

2014 年上海市闸北区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的.

1. (4 分) 9 的平方根是 ()

- A. 3 B. -3 C. 3 和 -3 D. 9

2. (4 分) 下列实数中，是无理数的是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{25}$ C. $\frac{22}{7}$ D. $\cos 60^\circ$

3. (4 分) 在下列二次根式中，与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{2a}$ B. $\sqrt{3a^2}$ C. $\sqrt{a^3}$ D. $\sqrt{a^4}$

4. (4 分) 下列方程有实数根的是 ()

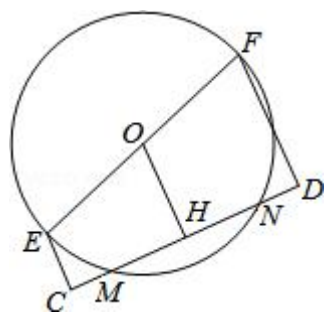
- A. $x^2 - x + 1 = 0$ B. $x^4 = 0$ C. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$ D. $\sqrt{x^2 + 1} = 0$

5. (4 分) 某中学篮球队 14 名队员的年龄情况如表，则这些队员年龄的众数和中位数分别是 ()

年龄 (单位: 岁)	14	15	16	17	18
人数	2	3	4	3	2

- A. 15, 16 B. 16, 16 C. 16, 16.5 D. 17, 16.5

6. (4 分) 如图, EF 是 $\odot O$ 的直径, CD 交 $\odot O$ 于 M 、 N , H 为 MN 的中点, $EC \perp CD$ 于点 C , $FD \perp CD$ 于点 D , 则下列结论错误的是 ()



- A. $CM = DN$ B. $CH = HD$ C. $OH \perp CD$ D. $\frac{EC}{OH} = \frac{OH}{FD}$

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 我国最长的河流长江全长约为 6300 千米, 用科学记数法表示为

千米.

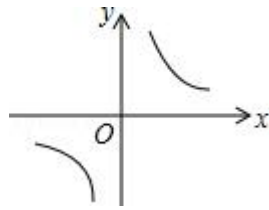
8. (4分) 计算: $x^{4n} \div x^n =$ _____.

9. (4分) 分解因式: $2a^2 - 2 =$ _____.

10. (4分) 化简 $\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}$ 的结果是 _____.

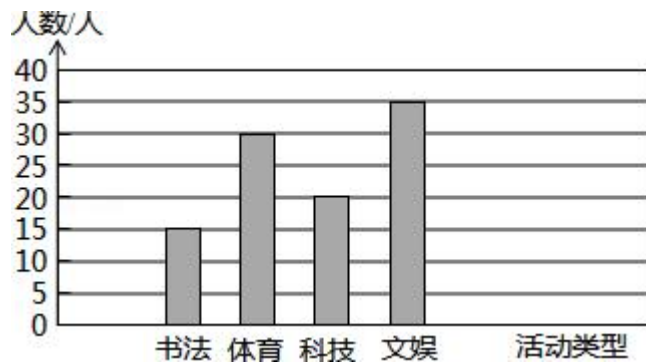
11. (4分) 方程 $\sqrt{x+1}=2$ 的根是 _____.

12. (4分) 已知反比例函数 $y = \frac{m-1}{x}$ 的图象如图所示, 则实数 m 的取值范围是 _____.



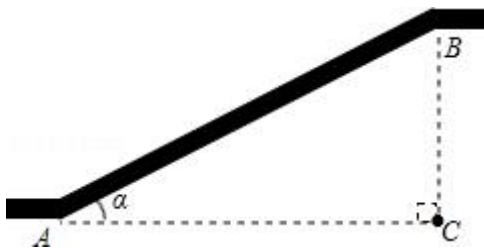
13. (4分) 从等边三角形、平行四边形、矩形、菱形、圆、等腰梯形共 6 个图形中任选一个图形, 选出的图形恰好是中心对称图形的概率为 _____.

14. (4分) 某校对初中学生开展的四项课外活动进行了一次抽样调查 (每人只参加其中的一项活动), 调查结果如图根据图形所提供的样本数据, 可得学生参加科技活动的频率是 _____.

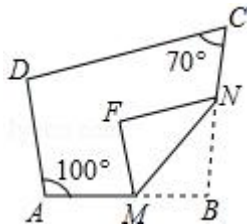


15. (4分) 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, 且 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向, 则用向量 $\vec{b}$ 表示向量 $\vec{a}$, 即 $\vec{a} =$ _____ $\vec{b}$.

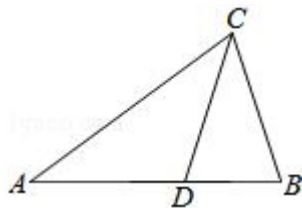
16. (4分) 如图, 自动扶梯 AB 段的长度为 20 米, 倾斜角 A 为 α , 高度 BC 为 _____ 米 (结果用含 α 的三角比表示).



17. (4分) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, 点 M 、 N 分别在 AB 、 BC 上, 将 $\triangle BMN$ 沿 MN 翻折, 得 $\triangle FMN$, 若 $MF \parallel AD$, $FN \parallel DC$, 则 $\angle B =$ _____ $^\circ$.



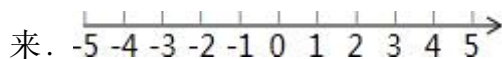
18. (4分) 如图, 等腰 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的度数是 36° , 点 D 是腰 AB 的黄金分割点 ($AD > BD$), 将 $\triangle BCD$ 绕着点 C 按照顺时针方向旋转一个角度后点 D 落在点 E 处, 联结 AE , 当 $AE \parallel CD$ 时, 这个旋转角是_____度.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{2}{\tan 60^\circ + 1} + (\pi - 1)^0 + |-\sqrt{3}| + (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$.

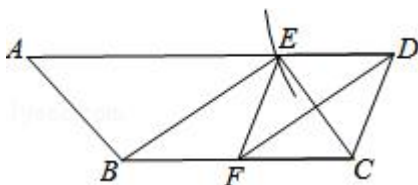
20. (10分) 解不等式组: $\begin{cases} -2x+1 < x+4 & \text{①} \\ \frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} \leq 1 & \text{②} \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示出



21. (10分) 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, DF 平分 $\angle D$, 若以点 D 为圆心, DC 长为半径作弧, 交边 AD 于点 E , 联结 EF 、 BE 、 EC .

(1) 求证: 四边形 $EDCF$ 是菱形;

(2) 若点 F 是 BC 的中点, 请判断线段 BE 和 EC 的位置关系, 并证明你的结论.



22. (10分) 全面实现低碳生活已逐渐成为人们的共识. 某企业为了发展低碳经济, 采用技术革新, 减少二氧化碳的排放. 随着排放量的减少, 企业相应获得的利润也有所提高, 且相应获得的利润 y (万元) 与月份 x (月)

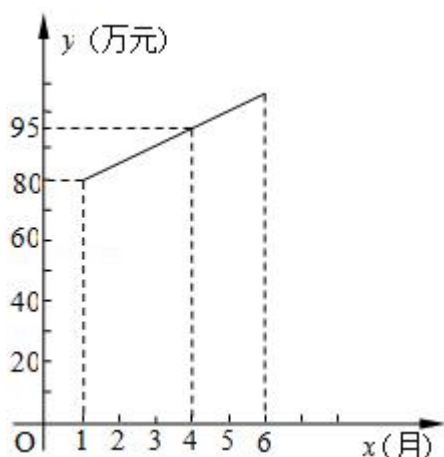
($1 \leq x \leq 6$) 的函数关系如图所示:

(1) 根据图象, 请判断: y 与 x ($1 \leq x \leq 6$) 的变化规律应该符合_____函数关系式;

(填写序号: ①反比例函数、②一次函数、③二次函数);

(2) 求出 y 与 x ($1 \leq x \leq 6$) 的函数关系式 (不写取值范围);

(3) 经统计发现, 从 6 月到 8 月每月利润的增长率相同, 且 8 月份的利润为 151.2 万元, 求这个增长率.

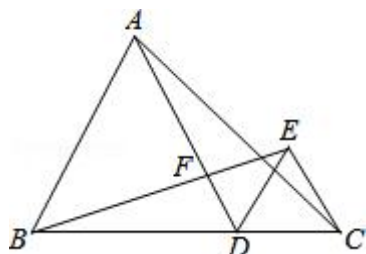


23. (12分) 已知: 如图, 点 D 是线段 BC 上的任意一点, $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCE$ 都是等边三角形, AD 与 BE 交于点 F .

(1) 求证: $\triangle BDE \cong \triangle ADC$;

(2) 求证: $AB^2 = BC \cdot AF$;

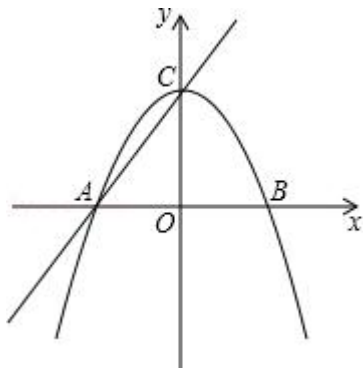
(3) 若 $BD = 12$, $CD = 6$, 求 $\angle ABF$ 的正弦值.



24. (12分) 已知: 如图, 二次函数 $y = ax^2 + 4$ 的图象与 x 轴交于点 A 和点 B (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 且 $\cos \angle CAO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求二次函数的解析式;

- (2) 若以点 O 为圆心的圆与直线 AC 相切于点 D , 求点 D 的坐标;
- (3) 在 (2) 的条件下, 抛物线上是否存在点 P 使得以 P 、 A 、 D 、 O 为顶点的四边形是直角梯形? 若存在, 请求出点 P 坐标; 若不存在, 请说明理由.



25. (14 分) 已知: 如图①, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6$, $BC = 4$, 点 D 在 BC 的延长线上, 联结 AD , 以 AD 为一边作 $\triangle ADE$, 使点 E 与点 B 位于直线 AD 的两侧, 且 $AD = AE$, $\angle DAE = \angle BAC$.

- (1) 如果 $AE \parallel BC$, 请判断四边形 $ABDE$ 的形状并证明;
- (2) 如图②, 设 M 是 BC 中点, N 是 DE 中点, 联结 AM 、 AN 、 MN , 求证: $\triangle ABD \sim \triangle AMN$;
- (3) 设 $BD = x$, 在 (2) 的前提下, 以 BC 为直径的 $\odot M$ 与以 DE 为直径的 $\odot N$ 存在着哪些位置关系? 并求出相应的 x 的取值范围 (直接写出结论).

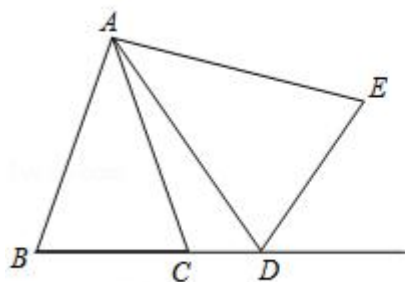


图 ①

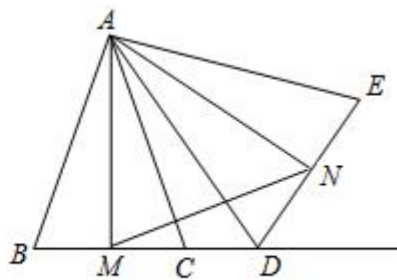


图 ②

2014 年上海市闸北区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的.

1. (4 分) 9 的平方根是 ()

- A. 3 B. -3 C. 3 和 -3 D. 9

【考点】21: 平方根.

【分析】根据平方根的定义解答即可.

【解答】解: $\because (\pm 3)^2 = 9$,

$\therefore 9$ 的平方根是 3 或 -3.

故选: C.

【点评】本题考查了平方根的定义, 是基础题, 熟记概念是解题的关键.

2. (4 分) 下列实数中, 是无理数的是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{25}$ C. $\frac{22}{7}$ D. $\cos 60^\circ$

【考点】26: 无理数.

【分析】无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念, 一定要同时理解有理数的概念, 有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数, 而无限不循环小数是无理数. 由此即可判定选择项.

【解答】解: A、是无理数, 选项正确;

B、 $\sqrt{25} = 5$ 是整数, 是有理数, 选项错误;

C、是分数, 是有理数, 选项错误;

D、 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, 是分数, 是有理数, 选项错误.

故选: A.

【点评】此题主要考查了无理数的定义, 其中初中范围内学习的无理数有: π , 2π 等; 开方开不尽的数; 以及像 0.1010010001..., 等有这样规律的数.

3. (4 分) 在下列二次根式中, 与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{2a}$ B. $\sqrt{3a^2}$ C. $\sqrt{a^3}$ D. $\sqrt{a^4}$

【考点】 77: 同类二次根式.

【分析】 先将各选项化简, 再找到被开方数为 a 的选项即可.

【解答】 解: A 、 $\sqrt{2a}$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同, 故不是同类二次根式;

B 、 $\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a|$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同, 故不是同类二次根式;

C 、 $\sqrt{a^3} = |a|\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数相同, 故是同类二次根式;

D 、 $\sqrt{a^4} = a^2$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同, 故不是同类二次根式.

故选: C .

【点评】 此题主要考查了同类二次根式的定义, 即: 化成最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

4. (4 分) 下列方程有实数根的是 ()

$A. x^2 - x + 1 = 0$ $B. x^4 = 0$ $C. \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$ $D. \sqrt{x^2+1} = 0$

【考点】 AA: 根的判别式; AF: 高次方程; AG: 无理方程; B2: 分式方程的解.

【分析】 本题是根的判别式的应用试题, 不解方程而又准确的判断出方程解的情况, 那只有根的判别式.

当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根;

当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根;

当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根.

【解答】 解: A 、 $x^2 - x + 1 = 0$,

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0,$$

所以没有实数根, 故选项错误;

B 、 $x^4 = 0$ 的实数根是 $x = 0$, 故选项正确;

C 、去掉分母后 $x = 1$ 有实数根, 但是使分式方程无意义, 所以舍去, 故选项错误;

D 、 $\sqrt{x^2+1} = 0$, 两边平方得 $x^2+1 = 0$ 的 $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 < 0$,

也没有实数根, 故选项错误.

故选: B .

【点评】 本题是对方程实数根的考查, 求解时一要注意是否有实数根, 二要注意

有实数根时是否有意义.

5. (4分) 某中学篮球队 14 名队员的年龄情况如表, 则这些队员年龄的众数和中位数分别是 ()

年龄 (单位: 岁)	14	15	16	17	18
人数	2	3	4	3	2

- A. 15, 16 B. 16, 16 C. 16, 16.5 D. 17, 16.5

【考点】 W4: 中位数; W5: 众数.

【分析】 根据众数的定义即众数是一组数据中出现次数最多的数和中位数的定义即中位数是将一组数据从小 (或到大从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 即可得出答案.

【解答】 解: 16 出现了 4 次, 出现的次数最多, 则众数是 16;

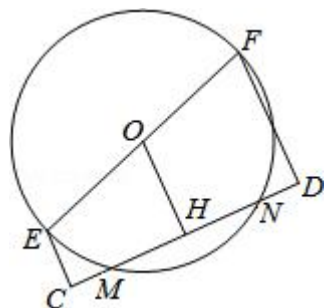
因为共有 14 个数, 把这组数据从小到大排列, 最中间两个数的平均数是第 7 个数和第 8 个数的平均数,

所以中位数是 $(16+16) \div 2 = 16$;

故选: B.

【点评】 此题考查了众数和中位数, 众数是一组数据中出现次数最多的数, 中位数是将一组数据从小 (或到大从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数), 叫做这组数据的中位数.

6. (4分) 如图, EF 是 $\odot O$ 的直径, CD 交 $\odot O$ 于 M 、 N , H 为 MN 的中点, $EC \perp CD$ 于点 C , $FD \perp CD$ 于点 D , 则下列结论错误的是 ()



- A. $CM = DN$ B. $CH = HD$ C. $OH \perp CD$ D. $\frac{EC}{OH} = \frac{OH}{FD}$

【考点】 LL: 梯形中位线定理; M2: 垂径定理.

【分析】 根据垂径定理的推论以及梯形的中位线定理, 可判断 A、B、C 正确,

再由排除法可知 D 错误.

【解答】 解: $\because H$ 为 MN 的中点,

$\therefore OH \perp CD$, 故 C 正确;

$\because EC \perp CD$ 于点 C , $FD \perp CD$ 于点 D ,

$\therefore EC \parallel OH \parallel FD$,

又 $\because EF$ 是 $\odot O$ 的直径, $OE = OF$,

$\therefore CH = HD$, 故 B 正确;

$\because CH = HD$, H 为 MN 的中点,

$\therefore CM = DN$, 故 A 正确;

由排除法可知 D 错误,

故选: D .

【点评】 本题主要考查了垂径定理的推论以及梯形的中位线定理, 熟练掌握定理及推论是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 我国最长的河流长江全长约为 6300 千米, 用科学记数法表示为 6.3×10^3 千米.

【考点】 11: 科学记数法—表示较大的数.

【专题】 12: 应用题.

【分析】 科学记数法就是将一个数字表示成 ($a \times 10$ 的 n 次幂的形式), 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 表示整数. n 为整数位数减 1, 即从左边第一位开始, 在首位非零的后面加上小数点, 再乘以 10 的 n 次幂. 此题 $n > 0$, $n = 3$.

【解答】 解: $6\,300 = 6.3 \times 10^3$.

故答案为: 6.3×10^3 .

【点评】 用科学记数法表示一个数的方法是

(1) 确定 a : a 是只有一位整数的数;

(2) 确定 n : 当原数的绝对值 ≥ 10 时, n 为正整数, n 等于原数的整数位数减 1; 当原数的绝对值 < 1 时, n 为负整数, n 的绝对值等于原数中左起第一个非零数前零的个数 (含整数位数上的零).

8. (4 分) 计算: $x^{4n} \div x^n = \underline{x^{3n}}$.

【考点】48：同底数幂的除法.

【分析】运用同底数幂的除法法则计算.

【解答】解： $x^{4n} \div x^n = x^{3n}$.

故答案为： x^{3n} .

【点评】本题主要考查了同底数幂的除法，熟记法则是解题的关键.

9. (4分) 分解因式： $2a^2 - 2 = \underline{2(a+1)(a-1)}$.

【考点】55：提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】先提取公因式2，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【解答】解： $2a^2 - 2$,

$$= 2(a^2 - 1),$$

$$= 2(a+1)(a-1).$$

【点评】本题考查了提公因式法和公式法进行因式分解，一个多项式有公因式首先提取公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能分解为止.

10. (4分) 化简 $\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}$ 的结果是 $\underline{\frac{1}{x-1}}$.

【考点】6B：分式的加减法.

【分析】将分母化为同分母，通分，再将分子因式分解，约分.

【解答】解： $\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$.

故答案为： $\frac{1}{x-1}$.

【点评】本题考查了分式的加减运算. 分式的加减运算中，如果是同分母分式，那么分母不变，把分子直接相加减即可；如果是异分母分式，则必须先通分，把异分母分式化为同分母分式，然后再相加减.

11. (4分) 方程 $\sqrt{x+1}=2$ 的根是 $\underline{x=3}$.

【考点】AG：无理方程.

【分析】方程两边同时平方，即可转化成一元一次方程，解得x的值，然后代入原方程进行检验即可.

【解答】解：方程两边同时平方得： $x+1=4$,

解得： $x=3$.

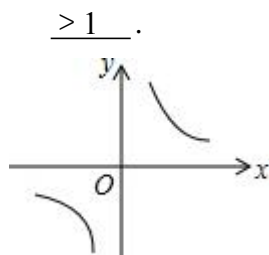
检验： $x=3$ 时，左边 $=\sqrt{3+1}=2$ ，则左边 = 右边.

故 $x=3$ 是方程的解.

故答案是： $x=3$.

【点评】 本题考查了无理方程的解法，解无理方程的基本思路是转化成整式方程，并且解方程时必须要检验.

12. (4 分) 已知反比例函数 $y = \frac{m-1}{x}$ 的图象如图所示，则实数 m 的取值范围是 m



【考点】 G4：反比例函数的性质.

【分析】 先根据反比例函数的图象在一、三象限列出关于 m 的不等式，求出 m 的取值范围即可.

【解答】 解： $\because$ 由图可知反比例函数的图象在一、三象限，

$\therefore m-1 > 0$ ，即 $m > 1$.

故答案为： $m > 1$.

【点评】 本题考查的是反比例函数的性质，熟知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 中，

当 $k > 0$ 时函数图象的两个分支分别位于一三象限是解答此题的关键.

13. (4 分) 从等边三角形、平行四边形、矩形、菱形、圆、等腰梯形共 6 个图形中任选一个图形，选出的图形恰好是中心对称图形的概率为 $\frac{2}{3}$.

【考点】 R6：关于原点对称的点的坐标；X4：概率公式.

【分析】 根据中心对称图形的定义得出所有的中心对称图形，进而利用概率公式求出即可.

【解答】 解： $\because$ 等边三角形、平行四边形、矩形、菱形、圆、等腰梯形共 6 个图形中，

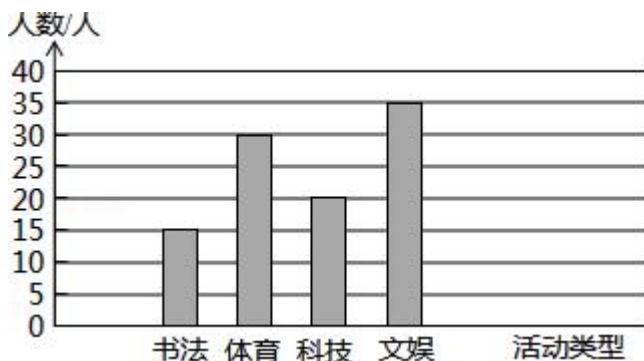
中心对称图形有：平行四边形、矩形、菱形、圆共 4 个，

$\therefore$ 6 个图形中任选一个图形，选出的图形恰好是中心对称图形的概率为： $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点评】此题主要考查了中心对称图形的定义以及概率公式的应用，正确把握中心对称图形的定义是解题关键.

14. (4分) 某校对初中学生开展的四项课外活动进行了一次抽样调查(每人只参加其中的一项活动), 调查结果如图根据图形所提供的样本数据, 可得学生参加科技活动的频率是 0.2.



【考点】V6: 频数与频率; VC: 条形统计图.

【分析】首先根据统计图, 得到总人数和参加科技活动的人数; 再根据频率 = 频数 $\div$ 总数进行计算即可.

【解答】解: 根据图可得:

共有 $(15+30+20+35) = 100$ 人, 参加科技活动的频数是 20,

则参加科技活动的频率 0.2.

故答案为: 0.2.

【点评】本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力. 利用统计图获取信息时, 必须认真观察、分析、研究统计图, 才能作出正确的判断和解决问题.

15. (4分) 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, 且 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向, 则用向量 $\vec{b}$ 表示向量 $\vec{a}$, 即 $\vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{b}$.

【考点】LM: *平面向量.

【分析】先表示出两个向量模的关系, 再根据反向解答即可.

【解答】解: $\because |\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$,

$$\therefore |\vec{a}| = \frac{3}{5}|\vec{b}|,$$

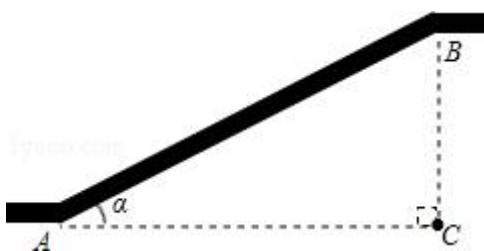
$\therefore \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向,

$$\therefore \vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{b}.$$

故答案为: $-\frac{3}{5}$.

【点评】 本题考查了平面向量, 难点在于反向向量的表示方法.

16. (4分) 如图, 自动扶梯 AB 段的长度为 20 米, 倾斜角 A 为 α , 高度 BC 为 $20\sin\alpha$ 米 (结果用含 α 的三角比表示).



【考点】 T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

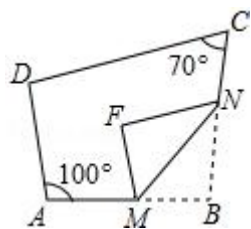
【分析】 利用所给角的正弦函数求解.

【解答】 解: $\because \sin\alpha = \frac{BC}{AB}$,

$$\therefore BC = AB \cdot \sin\alpha = 20\sin\alpha.$$

【点评】 此题主要考查三角函数定义的应用.

17. (4分) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, 点 M 、 N 分别在 AB 、 BC 上, 将 $\triangle BMN$ 沿 MN 翻折, 得 $\triangle FMN$, 若 $MF \parallel AD$, $FN \parallel DC$, 则 $\angle B =$ 95° .



【考点】 JA: 平行线的性质; K7: 三角形内角和定理; PB: 翻折变换 (折叠问题).

【分析】 根据两直线平行, 同位角相等求出 $\angle BMF$ 、 $\angle BNF$, 再根据翻折的性质求出 $\angle BMN$ 和 $\angle BNM$, 然后利用三角形的内角和定理列式计算即可得解.

【解答】 解: $\because MF \parallel AD$, $FN \parallel DC$,

$$\therefore \angle BMF = \angle A = 100^\circ, \quad \angle BNF = \angle C = 70^\circ,$$

$\because \triangle BMN$ 沿 MN 翻折得 $\triangle FMN$,

$$\therefore \angle BMN = \frac{1}{2} \angle BMF = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ ,$$

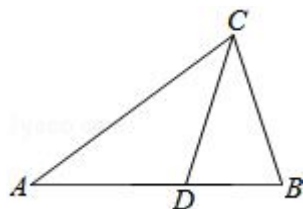
$$\angle BNM = \frac{1}{2} \angle BNF = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ ,$$

在 $\triangle BMN$ 中, $\angle B = 180^\circ - (\angle BMN + \angle BNM) = 180^\circ - (50^\circ + 35^\circ) = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$.

故答案为: 95.

【点评】 本题考查了两直线平行, 同位角相等的性质, 翻折变换的性质, 三角形的内角和定理, 熟记性质并准确识图是解题的关键.

18. (4分) 如图, 等腰 $\triangle ABC$ 的顶角 A 的度数是 36° , 点 D 是腰 AB 的黄金分割点 ($AD > BD$), 将 $\triangle BCD$ 绕着点 C 按照顺时针方向旋转一个角度后点 D 落在点 E 处, 联结 AE , 当 $AE \parallel CD$ 时, 这个旋转角是 72 或 108 度.



【考点】 R2: 旋转的性质; S3: 黄金分割.

【分析】 先证出点 D 是腰 AB 的黄金分割点时, CD 是 $\angle ACB$ 的平分线, 当 $AE \parallel CD$ 时, 分两种情况, 利用图形解出旋转角为 72° 或 108° .

【解答】 解: 假设 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线,

$$\because \angle A = 36^\circ ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 72^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle DCB = 36^\circ ,$$

$$\therefore BC = DC = AD ,$$

$$\therefore \triangle CDB \sim \triangle ABC ,$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{DB}{BC} ,$$

$$\therefore AD : AB = DB : AD ,$$

点 D 是腰 AB 的黄金分割点,

$\therefore CD$ 是 $\angle ACB$ 的平分线,

①如图 1,

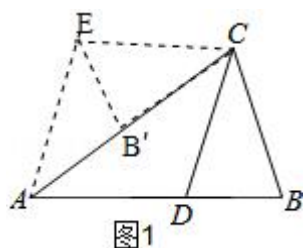


图1

$\because AE \parallel CD$ 时,

$\therefore \angle EAC = \angle ACD = 36^\circ$,

$\therefore EC \parallel AD$,

$\because AD = CD$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是菱形.

$\therefore$ 此时这个旋转角 72°

②如图 2,

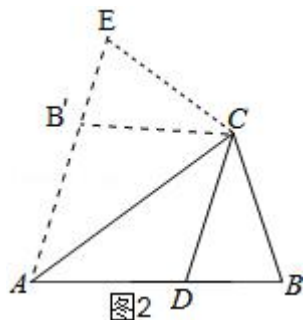


图2

$\because AE \parallel CD$ 时,

$\therefore \angle EAC = \angle ACD = 36^\circ$,

$\therefore B'C \parallel AD$,

$\because AD = CD$

$\therefore$ 四边形 $ADCB'$ 是菱形.

$\therefore \angle B'CD = 72^\circ$,

$\therefore \angle EB'C = 72^\circ$, $\angle B'EC = 72^\circ$,

$\therefore$ 此时这个旋转角 $36^\circ + 36^\circ + 36^\circ = 108^\circ$,

故答案为: 72 或 108.

【点评】 本题主要考查了旋转的性质及黄金分割, 解题的关键是求出 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{2}{\tan 60^\circ + 1} + (\pi - 1)^0 + |-\sqrt{3}| + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

【考点】2F: 分数指数幂; 6E: 零指数幂; 79: 二次根式的混合运算; T5: 特殊角的三角函数值.

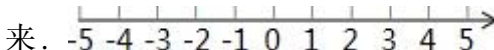
【专题】11: 计算题.

【分析】根据零指数幂、分数指数幂和特殊角的三角函数值得到原式 = $\frac{2}{\sqrt{3}+1} + 1 + \sqrt{3} + 2$, 然后分母有理化后合并即可.

【解答】解: 原式 = $\frac{2}{\sqrt{3}+1} + 1 + \sqrt{3} + 2$
 $= \sqrt{3} - 1 + 1 + \sqrt{3} + 2$
 $= 2\sqrt{3} + 2.$

【点评】本题考查了二次根式的混合运算: 先把各二次根式化为最简二次根式, 再进行二次根式的乘除运算, 然后合并同类二次根式. 也考查了零指数幂、分数指数幂和特殊角的三角函数值.

20. (10分) 解不等式组: $\begin{cases} -2x+1 < x+4 & \text{①} \\ \frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} \leq 1 & \text{②} \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示出来.



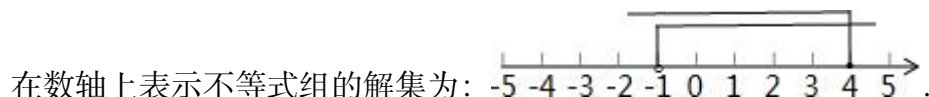
【考点】C4: 在数轴上表示不等式的解集; CB: 解一元一次不等式组.

【分析】先求出每个不等式的解集, 再根据找不等式组解集的规律找出不等式组的解集即可.

【解答】解: 解不等式①得: $x > -1$,

解不等式②得: $x \leq 4$,

所以不等式组的解集为 $-1 < x \leq 4$,



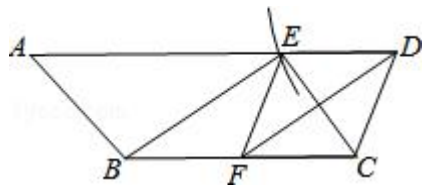
【点评】本题考查了解一元一次不等式, 解一元一次不等式组, 在数轴上表示不等式组的解集的应用, 解此题的关键是根据不等式的解集找出不等式组的解集.

21. (10分) 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, DF 平分 $\angle D$, 若以点 D 为圆心,

DC 长为半径作弧，交边 AD 于点 E ，联结 EF 、 BE 、 EC 。

(1) 求证：四边形 $EDCF$ 是菱形；

(2) 若点 F 是 BC 的中点，请判断线段 BE 和 EC 的位置关系，并证明你的结论。



【考点】 KD：全等三角形的判定与性质；LA：菱形的判定与性质；LH：梯形。

【分析】 (1) 根据圆的性质可得 $ED = DC$ ，根据 SAS 证明 $\triangle EDF \cong \triangle CDF$ ，可得 $EF = CF$ ，根据梯形的性质和平行线的性质，由等角对等边可得 $CF = CD$ ，再根据菱形的判定即可求解；

(2) 先根据平行四边形的判定可证四边形 $BEDF$ 是平行四边形，再根据菱形的性质即可求解。

【解答】 解：(1) $\because DF$ 平分 $\angle D$ ，

$$\therefore \angle EDF = \angle CDF,$$

$\because DC$ 长为半径作弧，

$$\therefore ED = DC,$$

在 $\triangle EDF$ 与 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} ED = DC \\ \angle EDF = \angle CDF, \\ DF = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EDF \cong \triangle CDF \text{ (SAS)}$$

$$\therefore EF = CF,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是梯形，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle DFC,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle CDF,$$

$$\therefore CF = CD,$$

$$\therefore ED = DC = CF = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $EDCF$ 是菱形。

(2) 线段 BE 和 EC 的位置关系是垂直.

$\because$ 点 F 是 BC 的中点,

$\therefore BF = CF$,

$\therefore BF = ED$,

$\therefore ED \parallel BF$,

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形,

$\therefore BE \parallel DF$

$\therefore$ 四边形 $EDCF$ 是菱形,

$\therefore EC \perp DF$

$\therefore BE \perp EC$.

【点评】考查了梯形, 解决此问题, 要弄清梯形的性质、全等三角形的判定与性质、平行四边形的判定和性质及菱形的判定.

22. (10 分) 全面实现低碳生活已逐渐成为人们的共识. 某企业为了发展低碳经济, 采用技术革新, 减少二氧化碳的排放. 随着排放量的减少, 企业相应获得的利润也有所提高, 且相应获得的利润 y (万元) 与月份 x (月)

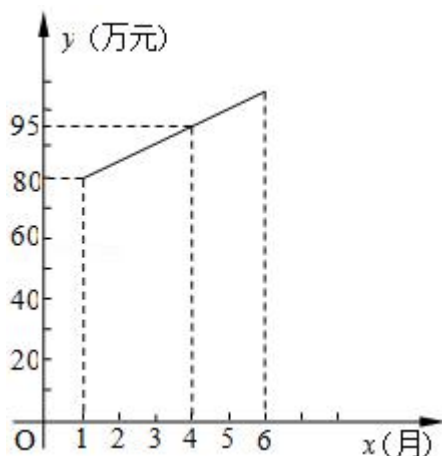
($1 \leq x \leq 6$) 的函数关系如图所示:

(1) 根据图象, 请判断: y 与 x ($1 \leq x \leq 6$) 的变化规律应该符合 ② 函数关系式;

(填写序号: ①反比例函数、②一次函数、③二次函数);

(2) 求出 y 与 x ($1 \leq x \leq 6$) 的函数关系式 (不写取值范围);

(3) 经统计发现, 从 6 月到 8 月每月利润的增长率相同, 且 8 月份的利润为 151.2 万元, 求这个增长率.



【考点】AD：一元二次方程的应用；FH：一次函数的应用.

【分析】(1) 根据图象是一条直线，可得函数的类型；

(2) 根据待定系数法，可得函数解析式；

(3) 根据自变量的值，可得相应的函数值，根据等量关系，可得方程，根据解方程，可得答案.

【解答】解：(1) ②；

(2) 设函数解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

将 (1, 80)、(4, 95) 代入得： $\begin{cases} k+b=80 \\ 4k+b=95 \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} k=5 \\ b=75 \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数的解析式是 $y = 5x + 75$;

(3) 把 $x = 6$ 代入 $y = 5x + 75$

得 $y = 105$,

6 月份的收入是 105 万元,

设这个增长率是 a , 根据题意得

$$105(1+a)^2 = 151.2,$$

解得 $\therefore a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = -\frac{11}{5}$ (不合题意, 舍去)

答: 这个增长率是 20%.

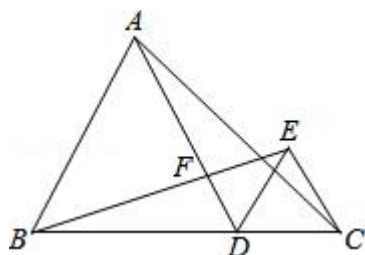
【点评】 本题考查了一次函数的应用, 利用待定系数法求解析式, (3) 找出等量关系列方程是解题关键, 不符合题意的要舍去.

23. (12 分) 已知: 如图, 点 D 是线段 BC 上的任意一点, $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCE$ 都是等边三角形, AD 与 BE 交于点 F .

(1) 求证: $\triangle BDE \cong \triangle ADC$;

(2) 求证: $AB^2 = BC \cdot AF$;

(3) 若 $BD = 12$, $CD = 6$, 求 $\angle ABF$ 的正弦值.



【考点】KD：全等三角形的判定与性质；KK：等边三角形的性质；KQ：勾股定理；S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】（1）由 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCE$ 都是等边三角形，得出 $BD = AD$ ， $DE = DC$ ， $\angle FAB = \angle ABC = \angle ADB = \angle EDC$ ，进而得出 $\angle BDE = \angle ADC$ ，即可求证 $\triangle BDE \cong \triangle ADC$ ；

（2）由 $\triangle FAB \sim \triangle ABC$ ，得出 $\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{BC}$ ，即可得出 $AB^2 = BC \cdot AF$ ，

（3）由 $\triangle FAB \sim \triangle ABC$ ，得出 $\angle ABF = \angle ACB$ ，可求 $\sin \angle ACB$ ，即可得出 $\angle ABF$ 的正弦值．

【解答】证明：（1） $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle DCE$ 都是等边三角形

$$\therefore BD = AD, DE = DC, \angle FAB = \angle ABC = \angle ADB = \angle EDC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle ADC.$$

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases} BD=AD \\ \angle BDE=\angle ADC, \\ DE=DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle ADC \text{ (SAS)};$$

$$(2) \because \triangle BDE \cong \triangle ADC$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DAC$$

$$\because \angle ABC = \angle ADB = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABF = \angle BCA$$

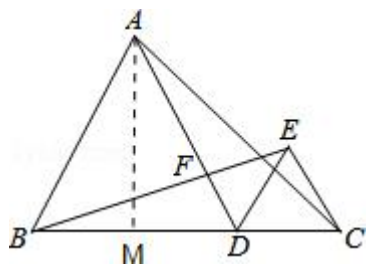
$$\because \angle FAB = \angle ABC, \angle ABF = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle FAB \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AF}{AB} = \frac{AB}{BC},$$

$$\text{即 } AB^2 = BC \cdot AF,$$

（3）如图，



$$\because \triangle FAB \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ACB,$$

过 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M

$$\because \triangle ABD \text{ 是等边三角形, } BD = 12$$

$$\therefore MD = 6, AM = 6\sqrt{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AMC \text{ 中, } AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 12^2} = 6\sqrt{7},$$

$$\therefore \sin \angle ACB = \frac{AM}{AC} = \frac{6\sqrt{3}}{6\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

$$\text{即 } \sin \angle ABF = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

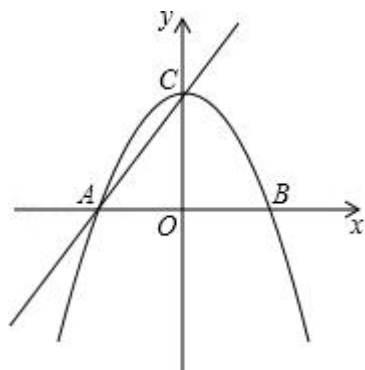
【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，等边三角形的性质及勾股定理，解题的关键是证出 $\triangle FAB \sim \triangle ABC$ 。

24. (12 分) 已知：如图，二次函数 $y = ax^2 + 4$ 的图象与 x 轴交于点 A 和点 B (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴交于点 C ，且 $\cos \angle CAO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(1) 求二次函数的解析式；

(2) 若以点 O 为圆心的圆与直线 AC 相切于点 D ，求点 D 的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下，抛物线上是否存在点 P 使得以 P 、 A 、 D 、 O 为顶点的四边形是直角梯形？若存在，请求出点 P 坐标；若不存在，请说明理由。



【考点】 HF：二次函数综合题。

【专题】15：综合题.

【分析】（1）对于二次函数解析式，令 $x=0$ 求出 y 的值确定出 C 坐标，根据题意得到三角形 AOC 为等腰直角三角形，确定出 A 坐标，代入二次函数解析式求出 a 的值，即可确定出解析式；

（2）连接 OD ，作 $DE \parallel y$ 轴，交 x 轴于点 E ， $DF \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 F ，如图 1 所示，由圆 O 与直线 AC 相切于点 D ，得到 OD 垂直于 AC ，由 $OA = OC$ ，利用三线合一得到 D 为 AC 中点，进而求出 DE 与 DF 的长，确定出 D 坐标即可；

（3）分两种情况考虑：经过点 A 且与直线 OD 平行的直线的解析式为 $y = -x - 4$ ，与抛物线解析式联立求出 P 坐标；经过点 O 且与直线 AC 平行的直线的解析式为 $y = x$ ，与抛物线解析式联立求出 P 坐标即可．

【解答】解：（1） $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + 4$ 的图象与 y 轴交于点 C ，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 4)$ ，

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + 4$ 的图象与 x 轴交于点 A ， $\cos \angle CAO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore \angle CAO = 45^\circ$ ，

$\therefore OA = OC = 4$ ，

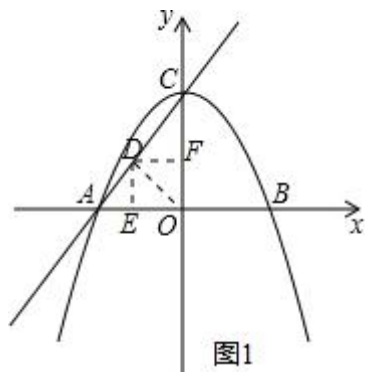
$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，

$\therefore 0 = a(-4)^2 + 4$ ，

$\therefore a = -\frac{1}{4}$ ，

$\therefore$ 这二次函数的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ ；

（2）连接 OD ，作 $DE \parallel y$ 轴，交 x 轴于点 E ， $DF \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 F ，如图 1 所示，



$\because \odot O$ 与直线 AC 相切于点 D ,

$\therefore OD \perp AC$,

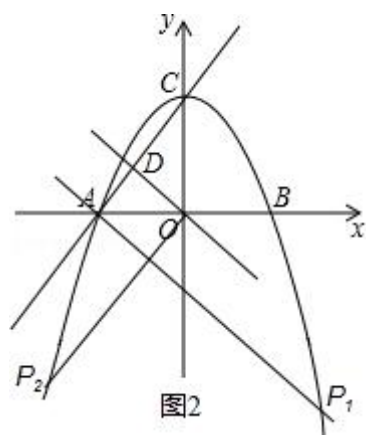
$\because OA = OC = 4$,

$\therefore$ 点 D 是 AC 的中点,

$\therefore DE = \frac{1}{2}OC = 2, DF = \frac{1}{2}OA = 2$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-2, 2)$;

(3) 直线 OD 的解析式为 $y = -x$, 如图 2 所示,



则经过点 A 且与直线 OD 平行的直线的解析式为 $y = -x - 4$,

$$\text{解方程组} \begin{cases} y = -x - 4 \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \end{cases},$$

消去 y , 得 $x^2 - 4x - 32 = 0$, 即 $(x - 8)(x + 4) = 0$,

$\therefore x_1 = 8, x_2 = -4$ (舍去),

$\therefore y = -12$,

$\therefore$ 点 P_1 的坐标为 $(8, -12)$;

直线 AC 的解析式为 $y = x + 4$,

则经过点 O 且与直线 AC 平行的直线的解析式为 $y = x$,

$$\text{解方程组} \begin{cases} y = x \\ y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \end{cases},$$

消去 y , 得 $x^2 + 4x - 16 = 0$, 即 $x = -2 + 2\sqrt{5}$,

$\therefore x_1 = -2 - 2\sqrt{5}, x_2 = -2 + 2\sqrt{5}$ (舍去),

$\therefore y = -2 - 2\sqrt{5}$,

$\therefore$ 点 P_2 的坐标为 $(-2 - 2\sqrt{5}, -2 - 2\sqrt{5})$.

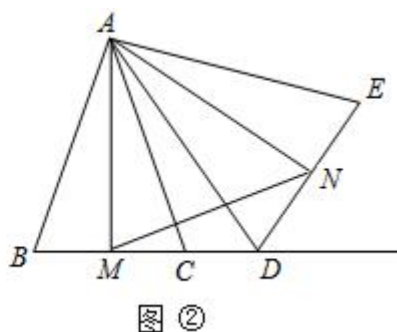
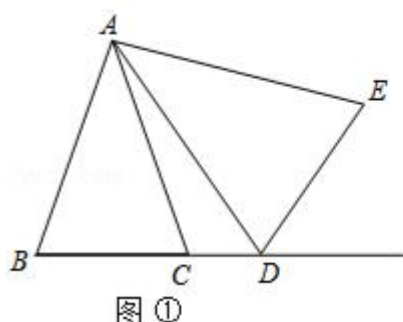
【点评】 此题属于二次函数综合题，涉及的知识有：待定系数法确定二次函数解析式，坐标与图形性质，直线与抛物线的交点，直线与圆相切的性质，锐角三角函数定义，以及等腰直角三角形的性质，熟练掌握二次函数的性质是解本题的关键．

25. (14分) 已知：如图①， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=6$ ， $BC=4$ ，点 D 在 BC 的延长线上，联结 AD ，以 AD 为一边作 $\triangle ADE$ ，使点 E 与点 B 位于直线 AD 的两侧，且 $AD=AE$ ， $\angle DAE=\angle BAC$ ．

(1) 如果 $AE \parallel BC$ ，请判断四边形 $ABDE$ 的形状并证明；

(2) 如图②，设 M 是 BC 中点， N 是 DE 中点，联结 AM 、 AN 、 MN ，求证： $\triangle ABD \sim \triangle AMN$ ；

(3) 设 $BD=x$ ，在 (2) 的前提下，以 BC 为直径的 $\odot M$ 与以 DE 为直径的 $\odot N$ 存在着哪些位置关系？并求出相应的 x 的取值范围（直接写出结论）．



【考点】 KH：等腰三角形的性质；KQ：勾股定理；L6：平行四边形的判定；MJ：圆与圆的位置关系；S9：相似三角形的判定与性质；SO：相似形综合题．

【专题】 15：综合题．

【分析】 (1) 已知 $AE \parallel BC$ ，则有 $\angle EAB + \angle B = 180^\circ$ ，要证四边形 $ABDE$ 是平行四边形，只需证 $AB \parallel ED$ ，只需证到 $\angle EAB + \angle E = 180^\circ$ ，只需得到 $\angle B = \angle E$ ，只需证到 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 即可．

(2) 易证 $\angle MAN = \angle BAD$ ，根据相似三角形对应中线的比等于相似比可得 $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AD}$ ，就可得到 $\triangle AMN \sim \triangle ABD$ ．

(3) 利用相似三角形的性质可以用 x 的代数式表示出 MN 及 r_N 的长，只需求出两圆外切时的 x 的值，就可解决问题．

【解答】(1) 答：四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

证明：如图 1，

$$\because AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

$$\because \angle BAC = \angle DAE,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE.$$

$$\therefore \angle E = \angle ACB.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle B.$$

$$\therefore \angle E = \angle B.$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle B = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle EAB + \angle E = \angle EAB + \angle B = 180^\circ.$$

$$\therefore AB \parallel ED.$$

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

(2) 证明：如图 2，

$$\because AB = AC, M \text{ 是 } BC \text{ 中点},$$

$$\therefore AM \perp BC, \angle BAM = \angle CAM = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

$$\text{同理：} AN \perp DE, \angle DAN = \angle EAN = \frac{1}{2} \angle DAE.$$

$$\because \angle BAC = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle DAN.$$

$$\because \angle MAN = \angle MAC + \angle CAD + \angle DAN,$$

$$\angle BAD = \angle BAM + \angle MAC + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle MAN = \angle BAD.$$

$$\because \triangle ABC \sim \triangle ADE \text{ (已证)}, M \text{ 是 } BC \text{ 中点}, N \text{ 是 } DE \text{ 中点},$$

$$\therefore \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AD}.$$

$$\therefore \triangle AMN \sim \triangle ABD.$$

(3) 解: $\because AM \perp BC$,

$$\therefore AM^2 = AB^2 - BM^2 = AD^2 - MD^2.$$

$$\because AB = 6, \quad BM = 2, \quad MD = x - 2,$$

$$\therefore AM^2 = 6^2 - 2^2 = AD^2 - (x - 2)^2.$$

$$\therefore AM = 4\sqrt{2}, \quad AD = \sqrt{x^2 - 4x + 36}.$$

$$\because \triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}.$$

$$\therefore AB \cdot DE = AD \cdot BC.$$

$$\therefore 6 \times DE = \sqrt{x^2 - 4x + 36} \times 4.$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3} \sqrt{x^2 - 4x + 36}.$$

$$\therefore r_N = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 - 4x + 36}.$$

$$\because \triangle AMN \sim \triangle ABD,$$

$$\therefore \frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB}.$$

$$\therefore AB \cdot MN = AM \cdot BD.$$

$$\therefore 6MN = 4\sqrt{2}x.$$

$$\therefore MN = \frac{2\sqrt{2}}{3}x.$$

当 $\odot M$ 与 $\odot N$ 外切时, $MN = r_M + r_N$.

$$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{3}x = 2 + \frac{1}{3} \sqrt{x^2 - 4x + 36}.$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{2}}{3}x - 2 = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 - 4x + 36}.$$

$$\therefore 2\sqrt{2}x - 6 = \sqrt{x^2 - 4x + 36}.$$

$$\therefore 8x^2 - 24\sqrt{2}x + 36 = x^2 - 4x + 36.$$

$$\therefore 7x^2 = (24\sqrt{2} - 4)x.$$

$\because$ 点 D 在 BC 的延长线上,

$$\therefore x \geq 4.$$

$$\therefore x = \frac{24\sqrt{2} - 4}{7}.$$

$\therefore$ 当 $x = \frac{24\sqrt{2}-4}{7}$ 时, 两圆外切; 当 $4 \leq x < \frac{24\sqrt{2}-4}{7}$ 时, 两圆相交; 当 $x > \frac{24\sqrt{2}-4}{7}$ 时, 两圆外离.

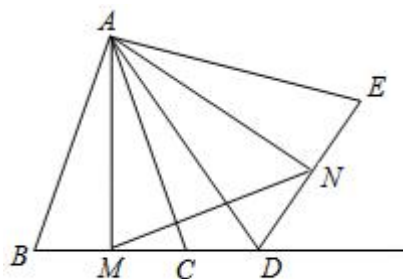


图 2

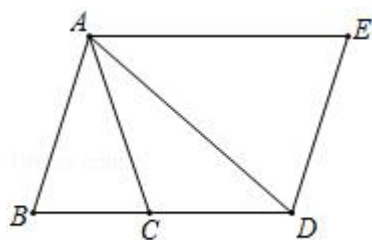


图1

【点评】 本题重点考查了相似三角形的判定与性质, 另外还考查了平行四边形的判定、两圆的位置关系、等腰三角形的性质、勾股定理、平行线的判定与性质等知识, 综合性比较强, 而考虑两圆外切这个临界位置是解决第 (3) 小题的关键.