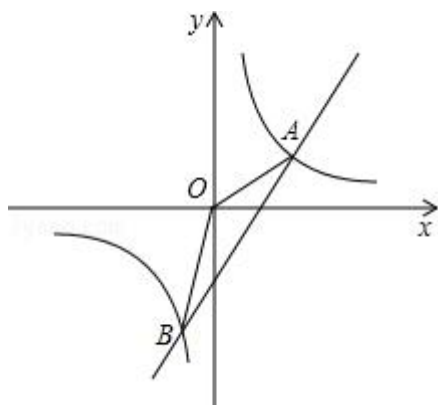
19. (10分) 计算: $2\sin 45^\circ + |1 - \sqrt{2}| - \sqrt{8} - (-1)^{2014}$.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

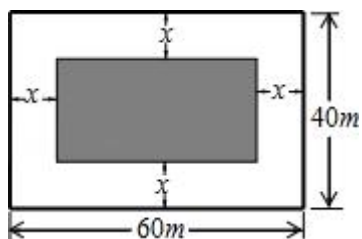
21. (10 分) 如图, 一次函数 $y = ax - 1$ ($a \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象相交于 A 、 B 两点且点 A 的坐标为 $(2, 1)$, 点 B 的坐标 $(-1, n)$.

(1) 分别求两个函数的解析式;

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.



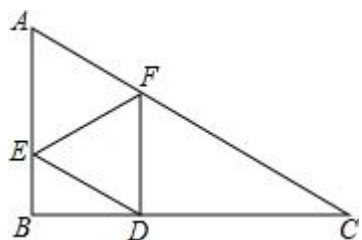
22. (10 分) 如图, 为了给小区居民增加锻炼场所, 物业拟在一宽为 40 米、长为 60 米的矩形区域内的四周修建宽度相同的鹅卵石小路, 阴影部分用作绿化. 当阴影部分面积为 800 平方米时, 小路宽 x 为多少米.



23. (12 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, 点 D 、 E 、 F 分别在边 BC 、 AB 、 AC 上, 联结 DE 、 EF 、 FD , 若 $BE = \frac{1}{2}ED$, 且 $FD \perp BC$.

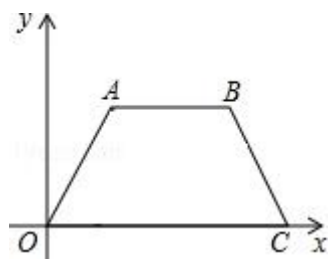
(1) 求证: 四边形 $AEDF$ 是平行四边形;

(2) 若 $AC = 3AE$, 求证: 四边形 $AEDF$ 是菱形.



24. (12分) 如图, 在直角坐标平面内, 四边形 $OABC$ 是等腰梯形, 其中 $OA = AB = BC = 4$, $\tan \angle BCO = \sqrt{3}$.

- (1) 求经过 O 、 B 、 C 三点的二次函数解析式;
- (2) 若点 P 在第四象限, 且 $\triangle POC \sim \triangle AOB$ 相似, 求满足条件的所有点 P 的坐标;
- (3) 在 (2) 的条件下, 若 $\odot P$ 与以 OC 为直径的 $\odot D$ 相切, 请直接写出 $\odot P$ 的半径.



25. (14分) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BA = BC$, 点 P 在边 AB 上, 联结 CP , 以 PA 、 PC 为邻边作平行四边形 $APCD$, AC 与 PD 交于点 E , $\angle ABC = \angle AEP = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

- (1) 如图 (1), 求证: $\angle EAP = \angle EPA$;
- (2) 如图 (2), 若点 F 是 BC 中点, 点 M 、 N 分别在 PA 、 FP 延长线上, 且 $\angle MEN = \angle AEP$, 判断 EM 和 EN 之间的数量关系, 并说明理由.
- (3) 如图 (3), 若 $DC = 1$, $CP = 3$, 在线段 CP 上任取一点 Q , 联结 DQ , 将 $\triangle DCQ$ 沿直线 DQ 翻折, 点 C 落在四边形 $APCD$ 外的点 C' 处, 设 $CQ = x$, $\triangle DC'Q$ 与四边形 $APCD$ 重合部分的面积为 y , 写出 y 与 x 的函数关系式及定义域.

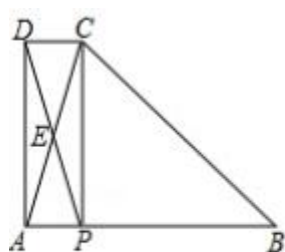


图 (1)

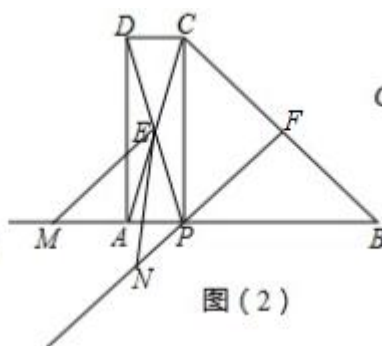


图 (2)

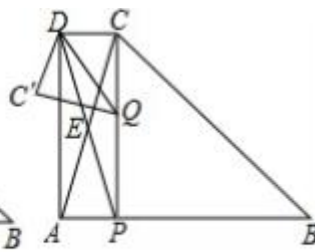


图 (3)

2014 年上海市长宁区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AC = 1$ ，则 $\sin B$ 的值是（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 2

【考点】T5：特殊角的三角函数值.

【分析】根据三角函数的定义解答即可.

【解答】解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AC = 1$ ，

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

故选：A.

【点评】本题考查了在三角形中角的正弦值等于对边比斜边的概念.

2.（4 分）计算 $(-x^3)^2$ 的结果是（ ）

- A. x^5 B. x^6 C. $-x^5$ D. $-x^6$

【考点】47：幂的乘方与积的乘方.

【分析】根据积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘；
幂的乘方，底数不变指数相乘计算后选取答案.

【解答】解： $(-x^3)^2 = (-1)^2 \cdot (x^3)^2 = x^6$.

故选：B.

【点评】本题考查了积的乘方和幂的乘方的性质，熟练掌握性质是解题的关键.

3.（4 分）下列二次根式中，最简二次根式是（ ）

- A. $\sqrt{9x}$ B. $\sqrt{x^2-3}$ C. $\sqrt{\frac{x-y}{x}}$ D. $\sqrt{3a^2b}$

【考点】74：最简二次根式.

【分析】判定一个二次根式是不是最简二次根式的方法，就是逐个检查最简二次根式的两个条件是否同时满足，同时满足的就是最简二次根式，否则就不是.

【解答】解：A、 $\sqrt{9x} = \sqrt{x \times 3^2} = 3\sqrt{x}$ ，可化简；

$$C、\sqrt{\frac{x-y}{x}} = \sqrt{\frac{x(x-y)}{x \times x}} = \frac{\sqrt{x^2-xy}}{|x|}, \text{ 可化简；}$$

D 、 $\sqrt{3a^2b} = |a|\sqrt{3b}$ ，可化简；

因此只有 B 是最简二次根式．

故选： B ．

【点评】 在判断最简二次根式的过程中要注意：

(1) 在二次根式的被开方数中，只要含有分数或小数，就不是最简二次根式；

(2) 在二次根式的被开方数中的每一个因式（或因数），如果幂的指数大于或等于 2，也不是最简二次根式．

4. (4 分) 若 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ （其中点 A 和 A_1 、 B 和 B_1 、 C 和 C_1 分别对应），且 $AB = 4$ ， $A_1B_1 = 6$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长之比是（ ）

A. 9: 4 B. 4: 9 C. 2: 3 D. 3: 2

【考点】 S7: 相似三角形的性质．

【分析】 根据相似三角形周长的比等于相似比解答．

【解答】 解： $\because \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长之比 $= AB: A_1B_1 = 4: 6 = 2: 3$ ．

故选： C ．

【点评】 本题考查了相似三角形的性质，熟记性质是解题的关键．

5. (4 分) 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）

A. 平行四边形 B. 正五边形 C. 圆 D. 等边三角形

【考点】 P3: 轴对称图形；R5: 中心对称图形．

【分析】 根据轴对称图形和中心对称图形的概念求解．

【解答】 解： A 、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误；

B 、是轴对称图形，不是中心对称图形．故本选项错误；

C 、是轴对称图形，也是中心对称图形．故本选项正确；

D 、是轴对称图形，不是中心对称图形．故本选项错误．

故选： C ．

【点评】 本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念．轴对称图形：如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形；中心对称图形：在同一平面内，如果把一个图形绕某一点旋转 180° ，旋转后的图形能和原图形完全重合，那么这个图形就叫做中心对称图形．

6. (4分) 下列函数中, y 的值随着 x 逐渐增大而减小的是 ()

- A. $y = 2x$ B. $y = x^2$ C. $y = -\frac{2}{x}$ D. $y = \frac{2}{x} (x > 0)$

【考点】 F6: 正比例函数的性质; G4: 反比例函数的性质; H3: 二次函数的性质.

【分析】 反比例函数、二次函数的增减性都有限制条件 (即范围), 一次函数当一次项系数为负数时, y 随着 x 增大而减小.

【解答】 解: A、函数 $y = 2x$ 的图象是 y 随着 x 增大而增大, 故本选项错误;

B、函数 $y = x^2$ 的对称轴为 $x = 0$, 当 $x \leq 0$ 时 y 随着 x 增大而减小, 故本选项错误;

C、函数 $y = -\frac{2}{x}$, 当 $x < 0$ 或 $x > 0$ 时, y 随着 x 增大而增大, 故本选项错误;

D、函数 $y = \frac{2}{x}$, 当 $x > 0$ 时, y 随着 x 增大而减小, 故本选项错误;

故选: D.

【点评】 本题考查了二次函数、一次函数、反比例函数的增减性. 关键是明确各函数的增减性的限制条件.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 函数 $y = \sqrt{x-3}$ 的定义域是 $x \geq 3$.

【考点】 E4: 函数自变量的取值范围.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据二次根式的性质的意义, 被开方数大于或等于 0, 可以求出 x 的范围.

【解答】 解: 根据题意得: $x - 3 \geq 0$,

解得: $x \geq 3$.

故答案为 $x \geq 3$.

【点评】 本题考查了函数自变量的取值范围问题, 函数自变量的范围一般从三个方面考虑:

- (1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数;
- (2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0;
- (3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数非负.

8. (4分) 分解因式: $x^2y^2 - 9 = \underline{(xy+3)(xy-3)}$.

【考点】54: 因式分解 - 运用公式法.

【分析】直接利用平方差公式分解因式得出即可.

【解答】解: $x^2y^2 - 9 = (xy+3)(xy-3)$.

故答案为: $(xy+3)(xy-3)$.

【点评】此题主要考查了利用平方差公式分解因式, 熟练掌握平方差公式的形式是解题关键.

9. (4分) 不等式组 $\begin{cases} 3x-1 < 2x \\ -5x \geq 0 \end{cases}$ 的解集是 $\underline{x \leq 0}$.

【考点】CB: 解一元一次不等式组.

【专题】11: 计算题.

【分析】分别求出不等式组中两不等式的解集, 找出解集的公共部分即可确定出不等式组的解集.

【解答】解: $\begin{cases} 3x-1 < 2x \text{ ①} \\ -5x \geq 0 \text{ ②} \end{cases}$,

由①得: $x < 1$,

由②得: $x \leq 0$,

则不等式组的解集为 $x \leq 0$.

故答案为: $x \leq 0$

【点评】此题考查了解一元一次不等式组, 熟练掌握不等式组取解集的方法是解本题的关键.

10. (4分) 用换元法解方程 $\frac{x^2+1}{x} - \frac{3x}{x^2+1} = 2$, 若设 $y = \frac{x^2+1}{x}$, 则原方程可化为

关于 y 的整式方程是 $\underline{y^2 - 2y - 3 = 0}$.

【考点】B4: 换元法解分式方程.

【分析】可根据方程特点设 $y = \frac{x^2+1}{x}$, 则原方程可化为 $y + \frac{3}{y} = 2$.

【解答】解: 设 $y = \frac{x^2+1}{x}$, 则原方程化为 $y - \frac{3}{y} = 2$.

$\therefore y^2 - 2y - 3 = 0$.

故答案为: $y^2 - 2y - 3 = 0$.

【点评】本题考查用换元法解分式方程的能力. 用换元法解一些复杂的分式方程

是比较简单的一种方法，根据方程特点设出相应未知数，将分式方程能够转化为整式方程.

11. (4分) 若抛物线 $y = 2x^2 - 2ax + 5$ 的顶点在直线 $x = 1$ 上，则实数 $a = \underline{2}$.

【考点】H3: 二次函数的性质.

【分析】根据抛物线的顶点在直线 $x = 1$ 上可以得到该顶点坐标的横坐标为 1，从而得到有关 a 的方程求得 a 值即可.

【解答】解：∵ 抛物线 $y = 2x^2 - 2ax + 5$ 的顶点在直线 $x = 1$ 上，

$$\therefore \frac{2a}{4} = 1,$$

解得： $a = 2$,

故答案为：2.

【点评】本题考查了二次函数的性质，解题的关键是了解抛物线的顶点在直线 $x = 1$ 上就是该顶点坐标的横坐标为 1.

12. (4分) 小红、小芳做游戏时约定用“石头、剪刀、布”的方式确定游戏的先后顺序，问两个人都出“石头”的概率是 $\underline{\frac{1}{9}}$.

【考点】X6: 列表法与树状图法.

【分析】首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两个人都出“石头”的情况，再利用概率公式即可求得答案.

【解答】解：画树状图得：



∴ 一共有 9 种情况，两个人都出“石头”的有一种，

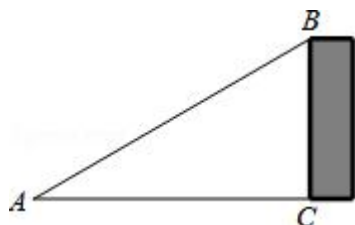
∴ 两个人都出“石头”的概率是： $\frac{1}{9}$.

故答案为： $\frac{1}{9}$.

【点评】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为：概率 = 所求情况数

与总情况数之比.

13. (4分) 如图, 若某人在距离大厦 BC 底端 C 处 200 米远的 A 地测得塔顶 B 的仰角是 30° , 则塔高 $BC \approx$ 115.5 米. ($\sqrt{3} \approx 1.732$, 精确到 0.1 米)



【考点】TA: 解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【分析】根据正切函数的定义 $\tan \angle A = \frac{BC}{AC}$, 可得 $BC = AC \cdot \tan \angle A$, 将数值代入计算即可求解.

【解答】解: 由题意, 可知 $AC = 200$ 米, $\angle A = 30^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle A = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore BC = AC \cdot \tan \angle A = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 115.5 \text{ (米)}.$$

即塔高 $BC \approx 115.5$ 米.

故答案为 115.5.

【点评】本题考查了仰角的定义, 要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形.

14. (4分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的长度相等且方向相反, 若 $\vec{a} = k\vec{b}$, 则 $k =$ -1.

【考点】LM: *平面向量.

【分析】由非零向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的长度相等且方向相反, 可得 $\vec{a} = -\vec{b}$, 又由 $\vec{a} = k\vec{b}$, 即可求得答案.

【解答】解: $\because$ 非零向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的长度相等且方向相反,

$$\therefore \vec{a} = -\vec{b},$$

$$\therefore \vec{a} = k\vec{b},$$

$$\therefore k = -1.$$

故答案为：-1.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大, 注意由非零向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的长度相等且方向相反, 可得 $\vec{a} = -\vec{b}$ 是解此题的关键.

15. (4分) 在 $\odot O$ 中, 弦 $AB = 8\text{cm}$, 弦心距 $OC = 3\text{cm}$, 则该圆的半径为 5 cm .

【考点】KQ: 勾股定理; M2: 垂径定理.

【分析】首先根据题意画出图形, 然后根据垂径定理的性质, 即可求得 AC 的长, 再利用勾股定理即可求得答案.

【解答】解: 如图: 连接 OA ,

$\because OC$ 是弦心距,

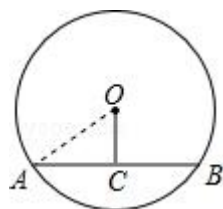
$\therefore OC \perp AB$,

$\therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4 (\text{cm})$,

$\therefore OA = \sqrt{AC^2 + OC^2} = 5 (\text{cm})$.

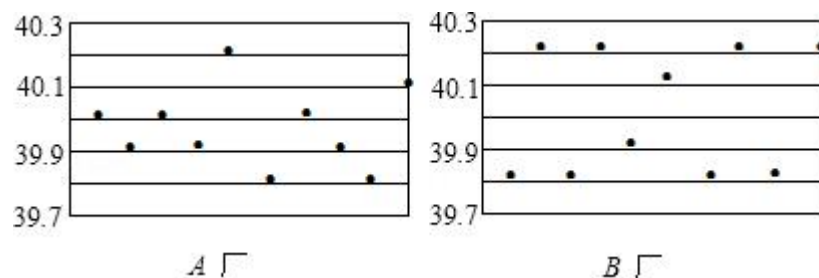
$\therefore$ 该圆的半径为 5cm .

故答案为: 5.



【点评】此题考查了垂径定理与勾股定理的知识. 此题比较简单, 解题的关键是注意数形结合思想的应用.

16. (4分) 质检部门从 A 、 B 两厂生产的乒乓球中各抽取了10个, 检测它们的直径(单位: mm), 并将有关数据绘制成下图, 若所测两组数据的方差分别是 S_A^2 、 S_B^2 , 则 S_A^2 < S_B^2 . (填“>、<或=”)



【考点】W7: 方差.

【分析】方差就是各变量值与其均值离差平方的平均数，根据方差公式先算出平均数，然后再利用方差公式计算即可．

【解答】解：由题意得： $\bar{x}_A = (40.2 + 40.1 + 40 \times 3 + 39.9 \times 3 + 39.8 \times 2) \div 10 = 39.96$ ，
 $S_A^2 = [(40.2 - 39.96)^2 + (40.1 - 39.96)^2 + (40 - 39.96)^2 \times 3 + (39.9 - 39.96)^2 \times 3 + (39.8 - 39.96)^2 \times 2] \div 10 = 0.0144$ ，

$$\bar{x}_B = (40.2 \times 4 + 40.1 + 39.9 + 39.8 \times 4) \div 10 = 40，$$

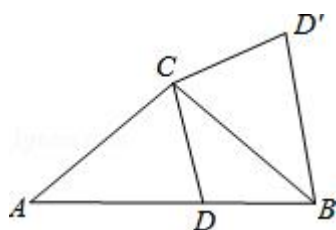
$$S_B^2 = [(40.2 - 40)^2 \times 4 + (40.1 - 40)^2 + (39.9 - 40)^2 + (39.8 - 40)^2 \times 4] \div 10 = 0.034，$$

$$\therefore S_A^2 < S_B^2，$$

故答案为：<．

【点评】本题考查方差的定义与意义：一般地设 n 个数据， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，则方差 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，它反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立．

17. (4分) 如图，点 D 是等腰 $\triangle ABC$ 的底边 AB 上的点，若 $AC = BC$ 且 $\angle ACB = 100^\circ$ ，将 $\triangle ACD$ 绕点 C 逆时针旋转，使它与 $\triangle BCD'$ 重合，则 $\angle D'BA =$ 80 度．



【考点】R2：旋转的性质．

【分析】首先根据旋转的性质得： $\triangle ACD \cong \triangle BCD'$ ，则可得 $\angle A = \angle CBD'$ ，
 又由 $AC = BC$ 且 $\angle ACB = 100^\circ$ ，即可求得 $\angle A$ 与 $\angle ABC$ 的度数，继而求得 $\angle D'BA$ ．

【解答】解：根据旋转的性质得： $\triangle ACD \cong \triangle BCD'$ ，

$$\therefore \angle A = \angle CBD'，$$

$$\because AC = BC \text{ 且 } \angle ACB = 100^\circ，$$

$$\therefore \angle A = \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 40^\circ，$$

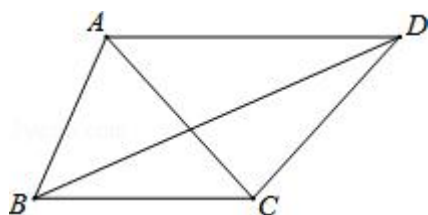
$$\therefore \angle CBD' = \angle A = 40^\circ，$$

$$\therefore \angle D'BA = \angle D'BC + \angle ABC = 80^\circ.$$

故答案为：80.

【点评】此题考查了旋转的性质以及等腰三角形的性质．此题难度不大，注意掌握旋转前后图形的对应关系，注意掌握数形结合思想的应用．

18. (4分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中，若 $AD \parallel BC$ ， $BC = CD = AC = 6$ ， $AB = 3\sqrt{2}$ ，则 BD 长为 $3\sqrt{14}$ ．



【考点】JC：平行线之间的距离；KQ：勾股定理．

【分析】以 C 为圆心 BC 为半径，作 $\odot C$ ，延长 BC 交 $\odot C$ 与点 B' ，连接 DB' ．根据直径所对的圆周角是直角得出 $\angle BDB' = 90^\circ$ ．由平行线所夹的弧相等，相等的弧所对的弦相等得出 $DB' = AB$ ，从而由勾股定理求得 BD 的长．

【解答】解：以 C 为圆心 BC 为半径，作 $\odot C$ ，延长 BC 交 $\odot C$ 与点 B' ，连接 DB' ，则 $\angle BDB' = 90^\circ$ ．

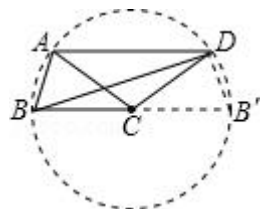
$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore DB' = AB = 3\sqrt{2},$$

$$\text{又} \because BB' = 2BC = 12,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BB'^2 - B'D^2} = 3\sqrt{14}.$$

故答案为 $3\sqrt{14}$ ．



【点评】本题主要考查了勾股定理，圆周角定理，难度适中．准确作出辅助线是解题的关键．

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10分) 计算： $2\sin 45^\circ + |1 - \sqrt{2}| - \sqrt{8} - (-1)^{2014}$ ．

【考点】2C：实数的运算；T5：特殊角的三角函数值．

【分析】分别进行特殊角的三角函数值、绝对值的化简、二次根式的化简等运算，然后合并.

【解答】解：原式 $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} - 1$

$= -2$.

【点评】本题考查了实数的运算，涉及了特殊角的三角函数值、绝对值的化简、二次根式的化简等知识，属于基础题.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

【考点】AF: 高次方程.

【分析】先由①得: $(x - 2y)(x - 3y) = 0$, 求出 $x = 2y$ 或 $x = 3y$, 再分别代入②, 求出 x, y 的值即可.

【解答】解:
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 & \text{①} \\ 2x + y = 8 & \text{②} \end{cases}$$
,

由①得: $(x - 2y)(x - 3y) = 0$,

则 $x = 2y$ 或 $x = 3y$,

将 $x = 2y$ 代入②得 $y = \frac{8}{5}$, $x = \frac{16}{5}$,

将 $x = 3y$ 代入②得 $y = \frac{8}{7}$, $x = \frac{24}{7}$,

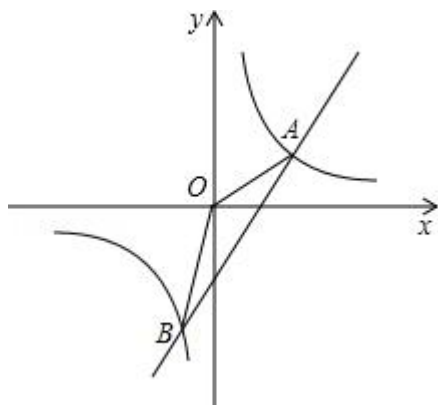
则方程组的解是:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{16}{5} \\ y_1 = \frac{8}{5} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{24}{7} \\ y_2 = \frac{8}{7} \end{cases}$$
.

【点评】此题考查了高次方程，关键是把高次方程转化成两个低次方程，用到的知识点是代入法，注意结果有两组.

21. (10分) 如图，一次函数 $y = ax - 1$ ($a \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象相交于 A, B 两点且点 A 的坐标为 $(2, 1)$, 点 B 的坐标 $(-1, n)$.

(1) 分别求两个函数的解析式;

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.



【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】 (1) 根据待定系数法, 将点的坐标代入解析式, 可得答案;

(2) 根据面积的和差, 可得答案.

【解答】 解: (1) 一次函数 $y = ax - 1$ ($a \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)

的图象相交于 A 、 B 两点且点 A 的坐标为 $(2, 1)$,

$$\begin{cases} 1 = 2a - 1 & \text{①} \\ 1 = \frac{k}{2} & \text{②} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ k = 2 \end{cases}$$

一次函数的解析式是 $y = x - 1$,

反比例函数的解析式是 $y = \frac{2}{x}$;

(2) 当 $x = 0$ 时, $y = -1$,

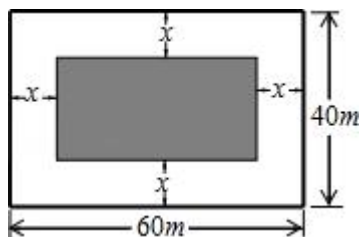
$$S_{\text{三角形} AOB} = \frac{1}{2} \times |-1| \times 2 + \frac{1}{2} \times |-1| \times |-1|$$

$$= 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点坐标, (1) 待定系数法解题是解题的关键, (2) 转化的思想是解题关键, 将大三角形的面积转化成两个小三角形的面积.

22. (10 分) 如图, 为了给小区居民增加锻炼场所, 物业拟在一宽为 40 米、长为 60 米的矩形区域内的四周修建宽度相同的鹅卵石小路, 阴影部分用作绿化. 当阴影部分面积为 800 平方米时, 小路宽 x 为多少米.



【考点】AD：一元二次方程的应用．

【专题】121：几何图形问题．

【分析】分别表示出阴影部分的矩形的长和宽，然后利用矩形的面积公式列出方程求解．

【解答】解：设小路的宽为 x 米，根据题意得： $(40 - 2x)(60 - 2x) = 800$ ，
解得： $x = 10$ 或 $x = 40$ （舍去）

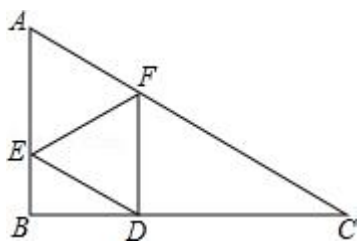
答：小路的宽为 10 米．

【点评】本题考查了一元二次方程的应用，解题的关键是分别表示出阴影部分的长和宽．

23.（12 分）如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，点 D 、 E 、 F 分别在边 BC 、 AB 、 AC 上，联结 DE 、 EF 、 FD ，若 $BE = \frac{1}{2}ED$ ，且 $FD \perp BC$ ．

（1）求证：四边形 $AEDF$ 是平行四边形；

（2）若 $AC = 3AE$ ，求证：四边形 $AEDF$ 是菱形．



【考点】L6：平行四边形的判定；L9：菱形的判定．

【分析】（1）分别证明 $AB \parallel FD$ ， $ED \parallel AC$ 可证明四边形 $AEDF$ 是平行四边形；

（2）根据平行四边形的性质可得 $AE = FD$ ，再根据直角三角形的性质可得 $AC = 3AE$ ，然后证明 $AF = FD$ ，可得四边形 $AEDF$ 是菱形．

【解答】证明：（1） $\because FD \perp BC$ ，

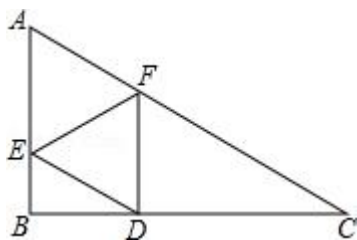
$$\therefore \angle FDC = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel FD,$$

$\because BE = \frac{1}{2}ED,$
 $\therefore \sin \angle EDB = \frac{1}{2},$
 $\therefore \angle EDB = 30^\circ,$
 $\because \angle C = 30^\circ,$
 $\therefore ED \parallel AC,$
 $\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形;

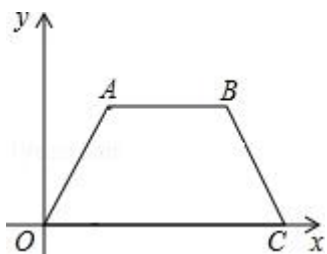
(2) $\because$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,
 $\therefore AE = FD,$
 $\because \angle C = 30^\circ,$
 $\therefore FD = \frac{1}{2}FC,$
 $\because AC = 3AE,$
 $\therefore AE = \frac{1}{3}AC,$
 $\therefore \frac{1}{2}FC = \frac{1}{3}AC,$
 $\therefore 3FC = 2AC,$
 $3FC = 2(AF + FC),$
 $3FC = 2AF + 2FC,$
 $CF = 2AF,$
 $\therefore AF = FD,$
 $\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是菱形.



【点评】 此题主要考查了平行四边形的性质和判定，以及菱形的判定，关键是掌握两组对边分别平行的四边形是平行四边形，邻边相等的平行四边形是菱形.

24. (12分) 如图，在直角坐标平面内，四边形 $OABC$ 是等腰梯形，其中 $OA = AB = BC = 4$ ， $\tan \angle BCO = \sqrt{3}$.

- (1) 求经过 O 、 B 、 C 三点的二次函数解析式；
- (2) 若点 P 在第四象限，且 $\triangle POC \sim \triangle AOB$ 相似，求满足条件的所有点 P 的坐标；
- (3) 在 (2) 的条件下，若 $\odot P$ 与以 OC 为直径的 $\odot D$ 相切，请直接写出 $\odot P$ 的半径．



【考点】 HF：二次函数综合题．

【分析】 (1) 先根据三角函数求得 C 点的坐标，然后应用待定系数法即可求得解析式；

(2) 有两种情况：当 $PO = PC$ 时，根据三角函数求得 $\angle AOC = \angle BCO = 60^\circ$ ，根据等腰梯形的性质求得 $\angle AOB = \angle ABO = 30^\circ$ ，然后根据三角形相似，即可求得 $\angle POC = \angle PCO = 30^\circ$ ，因为 $OD = 4$ ，根据三角函数即可求得 PD 的长，进而求得 P 点坐标；当 $PC = OC$ 时，通过三角形相似求得 $\angle OPC = \angle COP = 30^\circ$ ，因为 $OC = PC = 8$ ，得出 $\angle PCD = 60^\circ$ ，进而得出 $PD = 4\sqrt{3}$ ， $CD = 4$ ，即可求得 P 的坐标．

(3) 如图① $\odot P$ 的半径就是 $PD + OD$ 的长，如图②根据 P 的坐标先求得 OP 的长，再通过解三角函数求得 OM 、 QM 的值，然后根据勾股定理即可求得．

【解答】 解：(1) $\because$ 四边形 $OABC$ 是等腰梯形，其中 $OA = AB = BC = 4$ ， $\tan \angle BCO = \sqrt{3}$ ，

$\therefore O(0, 0)$ ， $B(6, 2\sqrt{3})$ ， $C(8, 0)$ ，

设经过 O 、 B 、 C 三点的二次函数解析式为： $y = ax^2 + bx + c$ ，则
$$\begin{cases} c=0 \\ 36a+6b+c=2\sqrt{3} \\ 64a+8b+c=0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ c = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 过 O 、 B 、 C 三点的二次函数解析式为： $y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}x$ ；

如图 1, 当 $PO = PC$ 时,

$$\therefore \angle AOC = \angle BCO = 60^\circ,$$

$$\because OA = AB = 4,$$

$$\because \triangle POC \sim \triangle AOB, \quad OA = AB, \quad PO = PC,$$

$$\therefore P \left(4, -\frac{4\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$\because \triangle POC \sim \triangle AOB, \quad OA = OB, \quad CO = PC,$$

$$\because OC = PC = 8,$$

$$\therefore PD = 4\sqrt{3}, \quad CD = 4,$$

$$\therefore P (12, -4\sqrt{3})$$



第 19 页 (共 23 页)

如图①, $\because PD = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \odot P$ 的半径为 $4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

如图②, 作 $QM \perp OP$, $\because \angle POC = 30^\circ$,

$\therefore QM = \frac{1}{2}OQ = \frac{1}{4}OC = 2$, $OM = 2\sqrt{3}$,

$\therefore P(12, -4\sqrt{3})$,

$\therefore OP = 8\sqrt{3}$,

$\therefore PM = OP - OM = 6\sqrt{3}$,

$\therefore PQ = \sqrt{PM^2 + QM^2} = 4\sqrt{7}$,

$\therefore \odot P$ 的半径为 $4\sqrt{7} - 4$ 或 $4\sqrt{7} + 4$.

综上所述, $\odot P$ 的半径为 $4 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $4\sqrt{7} - 4$ 或 $4\sqrt{7} + 4$.

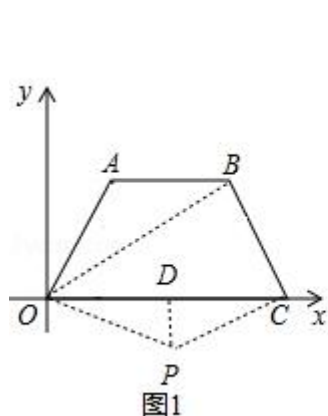


图1

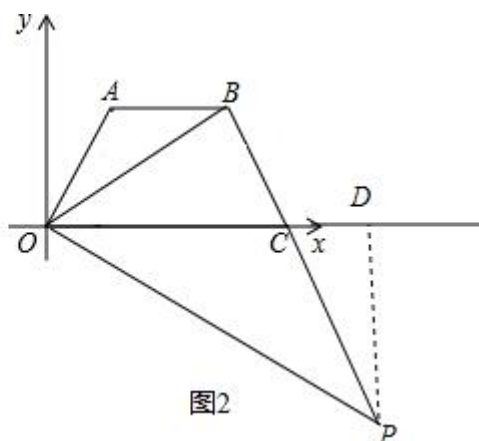


图2

【点评】 本题考查了解直角三角函数值, 待定系数法求解析式, 数形结合求点的坐标以及圆的内切和外切的性质等.

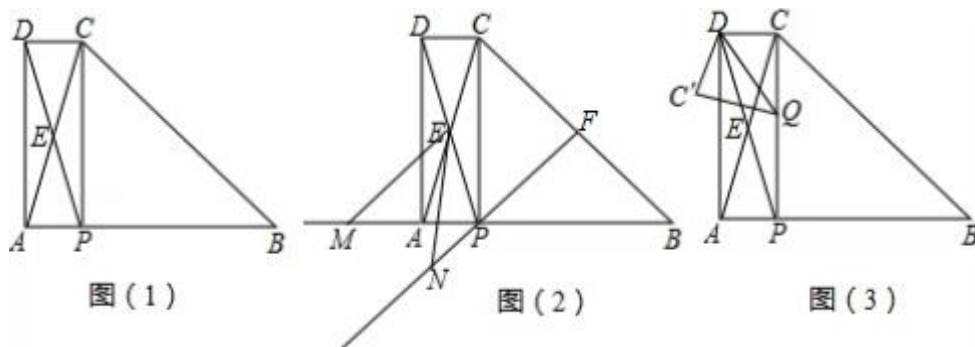
25. (14分) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $BA = BC$, 点 P 在边 AB 上, 联结 CP , 以 PA 、 PC 为邻边作平行四边形 $APCD$, AC 与 PD 交于点 E , $\angle ABC = \angle AEP = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

(1) 如图 (1), 求证: $\angle EAP = \angle EPA$;

(2) 如图 (2), 若点 F 是 BC 中点, 点 M 、 N 分别在 PA 、 FP 延长线上, 且 $\angle MEN = \angle AEP$, 判断 EM 和 EN 之间的数量关系, 并说明理由.

(3) 如图 (3), 若 $DC = 1$, $CP = 3$, 在线段 CP 上任取一点 Q , 联结 DQ , 将 $\triangle DCQ$ 沿直线 DQ 翻折, 点 C 落在四边形 $APCD$ 外的点 C' 处, 设 $CQ = x$, $\triangle$

$DC'Q$ 与四边形 $APCD$ 重合部分的面积为 y , 写出 y 与 x 的函数关系式及定义域.



【考点】LO: 四边形综合题.

【专题】1: 常规题型.

【分析】(1) 利用等腰三角形的性质可知 $\angle ACB = \angle CAB$, 再由三角形内角和定理即可证出 $\angle AEP = \angle EAP$;

(2) 利用对角线相等的平行四边形是矩形进行判定, 得出 $\triangle EAM \cong \triangle EPN$,

(3) 利用 $\triangle DC'Q \cong \triangle QFD$, 求出 $C'Q = FD$, $DQ = x - \frac{x^2-1}{2x}$, 再求出 $y = (x - \frac{x^2-1}{2x}) \times 1 \div 2$.

【解答】(1) 证明: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEP$ 中

$$\because \angle ABC = \angle AEP, \angle BAC = \angle EAP$$

$$\therefore \angle ACB = \angle APE$$

$$\because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } AB = BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle BAC,$$

$$\because \angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180^\circ, \angle AEP + \angle EAP + \angle EPA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EPA = \angle EAP.$$

(2) 解: $\because$ 四边形 $APCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AC = 2EA, PD = 2EP,$$

$$\because \text{由 (1) 知 } \angle EPA = \angle EAP,$$

$$\therefore EA = EP,$$

$$\text{则 } AC = PD,$$

$$\therefore \square APCD \text{ 是矩形.}$$

$$\because EA = EP,$$

$$\therefore \angle EPA = \frac{180^\circ - \angle AEP}{2} = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

$$\therefore \angle EAM = 180^\circ - \angle EPA = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$$

由(2)知 $\angle CPB = 90^\circ$ ， F 是 BC 的中点，

$$\therefore FP = FB,$$

$$\therefore \angle FPB = \angle ABC = \alpha,$$

$$\therefore \angle EPN = \angle EPA + \angle APN = \angle EPA + \angle FPB = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \alpha = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$$

$$\therefore \angle EAM = \angle EPN,$$

$\because \angle AEP$ 绕点 E 顺时针旋转适当的角度，得到 $\angle MEN$ ，

$$\therefore \angle AEP = \angle MEN,$$

$$\therefore \angle AEP - \angle AEN = \angle MEN - \angle AEN, \text{ 即 } \angle MEA = \angle NEP,$$

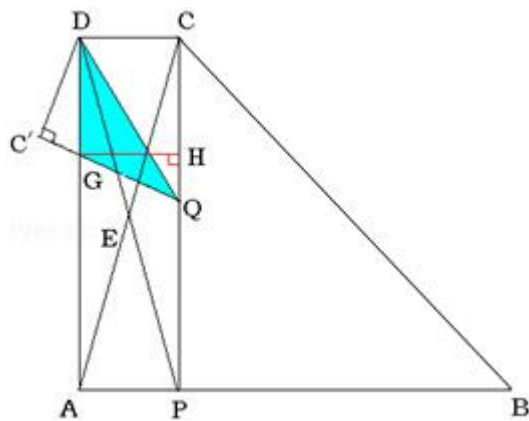
在 $\triangle EAM$ 和 $\triangle EPN$ 中，

$$\begin{cases} \angle EAM = \angle EPN \\ EA = EP \\ \angle MEA = \angle NEP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAM \cong \triangle EPN \text{ (ASA)},$$

$$\therefore EM = EN.$$

(3) 解：过 G 点作 $GH \perp PC$ 于 H ，



由 $\triangle DCQ$ 沿直线 DQ 翻折得到 $\triangle DC'Q$ ， $C'D = CD = 1$ ， $C'Q = CQ = x$ ，

在 $\triangle DC'G$ 和 $\triangle GQH$ 中，

$$\begin{cases} \angle C' = \angle GHQ \\ \angle C'DG = \angle HGQ, \\ C'D = CD = GH \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DC'G \cong \triangle GQH,$$

设 $C'G = a$, $DG = CH = CQ - HQ = CQ - C'G = x - a$, 在 $\text{Rt}\triangle DC'G$ 中, 根据

勾股定理 $(x - a)^2 = a^2 + 1^2$

$$\therefore a = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$DG = x - \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times DG \times 1 = \frac{1}{2} \times \left(x - \frac{x^2 - 1}{2x} \right) \times 1 = \frac{x^2 + 1}{4x},$$

$$\therefore y = \frac{x^2 + 1}{4x} \quad (1 < x \leq 3).$$

【点评】 本题考查了矩形的判定, 平行四边形的性质, 三角形的内角和定理, 等腰三角形的性质和判定的综合运用.