

2014 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 下列数中属于无理数的是 ()

- A. $\frac{22}{7}$ B. $16^{\frac{1}{4}}$ C. $0.\dot{1}$ D. $\sqrt{8}$

2. (4 分) 下列关于 x 的方程一定是一元一次方程的是 ()

- A. $\frac{1}{x} - x = 1$ B. $(a^2 + 1)x = b$ C. $ax = b$ D. $\sqrt{x+1} = 3$

3. (4 分) 布袋中装有大小一样的 3 个白球、2 个黑球，从布袋中任意摸出一个球，则下列事件中是必然事件的是 ()

- A. 摸出的是白球或黑球 B. 摸出的是黑球
C. 摸出的是白球 D. 摸出的是红球

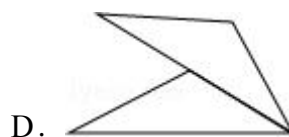
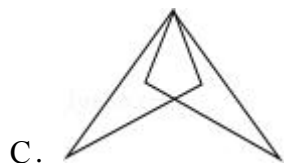
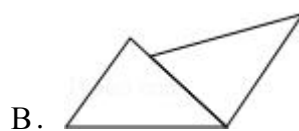
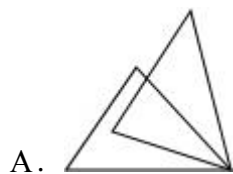
4. (4 分) 某外贸公司要出口一批食品罐头，标准质量为每听 454 克，现抽去 10 听样品进行检测，它们的质量与标准质量的差值（单位：克）如下：-10, +5, 0, +5, 0, 0, -5, 0, +5, +10. 则这 10 听罐头质量的平均数及众数为 ()

- A. 454, 454 B. 455, 454 C. 454, 459 D. 455, 0

5. (4 分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，其中 $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$. 下列各向量中与 $\vec{c}$ 是平行向量的是 ()

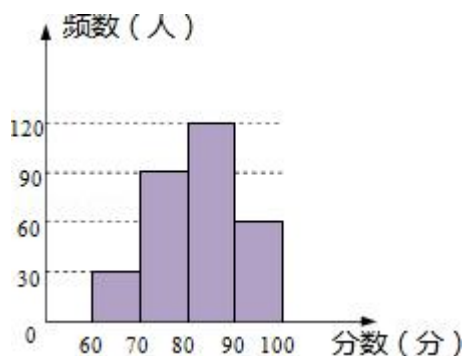
- A. $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ B. $\vec{n} = \vec{b} - 2\vec{a}$ C. $\vec{q} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$ D. $\vec{g} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$

6. (4 分) 下列每个图中都有一对全等三角形，其中的一个三角形只经过一次旋转运动即可和另一个三角形重合的是 ()

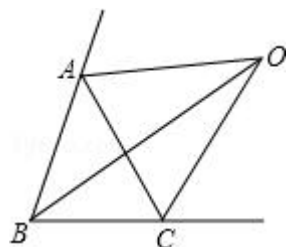


二、填空题（本大题每小题 4 分，满分 48 分）

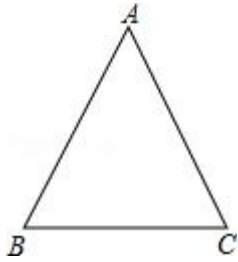
7. (4分) 当 $x > 2$ 时, 化简 $|x - 2| =$ _____.
8. (4分) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x - 2 + m = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 m 的取值范围是_____.
9. (4分) 函数 $y = -\sqrt{3-x} + \frac{1}{x-2}$ 的定义域是_____.
10. (4分) 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在一次函数 $y = -2x + b$ 的图象上, 若 $x_1 < x_2$, 则 y_1 _____ y_2 (填“ $<$ ”或“ $>$ ”或“ $=$ ”).
11. (4分) 抛物线 $y = 2x^2 + 4x - 2$ 的顶点坐标是_____.
12. (4分) 某区在初一年级一次数学期末考试后, 随机抽查了部分同学的成绩, 整理成频数分布直方图如图, 则本次抽查的样本的中位数所在的区间是_____.



13. (4分) 如果矩形的周长是 20cm , 相邻两边长之比为 $2:3$, 那么对角线长为 _____ cm .
14. (4分) 内角和为 1080° 的正多边形是_____对称图形.
15. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle BAC$ 的外角平分线与 $\angle ACB$ 的外角平分线交于点 O , 则 $\angle ABO =$ _____ 度.

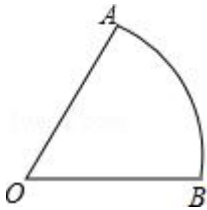


16. (4分) 如图, 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 8$. 已知重心 G 到点 A 的距离为 6 , 则 G 到点 B 的距离是_____.



17. (4分) 我们把四边形两条对角线中点的连线段称为奇异中位线. 现有两个全等三角形, 边长分别为 3cm , 4cm , 5cm . 将这两个三角形相等的边重合成凸四边形, 如果凸四边形的奇异中位线的长不为 0, 那么奇异中位线的长是 cm .

18. (4分) 如图, 扇形 OAB 的圆心角为 2α , 点 P 为弧 AB 上一点, 将此扇形翻折, 当点 O 和点 P 重合时折痕恰巧过点 B , 且 $\frac{AB}{PB} = \frac{6}{5}$, 则 α 的正切值为_____.

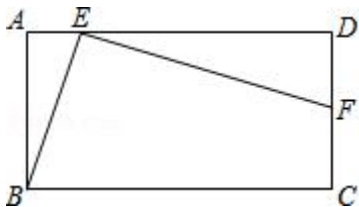


三、解答题 (第 19 ~ 22 题每题 10 分, 第 23 ~ 24 题每题 12 分, 第 25 题 14 分, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $|\sqrt{3}| - \sqrt{27} + 2\sin 60^\circ + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

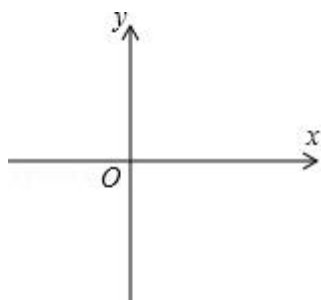
21. (10分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 5$, 点 E 在 AD 上, 且 $AE:ED = 1:4$, 联结 BE , 射线 $EF \perp BE$ 交边 DC 于点 F . 求 CF 的长.



22. (10分) 某商店第一次用 600 元购进某种型号的铅笔若干支, 第二次又用 600 元购进该款铅笔, 但这次每支的进价比第一次贵 1 元, 所以购进数量比第一次少了 30 支.

(1) 求第一次每支铅笔的进价及购进的数量.

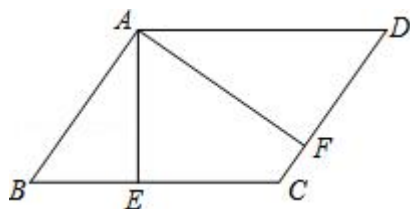
- (2) 若将这两次购进的铅笔按同一单价 x (元/支) 全部销售完毕, 并要求获利不低于 420 元, 求获利 y (元) 关于单价 x (元/支) 的函数关系式及定义域, 并在直角坐标系内画出它的大致图象.



23. (12 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AE \perp BC$ 于 E , $AF \perp CD$ 于 F .

(1) 求证: $CD \cdot DF = BC \cdot BE$;

(2) 若 M 、 N 分别是 AB 、 AD 中点, 且 $\angle B = 60^\circ$, 求证: $EM \parallel FN$.

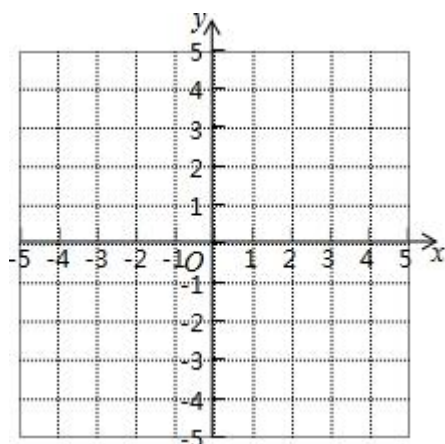


24. (12 分) 已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 4$ 与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , $\triangle ABC$ 的面积为 12.

(1) 求抛物线的对称轴及表达式;

(2) 若点 P 在 x 轴上方的抛物线上, 且 $\tan \angle PAB = \frac{1}{2}$, 求点 P 的坐标;

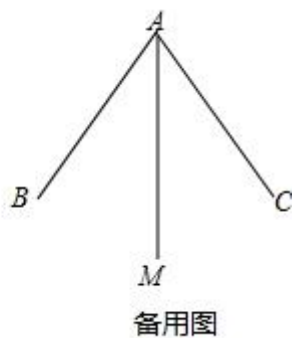
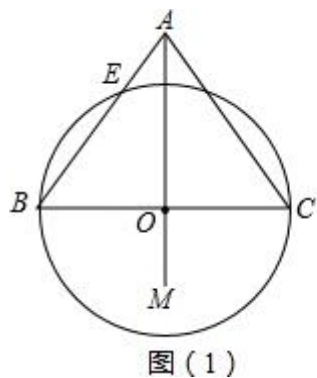
(3) 在 (2) 的条件下, 过 C 作射线交线段 AP 于点 E , 使得 $\tan \angle BCE = \frac{1}{2}$, 联结 BE , 试问 BE 与 BC 是否垂直? 请通过计算说明.



25. (14 分) 已知 AM 平分 $\angle BAC$, $AB = AC = 10$, $\cos \angle BAM = \frac{4}{5}$. 点 O 为射线

AM 上的动点，以 O 为圆心， BO 为半径画圆交直线 AB 于点 E （不与点 B 重合）。

- (1) 如图 (1)，当点 O 为 BC 与 AM 的交点时，求 BE 的长；
- (2) 以点 A 为圆心， AO 为半径画圆，如果 $\odot A$ 与 $\odot O$ 相切，求 AO 的长；
- (3) 试就点 E 在直线 AB 上相对于 A 、 B 两点的位置关系加以讨论，并指出相应的 AO 的取值范围；



2014 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题每小题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列数中属于无理数的是（ ）

A. $\frac{22}{7}$

B. $16^{\frac{1}{4}}$

C. $0.\dot{1}$

D. $\sqrt{8}$

【考点】26：无理数.

【分析】先把各数化为最简，然后根据无理数的三种形式结合选项求解.

【解答】解： $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

故 $2\sqrt{2}$ 是无理数.

故选：D.

【点评】本题考查了无理数的知识，解答本题的关键是掌握无理数的三种形式：

①开方开不尽的数，②无限不循环小数，③含有 π 的数.

2.（4 分）下列关于 x 的方程一定是一元一次方程的是（ ）

A. $\frac{1}{x} - x = 1$

B. $(a^2+1)x = b$

C. $ax = b$

D. $\sqrt{x+1} = 3$

【考点】84：一元一次方程的定义.

【分析】根据一元一次方程的定义判断即可.

【解答】解：A、不是一元一次方程，故本选项错误；

B、是一元一次方程，故本选项正确；

C、当 $a = 0$ 时，不是一元一次方程，故本选项错误；

D、不是一元一次方程，故本选项错误；

故选：B.

【点评】本题考查了一元一次方程的定义的应用，注意：只含有一个未知数，并且所含未知数的最高次数是 1 的整式方程，叫一元一次方程.

3.（4 分）布袋中装有大小一样的 3 个白球、2 个黑球，从布袋中任意摸出一个球，则下列事件中是必然事件的是（ ）

A. 摸出的是白球或黑球

B. 摸出的是黑球

C. 摸出的是白球

D. 摸出的是红球

【考点】X1: 随机事件.

【分析】必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 根据定义解答.

【解答】解: A 、摸出的是白球或黑球, 是必然事件;

B 、 C 是随机事件,

D 、没有红球, 所以摸出红球是不可能事件;

故选: A .

【点评】本题考查了随机事件, 解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 用到的知识点为: 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件.

4. (4 分) 某外贸公司要出口一批食品罐头, 标准质量为每听 454 克, 现抽去 10 听样品进行检测, 它们的质量与标准质量的差值 (单位: 克) 如下: -10 , $+5$, 0 , $+5$, 0 , 0 , -5 , 0 , $+5$, $+10$. 则这 10 听罐头质量的平均数及众数为 ()

A. 454, 454

B. 455, 454

C. 454, 459

D. 455, 0

【考点】W1: 算术平均数; W5: 众数.

【分析】首先求得 -10 , $+5$, 0 , $+5$, 0 , 0 , -5 , 0 , $+5$, $+10$ 这 10 个数的平均数以及众数, 然后分别加上 454 克, 即可求解.

【解答】解: 平均数是: $454 + \frac{1}{10}(-10 + 5 + 0 + 5 + 0 + 0 - 5 + 0 + 5 + 10) = 454 + 1 = 455$ 克,

-10 , $+5$, 0 , $+5$, 0 , 0 , -5 , 0 , $+5$, $+10$ 的众数是 0, 因而这 10 听罐头的质量的众数是: $454 + 0 = 454$ 克.

故选: B .

【点评】本题考查了众数与平均数的求法, 正确理解定理, 理解 -10 , $+5$, 0 , $+5$, 0 , 0 , -5 , 0 , $+5$, $+10$ 与这 10 听罐头质量的平均数及众数的关系是关键.

5. (4 分) 已知非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$, 其中 $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$. 下列各向量中与 $\vec{c}$ 是平行向量的是 ()

A. $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ B. $\vec{n} = \vec{b} - 2\vec{a}$ C. $\vec{q} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$ D. $\vec{g} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$

【考点】LM：*平面向量.

【分析】由 $\vec{q} = 4\vec{a} + 2\vec{b} = 2(2\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{c}$ ，根据平行向量的定义，可求得答案.

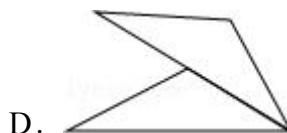
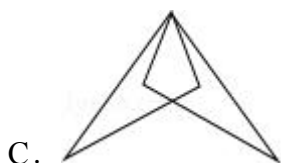
【解答】解： $\because \vec{q} = 4\vec{a} + 2\vec{b} = 2(2\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{c}$,

$\therefore \vec{q}$ 与 $\vec{c}$ 是平行向量.

故选：C.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度不大，注意掌握平行向量的定义是解此题的关键.

6. (4分) 下列每个图中都有一对全等三角形，其中的一个三角形只经过一次旋转运动即可和另一个三角形重合的是 ()



【考点】R9：利用旋转设计图案.

【分析】根据旋转的性质以及轴对称变换性质分别分析得出即可.

【解答】解：A、无法借助旋转得到，故此选项错误；

B、无法借助旋转得到，故此选项错误；

C、可以借助轴对称得到，故此选项错误；

D、可以只经过一次旋转运动即可和另一个三角形，故此选项正确.

故选：D.

【点评】此题主要考查了利用旋转设计图案，掌握旋转的性质是解题关键.

二、填空题（本大题每小题 4 分，满分 48 分）

7. (4分) 当 $x > 2$ 时，化简 $|x - 2| = \underline{x - 2}$.

【考点】15：绝对值.

【分析】根据绝对值的意义，可得正数的绝对值表示的数.

【解答】解：当 $x > 2$ 时，化简 $|x - 2| = x - 2$ ，

故答案为： $x - 2$ 。

【点评】本题考查了绝对值，注意正数的绝对值等于它本身。

8. (4分) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x - 2 + m = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是 $m < \frac{9}{4}$ 。

【考点】AA：根的判别式。

【分析】根据一元二次方程的根的判别式，建立关于 m 的不等式，求出 m 的取值范围即可。

【解答】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x - 2 + m = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 1 \times (-2 + m) > 0,$$

$$\therefore m < \frac{9}{4}.$$

$$\therefore m \text{ 的取值范围是 } m < \frac{9}{4};$$

故答案为： $m < \frac{9}{4}$ 。

【点评】此题考查了根的判别式，一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：(1)

$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根。

9. (4分) 函数 $y = -\sqrt{3-x} + \frac{1}{x-2}$ 的定义域是 $x \leq 3$ 且 $x \neq 2$ 。

【考点】E4：函数自变量的取值范围。

【分析】根据被开方数大于等于 0，分母不等于 0 列式计算即可得解。

【解答】解：由题意得， $3 - x \geq 0$ 且 $x - 2 \neq 0$ ，

解得 $x \leq 3$ 且 $x \neq 2$ 。

故答案为： $x \leq 3$ 且 $x \neq 2$ 。

【点评】本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

(1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；

(2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；

(3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负。

10. (4分) 点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在一次函数 $y = -2x + b$ 的图象上，若 $x_1 < x_2$ ，则 y_1 $>$ y_2 (填“ $<$ ”或“ $>$ ”或“ $=$)。

【考点】F8：一次函数图象上点的坐标特征．

【分析】根据一次函数图象的增减性进行答题．

【解答】解：∵一次函数 $y = -2x + b$ 中的 x 的系数 $-2 < 0$ ，

∴该一次函数图象是 y 随 x 的增大而减小，

∴当 $x_1 < x_2$ 时， $y_1 > y_2$

故答案是：>．

【点评】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征．此题也可以把点 A 、 B 的坐标代入函数解析式，求得相应的 y 的值，然后再比较大小．

11. (4 分) 抛物线 $y = 2x^2 + 4x - 2$ 的顶点坐标是 $(-1, -4)$ ．

【考点】H3：二次函数的性质．

【分析】利用顶点的公式首先求得横坐标，然后把横坐标的值代入解析式即可求得纵坐标．

【解答】解： $x = -\frac{4}{2 \times 2} = -1$ ，

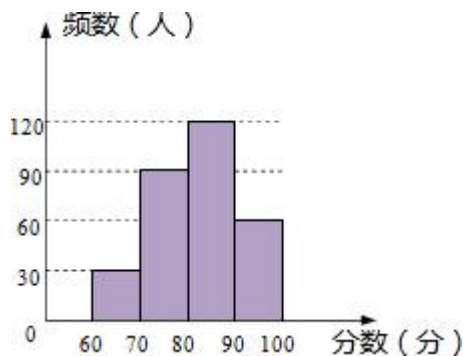
把 $x = -1$ 代入得： $y = 2 - 4 - 2 = -4$ ．

则顶点的坐标是 $(-1, -4)$ ．

故答案是： $(-1, -4)$ ．

【点评】本题考查了二次函数的顶点坐标的求解方法，可以利用配方法求解，也可以利用公式法求解．

12. (4 分) 某区在初一年级一次数学期末考试后，随机抽查了部分同学的成绩，整理成频数分布直方图如图，则本次抽查的样本的中位数所在的区间是 80 分到 90 分．



【考点】V8：频数（率）分布直方图．

【分析】首先求得总人数，然后确定大小处于中间位置的数在哪个区间即可．

【解答】解：总人数是： $30+90+120+60=300$ （人），

则位于中间位置的是第 150 位和 151 位，都在 80 至 90 分之间．则中位数一定在 80 分到 90 分．

故答案是：80 分到 90 分．

【点评】本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力．同时考查中位数的求法：给定 n 个数据，按从小到大排序，如果 n 为奇数，位于中间的那个数就是中位数；如果 n 为偶数，位于中间两个数的平均数就是中位数．

13.（4 分）如果矩形的周长是 20cm ，相邻两边长之比为 2：3，那么对角线长为 $2\sqrt{13}\text{cm}$ ．

【考点】KQ：勾股定理；LB：矩形的性质．

【分析】首先表示出 $AB+BC=10\text{cm}$ ，再根据相邻两边长之比为 2：3，设 $AB=2x\text{cm}$ ， $BC=3x\text{cm}$ ，列出方程 $2x+3x=10$ ，解出 x 的值，进而得到 AB 、 BC 长，然后再利用勾股定理计算出 AC 长即可．

【解答】解： $\because$ 矩形的周长是 20cm ，

$$\therefore AB+BC=10\text{cm},$$

$\because$ 相邻两边长之比为 2：3，

$$\therefore \text{设 } AB=2x\text{cm}, BC=3x\text{cm},$$

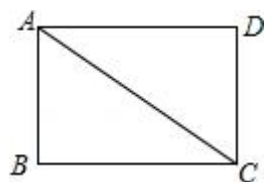
$$\therefore 2x+3x=10,$$

解得： $x=2$ ，

$$\therefore AB=4\text{cm}, BC=6\text{cm},$$

$$\therefore AC=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}(\text{cm}),$$

故答案为： $2\sqrt{13}$ ．



【点评】此题主要考查了矩形的性质，关键是掌握矩形两对边分别相等，对角线相等．

14. (4分) 内角和为 1080° 的正多边形是 中心对称也是轴 对称图形.

【考点】L3: 多边形内角与外角; P3: 轴对称图形.

【分析】 n 边形的内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 如果已知多边形的内角和, 就可以得到一个关于边数的方程, 解方程就可以求出多边形的边数, 然后即可判断.

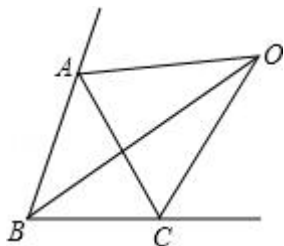
【解答】解: 由 $(n-2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ$, 解得: $n = 8$;

则正多边形是中心对称也是轴对称图形.

故答案是: 中心对称也是轴

【点评】考查了正多边形的内角和的公式. 多边形内角和定理: $[n-2] \cdot 180^\circ$ ($n \geq 3$) 且 n 为整数].

15. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle BAC$ 的外角平分线与 $\angle ACB$ 的外角平分线交于点 O , 则 $\angle ABO =$ 35 度.



【考点】K7: 三角形内角和定理; K8: 三角形的外角性质.

【分析】过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E , $OF \perp BC$ 于点 F , $OG \perp AC$ 于点 G , 由于点 O 是 $\angle BAC$ 的外角平分线与 $\angle ACB$ 的外角平分线的交点, 故 $OE = OG = OF$, 所以 OB 是 $\angle ABC$ 的平分线, 由此即可得出结论.

【解答】解: 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E , $OF \perp BC$ 于点 F , $OG \perp AC$ 于点 G ,

$\because$ 点 O 是 $\angle BAC$ 的外角平分线与 $\angle ACB$ 的外角平分线的交点,

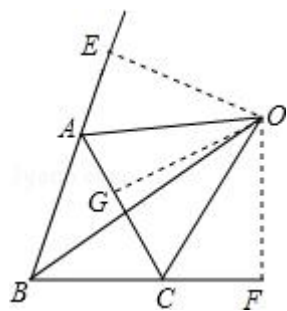
$\therefore OE = OG, OF = OG$,

$\therefore OE = OG = OF$,

$\therefore OB$ 是 $\angle ABC$ 的平分线,

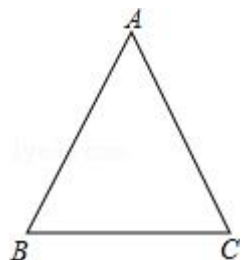
$\therefore \angle ABO = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ$.

故答案为: 35.



【点评】 本题考查的是三角形内角和定理，根据题意作出辅助线，利用角平分线的性质进行解答即可．

16. (4分) 如图，等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 8$ ．已知重心 G 到点 A 的距离为6，则 G 到点 B 的距离是5．



【考点】 K5：三角形的重心．

【分析】 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ，连接 BG ，根据等腰三角形三线合一的性质可得 $BD = CD$ ，再根据三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的2倍求出 DG ，然后利用勾股定理列式计算即可得解．

【解答】 解：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ，连接 BG ，

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore \text{点 } G \text{ 在 } AD \text{ 上},$$

$$\because \text{重心 } G \text{ 到点 } A \text{ 的距离为 } 6,$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

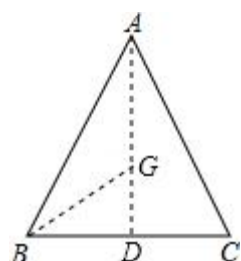
$$\because BC = 8,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDG \text{ 中, } BG = \sqrt{BD^2 + DG^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

即 G 到点 B 的距离是5．

故答案为：5.



【点评】 本题考查了三角形的重心，等腰三角形的性质，勾股定理，熟记三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的 2 倍是解题的关键，此内容很多教材已经删掉，此题可酌情使用.

17. (4 分) 我们把四边形两条对角线中点的连线段称为奇异中位线. 现有两个全等三角形, 边长分别为 3cm , 4cm , 5cm . 将这两个三角形相等的边重合拼成凸四边形, 如果凸四边形的奇异中位线的长不为 0, 那么奇异中位线的长是 $\frac{7}{10}\text{cm}$.

【考点】 KA: 全等三角形的性质; KX: 三角形中位线定理.

【专题】 23: 新定义.

【分析】 首先利用勾股定理的逆定理得出边长分别为 3cm , 4cm , 5cm 的三角形是直角三角形, 然后将这两个直角三角形相等的边重合拼成凸四边形, 如果凸四边形的奇异中位线的长不为 0, 那么只有一种情况, 画出图形, 根据正弦函数的定义求出 OA , 由中点的定义得出 AM , 再根据 $OM = AM - OA$ 即可求解.

【解答】 解: $\because 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$,

$\therefore$ 边长分别为 3cm , 4cm , 5cm 的三角形是直角三角形.

如图, 将两个全等的直角 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的斜边 AC 与 DF 重合, 拼成凸四边形 $ABCE$, AC 与 BE 交于点 O , M 为 AC 的中点.

$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$,

$\therefore AB = AE = 3\text{cm}$, $\angle BAC = \angle EDF$,

$\therefore BO = OE$, $AO \perp BE$.

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\because \angle AOB = 90^\circ$,

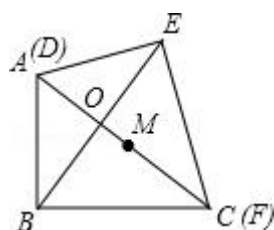
$\therefore OA = AB \cdot \cos \angle BAO = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$,

$$\because AM = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2},$$

$$\therefore OM = AM - OA = \frac{5}{2} - \frac{9}{5} = \frac{7}{10}.$$

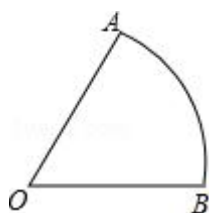
即奇异中位线的长是 $\frac{7}{10}cm$.

故答案为 $\frac{7}{10}$.



【点评】 本题考查了勾股定理的逆定理，图形的拼组，等腰三角形的性质，锐角三角函数的定义，难度适中．根据题目要求画出符合题意的图形是解题的关键．

18. (4分) 如图，扇形 OAB 的圆心角为 2α ，点 P 为弧 AB 上一点，将此扇形翻折，当点 O 和点 P 重合时折痕恰巧过点 B ，且 $\frac{AB}{PB} = \frac{6}{5}$ ，则 α 的正切值为 $\frac{3}{4}$ ．



【考点】 PB：翻折变换（折叠问题）．

【专题】 11：计算题．

【分析】 BE 为折痕作 $OC \perp AB$ 于 C ，交弧 AB 于 D ，设 $AB = 6t$ ， $PB = 5t$ ，根据折叠的性质得 $BP = BO = 5t$ ，由于 $OC \perp AB$ ，根据垂径定理得 $AC = BC = \frac{1}{2}AB = 3t$ ，弧 $AD =$ 弧 BD ，则 $\angle BOD = \frac{1}{2}\angle AOB = \alpha$ ，在 $Rt\triangle BOC$ 中，先根据勾股定理计算出 $OC = 4t$ ，然后根据正切的定义求解．

【解答】 解： BE 为折痕，作 $OC \perp AB$ 于 C ，交弧 AB 于 D ，如图，

$$\because \frac{AB}{PB} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore \text{设 } AB = 6t, PB = 5t,$$

$\because$ 点 O 和点 P 重合时折痕恰巧过点 B ，

【考点】&E: 二元二次方程组.

【分析】将 $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 分解因式求出 $x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - y)(x - 2y)$, 进而重新组合方程组求出即可.

【解答】解: 由 ①得 $x - y = 0$, $x - 2y = 0$.

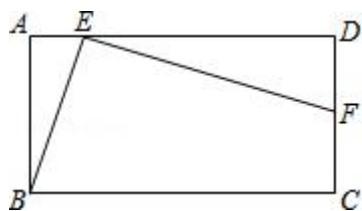
原方程组化为
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases},$$

分别解这两个方程组, 得原方程组的解是: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.$

【点评】此题主要考查了二元二次方程组的解法, 根据已知分解因式 $x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - y)(x - 2y)$ 是解题关键.

21. (10 分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $AD = 5$, 点 E 在 AD 上, 且 $AE:ED = 1:4$, 联结 BE , 射线 $EF \perp BE$ 交边 DC 于点 F . 求 CF 的长.



【考点】LB: 矩形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】先由矩形 $ABCD$, 得 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, 再推得 $\angle ABE = \angle DEF$, 根据两组对应角相等, 得到 $\triangle ABE \sim \triangle DEF$, 再由对应边的比相等即可得 DF 的长, 最后求 CF 的长.

【解答】解: $\because AE:ED = 1:4$, $AD = 5$,

$$\therefore AE = 1, ED = 4,$$

$$\because \text{矩形 } ABCD, \therefore \angle A = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB + \angle ABE = 90^\circ$$

$$\because EF \perp BE,$$

$$\therefore \angle AEB + \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DEF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{ED}{DF},$$

$$\therefore \frac{3}{1} = \frac{4}{DF},$$

$$\therefore DF = \frac{4}{3}.$$

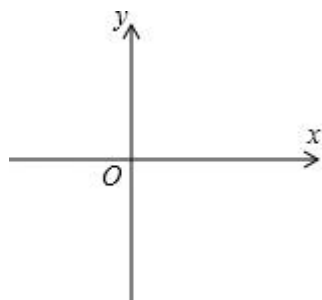
$$\therefore CF = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}.$$

【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质. 先由矩形 $ABCD$, 得 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, 再推得 $\angle ABE = \angle DEF$, 根据两组对应角相等, 得到 $\triangle ABE \sim \triangle DEF$, 再由对应边的比相等即可得 DF 的长, 最后求 CF 的长.

22. (10 分) 某商店第一次用 600 元购进某种型号的铅笔若干支, 第二次又用 600 元购进该款铅笔, 但这次每支的进价比第一次贵 1 元, 所以购进数量比第一次少了 30 支.

(1) 求第一次每支铅笔的进价及购进的数量.

(2) 若将这两次购进的铅笔按同一单价 x (元/支) 全部销售完毕, 并要求获利不低于 420 元, 求获利 y (元) 关于单价 x (元/支) 的函数关系式及定义域, 并在直角坐标系内画出它的大致图象.



【考点】 B7: 分式方程的应用; FH: 一次函数的应用.

【分析】 (1) 利用第二次购进数量比第一次少了 30 支, 进而得出关系式进而得出答案;

(2) 利用 (1) 中所求, 得出 $y = (x - 4) \times 150 + (x - 5) \times 120$ 进而求出即可.

【解答】 解: (1) 设第一次每支铅笔的进价为 a 元/支,

$$\text{则据题意得: } \frac{600}{a} - \frac{600}{a+1} = 30,$$

$$\therefore a_1 = 4, a_2 = -5 \text{ (舍)},$$

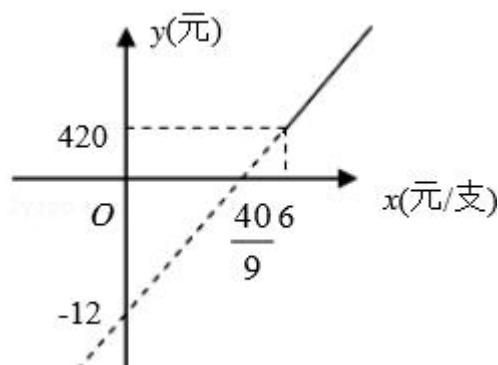
$$\frac{600}{4} = 150,$$

答：第一次每支铅笔的进价是 4 元，购进 150 支；

(2) 由题意得： $y = (x - 4) \times 150 + (x - 5) \times 120 = 270x - 1200$

即获利 y (元) 关于单价 x (元/支) 的函数关系为：

$y = 270x - 1200$ ($x \geq 6$).

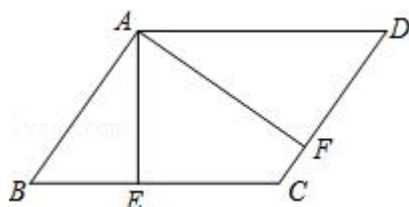


【点评】 此题主要考查了一次函数的应用以及分式方程的应用，利用第二次购进数量比第一次少了 30 支得出等式是解题关键.

23. (12 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于 E ， $AF \perp CD$ 于 F .

(1) 求证： $CD \cdot DF = BC \cdot BE$;

(2) 若 M 、 N 分别是 AB 、 AD 中点，且 $\angle B = 60^\circ$ ，求证： $EM \parallel FN$.



【考点】 L5：平行四边形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形得到 $\angle ABD = \angle ADC$ ，再有 $\angle AEB = \angle AFD = 90^\circ$ ，可得 $\triangle ABE \sim \triangle ADF$ ，于是 $\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DF}$ ，进而 $\frac{CD}{BC} = \frac{BE}{DF}$ ，即 $CD \cdot DF = BC \cdot BE$ ；(2) 延长 EM 交 DA 的延长线于点 Q ，由四边形 $ABCD$ 是平行四边形得到 $\angle Q = \angle MEB$ ， $AE \perp BC$ 于 E ， M 是 AB 中点， $ME = \frac{1}{2}AB = MB$ ， $\angle MEB = \angle B$ ，所以 $\angle Q = 60^\circ$ ，同样求得 $\angle DNF = 60^\circ$ ， $\angle DNF = \angle Q$ ，即可得 $EM \parallel FN$.

【解答】 证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle ABD = \angle ADC$,

$\because AE \perp BC$ 于 E , $AF \perp CD$ 于 F ,

$\therefore \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADF$,

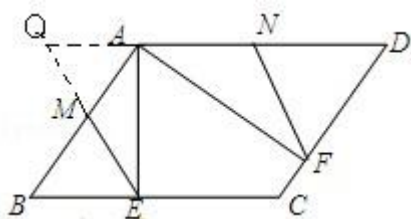
$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DF},$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore AB = CD$, $AD = BC$,

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{BE}{DF}, \text{ 即 } CD \cdot DF = BC \cdot BE;$$

(2) 延长 EM 交 DA 的延长线于点 Q ,



$\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore DQ \parallel BC$, $\angle Q = \angle MEB$,

$\because AE \perp BC$ 于 E , M 是 AB 中点,

$$\therefore ME = \frac{1}{2} AB = MB$$

$\therefore \angle MEB = \angle B$,

$\therefore \angle Q = \angle B$,

$\because \angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle Q = 60^\circ$,

$\because AF \perp CD$ 于 F , N 是 AD 中点,

$$\therefore NF = \frac{1}{2} AD = ND, \angle NFD = \angle D,$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$\therefore \angle D = \angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle NFD = \angle D = 60^\circ$,

$\therefore \angle DNF = 60^\circ$,

$\therefore \angle DNF = \angle Q$,

$\therefore EM \parallel FN$.

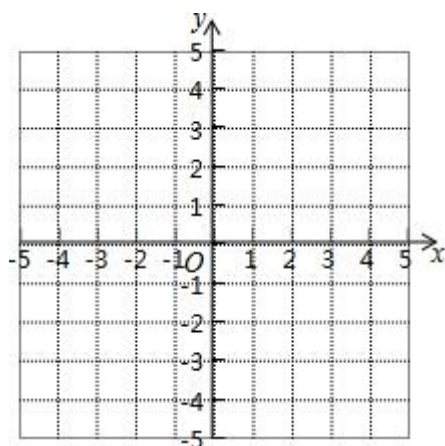
【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质，还用到等腰三角形的判定与性质，直角三角形的性质，熟练掌握这些性质是解题的关键。

24. (12分) 已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 4$ 与 x 轴交于点 A 、 B (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ， $\triangle ABC$ 的面积为 12.

(1) 求抛物线的对称轴及表达式；

(2) 若点 P 在 x 轴上方的抛物线上，且 $\tan \angle PAB = \frac{1}{2}$ ，求点 P 的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下，过 C 作射线交线段 AP 于点 E ，使得 $\tan \angle BCE = \frac{1}{2}$ ，联结 BE ，试问 BE 与 BC 是否垂直？请通过计算说明。



【考点】 HF：二次函数综合题。

【分析】 (1) 根据对称轴直线公式求得对称轴；由抛物线解析式求得点 C 的坐标，然后由三角形面积公式来求 a 的值；

(2) 如图，过 P 作 $PH \perp x$ 轴于点 H 。根据已知条件可设 $PH = k$ ， $AH = 2k$ ，则 P 点的坐标是 $(2k - 2, k)$ ($k > 0$)。根据二次函数图象上点的坐标特征得到： $k = \frac{1}{2}(2k - 2)^2 - (2k - 2) - 4$ ，则易求 k 的值；

(3) 是。设 AE 交 y 轴于点 D ，通过证明 $\triangle AOC \sim \triangle EBC$ ，推知对应角相等： $\angle EBC = \angle AOC = 90^\circ$ ，故 $BE \perp BC$ 。

【解答】 (1) 解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 4$ ，

$\therefore$ 与 y 轴交点 $C(0, -4)$

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = \frac{2a}{2a} = 1$ ，

$\because$ 抛物线与 x 轴交于点 A 、 B ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 12， $\therefore AB = 6$ ，

$\therefore$ 点 $A(-2, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，

∵ 抛物线过点 A ,

$$\therefore 0 = 4a + 4a - 4, \quad \therefore a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线表达式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4;$$

(2) 解: 如图, 过 P 作 $PH \perp x$ 轴于点 H .

$$\therefore \tan \angle PAB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{设 } PH = k, \quad AH = 2k,$$

$$\therefore P \text{ 点的坐标是 } (2k - 2, k) \quad (k > 0).$$

∵ 点 P 在抛物线上,

$$\therefore k = \frac{1}{2} (2k - 2)^2 - (2k - 2) - 4,$$

$$\therefore k = \frac{7}{2},$$

$$\therefore P \left(5, \frac{7}{2} \right);$$

(3) 是.

证明: 设 AE 交 y 轴于点 D ,

$$\therefore A(-2, 0), \quad C(0, -4),$$

$$\therefore \tan \angle ACO = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle PAB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle PAB = \angle ACO,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle OAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB + \angle OAC = 90^\circ,$$

$$\therefore PA \perp AC,$$

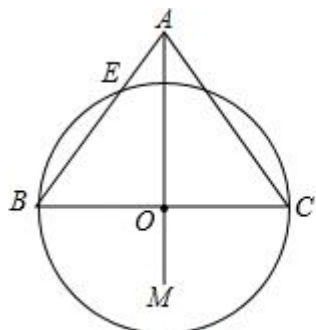
$$\therefore \tan \angle BCE = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle ACO = \angle BCE,$$

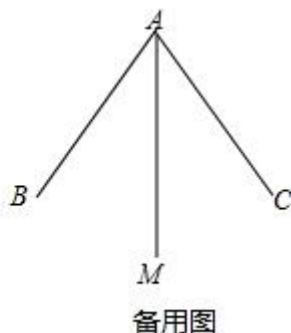
$$\therefore \angle ACE = \angle OCB$$

$$\therefore B(4, 0), \quad C(0, -4),$$

- (2) 以点 A 为圆心, AO 为半径画圆, 如果 $\odot A$ 与 $\odot O$ 相切, 求 AO 的长;
 (3) 试就点 E 在直线 AB 上相对于 A 、 B 两点的位置关系加以讨论, 并指出相应的 AO 的取值范围;



图(1)



备用图

【考点】MR: 圆的综合题.

【分析】(1) 根据 AM 平分 $\angle BAC$, $AB = AC$, 由等腰三角形的性质可得出 $AM \perp BC$, 根据 $\cos \angle BAM = \frac{4}{5}$, 求得 $BO = 6$, $AO = 8$, 作 $OH \perp AE$, 因为 O 为圆心, 则 $BH = EH$, 在 $\text{Rt} \triangle BOH$ 中, $\frac{BH}{BO} = \cos B$, 求得 BH , 从而得出 BE 的长.

(2) 根据 $\odot A$ 与 $\odot O$ 相切, 可得出 $\odot A$ 与 $\odot O$ 只可能相内切, 且 $\odot A$ 在 $\odot O$ 的内部, 则 $OB = 2OA$, 设 $OA = x$, 则 $OB = 2x$, 作 $BP \perp AM$, 则 $AP = 8$, $BP = 6$, $OP = 8 - x$,

在 $\text{Rt} \triangle BPO$ 中, 根据勾股定理得出 $OP^2 + BP^2 = OB^2$, 代入求得 x 即可.

(3) 过 AB 中点作 AB 的垂线交 AM 于点 O_1 , 可得 $AO_1 = \frac{25}{4}$, 过 B 作 AB 的垂线交 AM 于点 O_2 , 可得 $AO_2 = \frac{25}{2}$, 分三种情况: ①当 $0 \leq AO < \frac{25}{4}$ 时, 点 E 在 BA 的延长线上; ②当 $\frac{25}{4} \leq AO < \frac{25}{2}$ 时, 点 E 在线段 AB 上; ③当 $AO > \frac{25}{2}$ 时, 点 E 在 AB 的延长线上.

【解答】解: (1) $\because AM$ 平分 $\angle BAC$, $AB = AC$,

$\therefore AM \perp BC$,

$\because \cos \angle BAM = \frac{4}{5}$, $AB = 10$,

$\therefore \cos \angle B = \frac{3}{5}$, $BO = 6$, $AO = 8$,

作 $OH \perp AE$,

$\because O$ 为圆心,

$$\therefore BH = EH,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOH$ 中, $\frac{BH}{BO} = \cos B$,

$$\therefore BH = 6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5},$$

$$\therefore BE = 2BH = \frac{36}{5}.$$

(2) $\because \odot A$ 与 $\odot O$ 相切, AO 为 $\odot A$ 半径,

$\therefore \odot A$ 与 $\odot O$ 只可能相内切, 且 $\odot A$ 在 $\odot O$ 的内部,

$$\therefore OA = OB - OA,$$

$$\therefore OB = 2OA,$$

设 $OA = x$, 则 $OB = 2x$,

作 $BP \perp AM$, 则 $AP = 8$, $BP = 6$, $OP = 8 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle BPO$ 中, $OP^2 + BP^2 = OB^2$, 即 $(8 - x)^2 + 6^2 = 4x^2$,

$$\therefore 3x^2 + 16x - 100 = 0,$$

$$\therefore x = \frac{-8 \pm 2\sqrt{91}}{3}, \text{ (负舍)},$$

$$\therefore OA = x = \frac{-8 + 2\sqrt{91}}{3}.$$

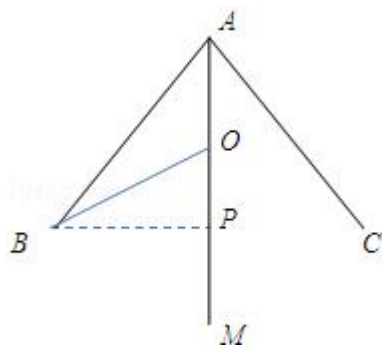
(3) 过 AB 中点作 AB 的垂线交 AM 于点 O_1 , 可得 $AO_1 = \frac{25}{4}$,

过 B 作 AB 的垂线交 AM 于点 O_2 , 可得 $AO_2 = \frac{25}{2}$,

当 $0 \leq AO < \frac{25}{4}$ 时, 点 E 在 BA 的延长线上;

当 $\frac{25}{4} \leq AO < \frac{25}{2}$ 时, 点 E 在线段 AB 上;

当 $AO > \frac{25}{2}$ 时, 点 E 在 AB 的延长线上.



【点评】 本题考查了圆的综合知识, 等腰三角形三线合一的性质, 勾股定理以及

三角函数的定义，注意图形之间的联系.