

2014 年上海市黄浦区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

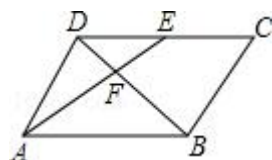
1. (4 分) 抛物线 $y = x^2 + 3x - 4$ 的对称轴是 ()

- A. 直线 $x = 3$ B. 直线 $x = -3$ C. 直线 $x = \frac{3}{2}$ D. 直线 $x = -\frac{3}{2}$

2. (4 分) 抛物线 $y = ax^2$ ($a < 0$) 的图象一定经过 ()

- A. 第一、二象限 B. 第三、四象限
C. 第一、三象限 D. 第二、四象限

3. (4 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，若 E 为 CD 中点，且 AE 与 BD 交于点 F ，则 $\triangle EDF$ 与 $\triangle ABF$ 的周长比为 ()



- A. 1:2 B. 1:4 C. 1:3 D. 1:9

4. (4 分) 如图，传送带和地面所成斜坡的坡度为 1:3，若它把物体从地面点 A 处送到离地面 2 米高的 B 处，则物体从 A 到 B 所经过的路程为 ()

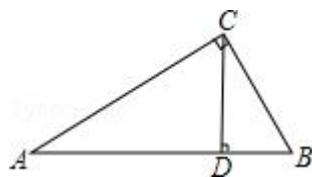


- A. 6 米 B. $\sqrt{10}$ 米 C. $2\sqrt{10}$ 米 D. $3\sqrt{10}$ 米

5. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是边 AB 、 AC 上的点，下列条件中不能判定 $\triangle AED \sim \triangle ABC$ 是 ()

- A. $\angle ADE = \angle C$ B. $\angle AED = \angle B$ C. $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$ D. $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$

6. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 为边 AB 上的高，若 $AB = 1$ ，则线段 BD 的长是 ()



- A. $\sin^2 A$ B. $\cos^2 A$ C. $\tan^2 A$ D. $\cot^2 A$

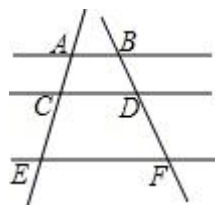
二、填空题(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸

的相应位置上】

7. (4分) 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项, 且 $a=9$, $c=4$, 那么 $b=$ _____.

8. (4分) 计算: $3(\vec{a}-\vec{b})-2(\vec{a}+\vec{b})=$ _____.

9. (4分) 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $AC:CE=2:3$, $BF=10$, 那么线段 DF 的长为_____.



10. (4分) 若将抛物线 $y=x^2$ 向下平移 2 个单位, 则所得抛物线的表达式是_____.

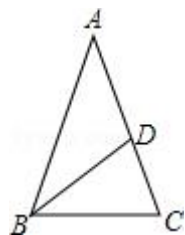
11. (4分) 如果抛物线 $y=(a+2)x^2+ax-3$ 的开口向上, 那么 a 的取值范围是_____.

12. (4分) 若抛物线 $y=(x+m)^2+m-1$ 的对称轴是直线 $x=1$, 则它的顶点坐标是_____.

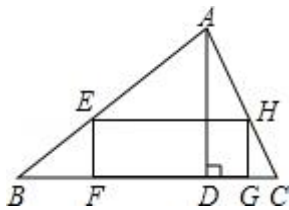
13. (4分) 若 AD 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的中线, AD 、 BE 相交于点 F , $FD=2$, 则线段 AD 的长为_____.

14. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=90^\circ$, 若 $BC=4$, $AC=3$, 则 $\cos B=$ _____.

15. (4分) 如图, 若在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=3$, D 是边 AC 上一点, 且 $BD=BC=2$, 则线段 AD 的长为_____.

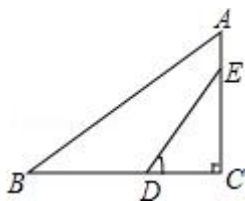


16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的高, 且 $BC=5$, $AD=3$, 矩形 $EFGH$ 的顶点 F 、 G 在边 BC 上, 顶点 E 、 H 分别在边 AB 和 AC 上, 如果设边 EF 的长为 x ($0 < x < 3$), 矩形 $EFGH$ 的面积为 y , 那么 y 关于 x 的函数解析式是_____.



17. (4分) 若抛物线 $y = (a+1)x^2 - (a+1)x + 1$ 与 x 轴有且仅有一个公共点，
则 a 的值为_____.

18. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $\cot A = \frac{3}{4}$ ，点 D 、 E 分别是边 BC 、 AC 上的点，且 $\angle EDC = \angle A$ ，将 $\triangle ABC$ 沿 DE 对折，若点 C 恰好落在 AB 上，则 DE 的长为_____.



三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10分) 计算： $\frac{2\sin 30^\circ + \tan 60^\circ}{2\cos 30^\circ - \cot 45^\circ}$.

20. (10分) 已知：抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 8)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 三点

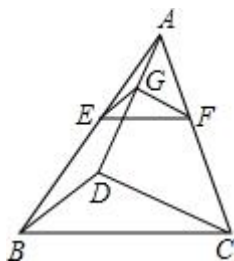
(1) 求抛物线的表达式；

(2) 写出该抛物线的顶点坐标.

21. (10分) 如图，点 D 为 $\triangle ABC$ 内部一点，点 E 、 F 、 G 分别为线段 AB 、 AC 、 AD 上一点，且 $EG \parallel BD$ ， $GF \parallel DC$

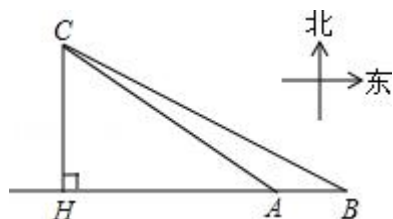
(1) 求证： $EF \parallel BC$ ；

(2) $\frac{AE}{BE} = \frac{2}{3}$ 时，求 $\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle BCD}}$ 的值 ($S_{\triangle EFG}$ 表示 $\triangle EFG$ 的面积， $S_{\triangle BCD}$ 表示 $\triangle BCD$ 的面积)



22. (10 分) 如图, 在一笔直的海岸线上有 A 、 B 两个观测站, B 在 A 的正东方向, $AB = 10$ 千米, 在某一时刻, 从观测站 A 测得一艘集装箱货船位于北偏西 62.6° 的 C 处, 同时观测站 B 测得改集装箱船位于北偏西 69.2° 方向, 问此时该集装箱船与海岸之间距离 CH 约多少千米? (最后结果保留整数)

(参考数据: $\sin 62.6^\circ \approx 0.89$, $\cos 62.6^\circ \approx 0.46$, $\tan 62.6^\circ \approx 1.93$, $\sin 69.2^\circ \approx 0.93$, $\cos 69.2^\circ \approx 0.36$, $\tan 69.2^\circ \approx 2.63$)

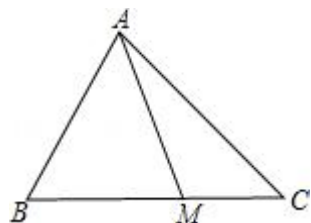


23. (12 分) 如图已知点 M 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$

(1) 当 $\frac{BM}{MC} = 2$ 时, $\overrightarrow{AM} =$ _____; (用 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 表示)

(2) 当 $\frac{BM}{MC} = m$ ($m > 0$) 时, $\overrightarrow{AM} =$ _____; (用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 与 m 表示)

(3) 当 $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$ 时, $\frac{BM}{MC} =$ _____.



24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 顶点为 M 的抛物线是由抛物线 $y = x^2 - 3$ 向右平移一个单位后得到的, 它与 y 轴负半轴交于点 A , 点 B 在该抛物线上, 且横坐标为 3.

(1) 求点 M 、 A 、 B 坐标;

(2) 连接 AB 、 AM 、 BM , 求 $\angle ABM$ 的正切值;

(3) 点 P 是顶点为 M 的抛物线上一点, 且位于对称轴的右侧, 设 PO 与 x 正半轴的夹角为 α , 当 $\alpha = \angle ABM$ 时, 求 P 点坐标.

2014 年上海市黄浦区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）抛物线 $y = x^2 + 3x - 4$ 的对称轴是（ ）

- A. 直线 $x = 3$ B. 直线 $x = -3$ C. 直线 $x = \frac{3}{2}$ D. 直线 $x = -\frac{3}{2}$

【考点】H3：二次函数的性质.

【分析】已知解析式为抛物线解析式的一般式，利用对称轴公式直接求解.

【解答】解：由对称轴公式：对称轴是 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \times 1} = -\frac{3}{2}$,

故选：D.

【点评】主要考查了求抛物线的顶点对称轴的方法，解题的关键是牢记对称轴公式.

2.（4 分）抛物线 $y = ax^2$ ($a < 0$) 的图象一定经过（ ）

- A. 第一、二象限 B. 第三、四象限
C. 第一、三象限 D. 第二、四象限

【考点】H2：二次函数的图象.

【分析】根据二次项系数小于 0，二次函数图象开口向下解答.

【解答】解： $\because a < 0$,

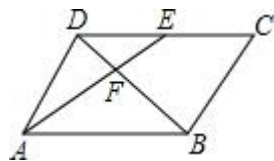
$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2$ 的图象经过坐标原点，且开口方向向下，

$\therefore$ 一定经过第三、四象限.

故选：B.

【点评】本题考查了二次函数图象，是基础题，需熟练掌握二次函数的有关性质：开口方向、对称轴、顶点坐标等.

3.（4 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，若 E 为 CD 中点，且 AE 与 BD 交于点 F ，则 $\triangle EDF$ 与 $\triangle ABF$ 的周长比为（ ）



- A. 1:2 B. 1:4 C. 1:3 D. 1:9

【考点】L5：平行四边形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】 根据平行四边形的性质得出 $AB \parallel CD$ ，即可得出 $\triangle DFE \sim \triangle BFA$ ，进而利用相似三角形的周长比等于相似比即可得出答案．

【解答】 解： $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

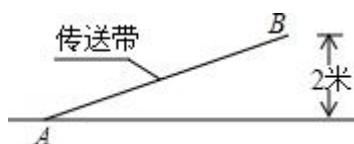
$$\therefore \triangle DFE \sim \triangle BFA,$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{C_{\triangle DFE}}{C_{\triangle BFA}} = \frac{1}{2}.$$

故选：A．

【点评】 此题主要考查了相似三角形的判定与性质以及平行线的性质，根据已知得出 $\triangle DFE \sim \triangle BFA$ 是解题关键．

4. (4 分) 如图，传送带和地面所成斜坡的坡度为 1:3，若它把物体从地面点 A 处送到离地面 2 米高的 B 处，则物体从 A 到 B 所经过的路程为 ()



- A. 6 米 B. $\sqrt{10}$ 米 C. $2\sqrt{10}$ 米 D. $3\sqrt{10}$ 米

【考点】 T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题．

【分析】 根据坡比求出 AF 的长，再根据勾股定理求出 AB 的长即可．

【解答】 解：如图：作 $BF \perp AF$ ，垂足为 F．

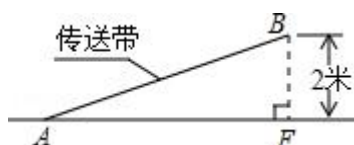
$$\because BF: AF = 1: 3,$$

$$\therefore 2: AF = 1: 3,$$

$$\therefore AF = 6,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

故选：C．



【点评】 本题考查了解直角三角形，知道坡比的概念是解题的关键．

5. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 上的点，下列条件中不能判定 $\triangle AED \sim \triangle ABC$ 是 ()

A. $\angle ADE = \angle C$ B. $\angle AED = \angle B$ C. $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$ D. $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$

【考点】S8：相似三角形的判定.

【分析】根据相似三角形的判定定理：两边及其夹角法：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似；两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似进行分析即可.

【解答】解：A、有条件 $\angle ADE = \angle C$ ， $\angle A = \angle A$ 可利用两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似证明 $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 相似；

B、有条件 $\angle AED = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ 可利用两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似证明 $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 相似；

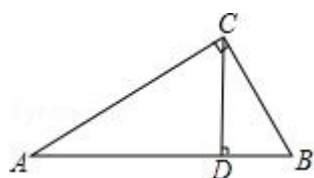
C、根据两边及其夹角法：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似证明 $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 相似；

D、不能证明 $\triangle AED$ 和 $\triangle ABC$ 相似；

故选：D.

【点评】此题主要考查了相似三角形的判定，关键是熟练掌握相似三角形的判定定理.

6. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 为边 AB 上的高，若 $AB = 1$ ，则线段 BD 的长是 ()



A. $\sin^2 A$ B. $\cos^2 A$ C. $\tan^2 A$ D. $\cot^2 A$

【考点】T1：锐角三角函数的定义.

【分析】求出 $\angle A = \angle BCD$ ，解直角三角形求出 BC 、求出 BD 即可得出答案.

【解答】解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 1$ ，

$$\therefore BC = AB \cdot \sin A = \sin A,$$

$\because CD$ 为边 AB 上的高，

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ, \quad \angle B + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD,$$

$$\therefore BD = BC \cdot \sin \angle DCB = 1 \times \sin A \times \sin A = \sin^2 A,$$

故选：A.

【点评】本题考查了锐角三角形函数的定义，三角形内角和定理的应用，关键是求出 BC 的长和 BD 的长.

二、填空题(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) 已知线段 b 是线段 a 、 c 的比例中项，且 $a = 9$ ， $c = 4$ ，那么 $b = \underline{6}$.

【考点】S2：比例线段.

【专题】11：计算题.

【分析】根据比例中项的定义，若 b 是 a ， c 的比例中项，即 $b^2 = ac$. 即可求解.

【解答】解：若 b 是 a 、 c 的比例中项，

$$\text{即 } b^2 = ac. \text{ 则 } b = \sqrt{ac} = \sqrt{9 \times 4} = 6$$

【点评】本题主要考查了线段的比例中项的定义，注意线段不能为负.

8. (4 分) 计算： $3(\vec{a} - \vec{b}) - 2(\vec{a} + \vec{b}) = \underline{\vec{a} - 5\vec{b}}$.

【考点】LM：*平面向量.

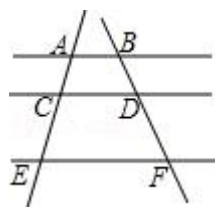
【分析】直接利用整式加减的运算法则求解可求得答案.

【解答】解： $3(\vec{a} - \vec{b}) - 2(\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{a} - 5\vec{b}$.

故答案为： $\vec{a} - 5\vec{b}$.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题比较简单，注意掌握平面向量的运算.

9. (4 分) 如图， $AB \parallel CD \parallel EF$ ，如果 $AC:CE = 2:3$ ， $BF = 10$ ，那么线段 DF 的长为 $\underline{6}$.



【考点】S4：平行线分线段成比例.

【分析】根据平行线分线段成比例定理，得出 $\frac{BD}{DF} = \frac{AC}{CE} = \frac{2}{3}$ ，再根据 $DF = BF \times \frac{3}{5}$

代入计算即可.

【解答】解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore \frac{BD}{DF} = \frac{AC}{CE} = \frac{2}{3},$$

$$\because BF = 10,$$

$$\therefore DF = 10 \times \frac{3}{5} = 6;$$

故答案为：6.

【点评】 本题考查平行线分线段成比例定理，用到的知识点是平行线分线段成比例定理，关键是找准对应关系，列出比例式.

10. (4 分) 若将抛物线 $y = x^2$ 向下平移 2 个单位，则所得抛物线的表达式是 $y = x^2 - 2$.

【考点】 H6：二次函数图象与几何变换.

【分析】 求出平移后的抛物线的顶点坐标，然后根据顶点式解析式形式写出即可.

【解答】 解： $\because$ 抛物线 $y = x^2$ 向下平移 2 个单位的顶点坐标为 $(0, -2)$,

$\therefore$ 所得抛物线的表达式为： $y = x^2 - 2$.

故答案为： $y = x^2 - 2$.

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换，此类题目，利用顶点的变化确定抛物线解析式更简便.

11. (4 分) 如果抛物线 $y = (a+2)x^2 + ax - 3$ 的开口向上，那么 a 的取值范围是 $a > -2$.

【考点】 H1：二次函数的定义；H3：二次函数的性质.

【分析】 根据二次函数的性质可知，当抛物线开口向上时，二次项系数 $a+2 > 0$.

【解答】 $a > -2$ 解：因为抛物线 $y = (a+2)x^2 + ax - 3$ 的开口向上，

所以 $a+2 > 0$ ，即 $a > -2$.

故答案为： $a > -2$.

【点评】 本题主要考查了二次函数的性质. 用到的知识点：对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 来说，当 $a > 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 开口向上；当 $a < 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 开口向下.

12. (4 分) 若抛物线 $y = (x+m)^2 + m - 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$ ，则它的顶点坐标是 $(1, -2)$.

【考点】 H3：二次函数的性质.

【分析】 首先根据对称轴是直线 $x = 1$ ，从而求得 m 的值，然后根据顶点坐标公

式直接写出顶点坐标；

【解答】解：∵抛物线 $y = (x+m)^2 + m - 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$ ，

$$\therefore m = -1,$$

$$\therefore \text{解析式 } y = (x-1)^2 - 2,$$

$$\therefore \text{顶点坐标为: } (1, -2),$$

故答案为: $(1, -2)$.

【点评】本题主要考查了二次函数的性质，熟练掌握顶点式是解题的关键，难度适中.

13. (4分) 若 AD 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的中线， AD 、 BE 相交于点 F ， $FD = 2$ ，则线段 AD 的长为 6.

【考点】K5: 三角形的重心.

【分析】根据题意画出图形，根据 AD 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的中线， AD 、 BE 相交于点 F 得出点 F 是 $\triangle ABC$ 的重心，再根据重心的性质得出 AF 的长，由 $AD = AF + FD$ 即可得出结论.

【解答】解：如图所示，

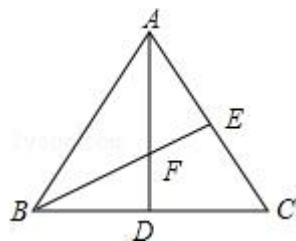
∵ AD 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的中线， AD 、 BE 相交于点 F ， $FD = 2$ ，

∴ 点 F 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AF = 2FD = 2 \times 2 = 4,$$

$$\therefore AD = AF + FD = 4 + 2 = 6.$$

故答案为: 6.



【点评】本题考查的是三角形的重心，熟知重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1 是解答此题的关键.

14. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，若 $BC = 4$ ， $AC = 3$ ，则 $\cos B = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

【考点】KQ: 勾股定理；T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】首先利用勾股定理求得 AB 的长度，然后根据余弦函数的定义即可求解.

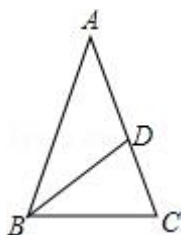
【解答】解： $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$,

$$\text{则 } \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

故答案是： $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

【点评】 本题考查锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

15. (4分) 如图，若在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 3$ ， D 是边 AC 上一点，且 $BD = BC = 2$ ，则线段 AD 的长为 $\frac{5}{3}$.



【考点】 S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】 利用等腰三角形的性质得出 $\angle C = \angle CDB = \angle ABC$ ，即可得出 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ ，进而利用相似三角形的性质得出 CD 的长，即可得出 AD 的长.

【解答】 解： $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = \angle C,$$

$$\because BC = BD,$$

$$\therefore \angle C = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle C = \angle CDB = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC},$$

$$\because AB = AC = 3, \quad BD = BC = 2,$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{DC}{2},$$

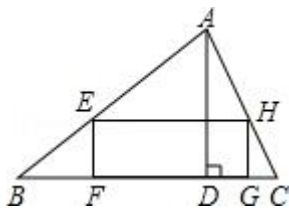
$$\therefore CD = \frac{4}{3},$$

$$\therefore AD = AC - CD = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}.$$

故答案为： $\frac{5}{3}$.

【点评】此题主要考查了相似三角形的判定与性质以及等腰三角形的性质，根据已知得出 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ 是解题关键．

16. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的高，且 $BC=5$ ， $AD=3$ ，矩形 $EFGH$ 的顶点 F 、 G 在边 BC 上，顶点 E 、 H 分别在边 AB 和 AC 上，如果设边 EF 的长为 x ($0 < x < 3$)，矩形 $EFGH$ 的面积为 y ，那么 y 关于 x 的函数解析式是 $y = -\frac{5}{3}x^2 + 5x$ ．



【考点】HD：根据实际问题列二次函数关系式；S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】设边 EF 的长为 x ($0 < x < 3$)，则 $AN = 3 - x$ ，进而利用已知得出 $\triangle AEH \sim \triangle ABC$ ，进而得出 EH 的长，即可得出答案．

【解答】解：设边 EF 的长为 x ($0 < x < 3$)，则 $AN = 3 - x$ ，

$\because EH \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AEH \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{AN}{AD} = \frac{EH}{BC},$$

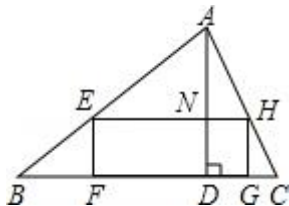
$$\therefore \frac{3-x}{3} = \frac{EH}{5},$$

$$\text{解得：} EH = \frac{5}{3}(3-x),$$

$\because$ 矩形 $EFGH$ 的面积为 y ，

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式是：} y = \frac{5}{3}(3-x) \times x = -\frac{5}{3}x^2 + 5x.$$

$$\text{故答案为：} y = -\frac{5}{3}x^2 + 5x.$$



【点评】此题主要考查了相似三角形的判定与性质以及根据实际问题列二次函数解析式，根据已知得出 EH 的长是解题关键．

17. (4分) 若抛物线 $y = (a+1)x^2 - (a+1)x + 1$ 与 x 轴有且仅有一个公共点, 则 a 的值为 3.

【考点】HA: 抛物线与 x 轴的交点.

【分析】根据 $y = (a+1)x^2 - (a+1)x + 1$ 与 x 轴有且仅有一个公共点, 则 $b^2 - 4ac = (a+1)^2 - 4(a+1) = a^2 - 2a - 3 = 0$, 进而得出即可.

【解答】解: $\because y = (a+1)x^2 - (a+1)x + 1$ 与 x 轴有且仅有一个公共点,

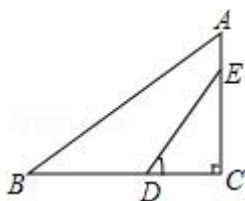
$$\therefore b^2 - 4ac = (a+1)^2 - 4(a+1) = a^2 - 2a - 3 = 0,$$

解得: $a_1 = 3, a_2 = -1$, 当 $a = -1$, 则 $a+1 = 0$, 故舍去.

故答案为: 3.

【点评】此题主要考查了抛物线与 x 轴的交点, 根据题意得出 $b^2 - 4ac = 0$ 得出是解题关键.

18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $\cot A = \frac{3}{4}$, 点 D 、 E 分别是边 BC 、 AC 上的点, 且 $\angle EDC = \angle A$, 将 $\triangle ABC$ 沿 DE 对折, 若点 C 恰好落在 AB 上, 则 DE 的长为 $\frac{125}{48}$.



【考点】PB: 翻折变换 (折叠问题).

【专题】11: 计算题.

【分析】把 $\triangle ABC$ 沿 DE 对折, 点 C 恰好落在 AB 的 F 点处, CF 与 DE 相交于 O 点, 根据折叠的性质得到 $DE \perp CF$, $OC = OF$, 再根据等角的余角相等得 $\angle 1 = \angle EDC$, 而 $\angle EDC = \angle A$, 则 $\angle 1 = \angle A$, 所以 $FC = FA$, 同理可得 $FC = FB$, 于是有 $CF = \frac{1}{2}AB$, $OC = \frac{1}{4}AB$, 然后根据余切的定义和勾股定理得到 $BC = 4$, $AB = 5$, 所以 $OC = \frac{5}{4}$,

再分别在 $\text{Rt}\triangle OEC$ 和 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中, 利用余切的定义计算出 $OE = \frac{5}{3}$, $OD = \frac{15}{16}$,

再计算 $OE + OD$ 即可.

【解答】解: 把 $\triangle ABC$ 沿 DE 对折, 点 C 恰好落在 AB 的 F 点处, CF 与 DE 相

交于 O 点, 如图,

$$\therefore DE \perp CF, OC = OF,$$

$$\because \angle EDC + \angle OCD = 90^\circ, \quad \angle 1 + \angle OCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle EDC,$$

而 $\angle EDC = \angle A$,

$$\therefore \angle 1 = \angle A,$$

$$\therefore FC = FA,$$

同理可得 $FC = FB$,

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{4}AB,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$,

$$\therefore \cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BC = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore OC = \frac{5}{4},$$

在 $\text{Rt}\triangle OEC$ 中, $\cot \angle 1 = \cot \angle A = \frac{OC}{OE}$, 即 $\frac{3}{4} = \frac{\frac{5}{4}}{OE}$,

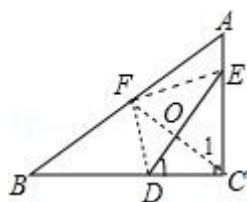
$$\therefore OE = \frac{5}{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中, $\cot \angle ODC = \cot \angle A = \frac{OD}{OC}$, 即 $\frac{OD}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore OD = \frac{15}{16},$$

$$\therefore DE = OD + OE = \frac{15}{16} + \frac{5}{3} = \frac{125}{48}.$$

故答案为 $\frac{125}{48}$.



【点评】 本题考查了折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等．也考查了勾股定理和锐角三角函数．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $\frac{2\sin 30^\circ + \tan 60^\circ}{2\cos 30^\circ - \cot 45^\circ}$ ．

【考点】 T5：特殊角的三角函数值．

【分析】 将特殊角的三角函数值代入求解．

【解答】 解：原式 $= \frac{2 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = 2 + \sqrt{3}$ ．

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值，解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值．

20.（10 分）已知：抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 8)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 三点

（1）求抛物线的表达式；

（2）写出该抛物线的顶点坐标．

【考点】 H3：二次函数的性质；H8：待定系数法求二次函数解析式．

【专题】 11：计算题．

【分析】（1）设一般式 $y = ax^2 + bx + c$ ，再把 A 、 B 、 C 三点坐标代入得到关于 a 、 b 、 c 的方程组，然后解方程组求出 a 、 b 、 c 即可；

（2）把（1）中的解析式配成顶点式即可得到抛物线的顶点坐标．

【解答】 解：（1）设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，

根据题意得 $\begin{cases} a - b + c = 8 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$ ，

所以抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$ ；

（2） $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ ，

所以抛物线的顶点坐标为 $(2, -1)$ ．

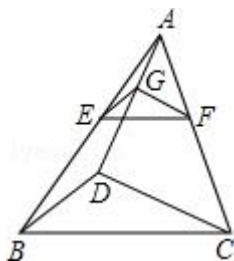
【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数关系式：要根据题目给定的条件，选择恰当的方法设出关系式，从而代入数值求解．一般地，当已知抛物线上三

点时，常选择一般式，用待定系数法列三元一次方程组来求解；当已知抛物线的顶点或对称轴时，常设其解析式为顶点式来求解；当已知抛物线与 x 轴有两个交点时，可选择设其解析式为交点式来求解。

21. (10 分) 如图，点 D 为 $\triangle ABC$ 内部一点，点 E 、 F 、 G 分别为线段 AB 、 AC 、 AD 上一点，且 $EG \parallel BD$ ， $GF \parallel DC$

(1) 求证： $EF \parallel BC$ ；

(2) $\frac{AE}{BE} = \frac{2}{3}$ 时，求 $\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle BCD}}$ 的值 ($S_{\triangle EFG}$ 表示 $\triangle EFG$ 的面积， $S_{\triangle BCD}$ 表示 $\triangle BCD$ 的面积)



【考点】 S4：平行线分线段成比例；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 先根据相似比的性质得出 $\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GD}$ ， $\frac{AG}{GD} = \frac{AF}{FC}$ ，故可得出 $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ ，由此即可得出结论；

(2) 先根据 $EF \parallel BC$ 得出 $\angle AEF = \angle ABC$ ，再由 $DG \parallel BD$ 得出 $\angle AEG = \angle ABD$ ，故可得出 $\angle GEF = \angle DBC$ ，同理可得， $\angle GEF = \angle DBC$ ，故可得出 $\triangle EGF \sim \triangle BDC$ 根据相似三角形面积的比等于相似比的平方即可得出结论.

【解答】 解：(1) $\because EG \parallel BD$ ，

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GD},$$

$$\because GF \parallel DC,$$

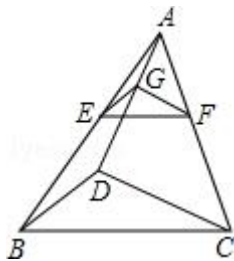
$$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{AF}{FC},$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC},$$

$$\therefore EF \parallel BC;$$

(2) $\because EF \parallel BC$,

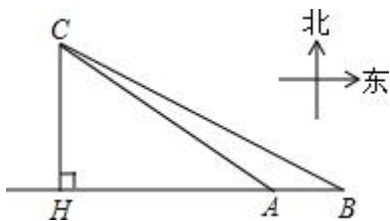
$$\begin{aligned}
&\therefore \angle AEF = \angle ABC, \\
&\because EG \parallel BD, \\
&\therefore \angle AEG = \angle ABD, \\
&\therefore \angle AEF - \angle AEG = \angle ABC - \angle ABD, \text{ 即 } \angle GEF = \angle DBC, \\
&\text{同理可得, } \angle GEF = \angle DBC, \\
&\therefore \triangle EGF \sim \triangle BDC, \\
&\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{2}{3}, \\
&\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{2}{5}, \\
&\therefore \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle BCD}} = \left(\frac{EF}{BC} \right)^2 = \frac{4}{25}.
\end{aligned}$$



【点评】 本题考查的是相似三角形的判定与性质，熟知相似三角形对应边的比等于相似比，面积的比等于相似比的平方是解答此题的关键．

22. (10分) 如图，在一笔直的海岸线上有 A 、 B 两个观测站， B 在 A 的正东方向， $AB = 10$ 千米，在某一时刻，从观测站 A 测得一艘集装箱货船位于北偏西 62.6° 的 C 处，同时观测站 B 测得改集装箱船位于北偏西 69.2° 方向，问此时该集装箱船与海岸之间距离 CH 约多少千米？（最后结果保留整数）

（参考数据： $\sin 62.6^\circ \approx 0.89$ ， $\cos 62.6^\circ \approx 0.46$ ， $\tan 62.6^\circ \approx 1.93$ ， $\sin 69.2^\circ \approx 0.93$ ， $\cos 69.2^\circ \approx 0.36$ ， $\tan 69.2^\circ \approx 2.63$ ）



【考点】 TB：解直角三角形的应用 - 方向角问题．

【分析】 设 $CH = x$ ，在直角 $\triangle ABC$ 中利用三角函数和 x ，表示出 AH 的长，同理

在直角 $\triangle BHC$ 中, 利用 x 表示出 BH , 根据 $AB = 10$, 即 $BH - AH = 10$, 即可列方程求得 CH 的长.

【解答】解: 设 $CH = x$, 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACH = 62.6^\circ$,

$$\because \tan \angle ACH = \frac{AH}{CH},$$

$$\therefore AH = x \cdot \tan 62.6^\circ,$$

在直角 $\triangle BHC$ 中, $\angle BCH = 69.2^\circ$,

$$\because \tan \angle BCH = \frac{BH}{CH},$$

$$\therefore BH = x \cdot \tan 69.2^\circ,$$

$$\because AB = BH - AH,$$

$$\therefore x \cdot \tan 69.2^\circ - x \cdot \tan 62.6^\circ = 10,$$

$$\text{解得: } x = \frac{10}{\tan 69.2^\circ - \tan 62.6^\circ} \approx 14.$$

答: 此时该集装箱船与海岸之间距离 CH 约14千米.

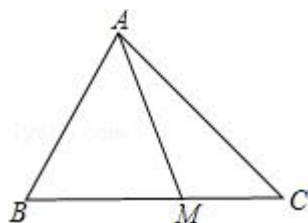
【点评】此题是一道方向角问题, 结合航海中的实际问题, 将解直角三角形的相关知识有机结合, 体现了数学应用于实际生活的思想.

23. (12分) 如图已知点 M 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$

$$(1) \text{ 当 } \frac{BM}{MC} = 2 \text{ 时, } \overrightarrow{AM} = \frac{\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}}{3}; \text{ (用 } \vec{a} \text{ 与 } \vec{b} \text{ 表示)}$$

$$(2) \text{ 当 } \frac{BM}{MC} = m \text{ (} m > 0 \text{)} \text{ 时, } \overrightarrow{AM} = \frac{\frac{1}{m+1}\vec{a} + \frac{m}{m+1}\vec{b}}{m+1}; \text{ (用 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 与 } m \text{ 表示)}$$

$$(3) \text{ 当 } \overrightarrow{AM} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} \text{ 时, } \frac{BM}{MC} = \frac{3}{4}.$$



【考点】LM: *平面向量.

【分析】(1) 由 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 根据三角形法则即可求得 $\overrightarrow{BC}$, 又由 $\frac{BM}{MC} = 2$, 即

可求得 $\overrightarrow{BM}$ 的值, 继而求得答案;

(2) 由 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 根据三角形法则即可求得 $\overrightarrow{BC}$, 又由 $\frac{BM}{MC} = m$, 即可求得 $\overrightarrow{BM}$

的值，继而求得答案；

(3) 根据(2)的结论，可得 $\frac{1}{m+1} = \frac{4}{7}$ ，继而求得 m 的值.

【解答】解：(1) $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b},$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \frac{BM}{MC} = 2,$$

$$\therefore \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b};$$

$$(2) \because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \frac{BM}{MC} = m,$$

$$\therefore \overrightarrow{BM} = \frac{m}{m+1}\overrightarrow{BC} = \frac{m}{m+1}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{m}{m+1}\vec{b} - \frac{m}{m+1}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \left(\frac{m}{m+1}\vec{b} - \frac{m}{m+1}\vec{a}\right) = \frac{1}{m+1}\vec{a} + \frac{m}{m+1}\vec{b};$$

$$(3) \because \overrightarrow{AM} = \frac{4}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b},$$

$$\therefore \frac{1}{m+1} = \frac{4}{7},$$

$$\text{解得：} m = \frac{3}{4},$$

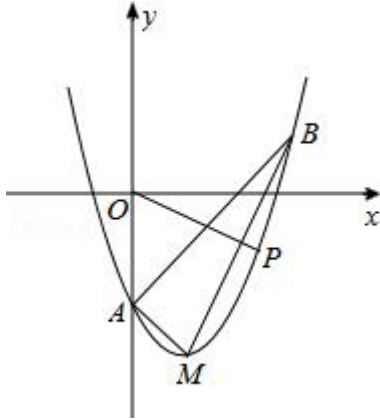
$$\therefore \frac{BM}{MC} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{故答案为：(1) } \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}; (2) \frac{1}{m+1}\vec{a} + \frac{m}{m+1}\vec{b}; (3) \frac{3}{4}.$$

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度适中，注意掌握三角形法则的应用，注意掌握数形结合思想的应用.

24. (12分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，顶点为 M 的抛物线是由抛物线 $y = x^2 - 3$ 向右平移一个单位后得到的，它与 y 轴负半轴交于点 A ，点 B 在该抛物线上，且横坐标为 3.

- (1) 求点 M 、 A 、 B 坐标；
- (2) 连接 AB 、 AM 、 BM ，求 $\angle ABM$ 的正切值；
- (3) 点 P 是顶点为 M 的抛物线上一点，且位于对称轴的右侧，设 PO 与 x 正半轴的夹角为 α ，当 $\alpha = \angle ABM$ 时，求 P 点坐标．



【考点】HF：二次函数综合题．

【专题】153：代数几何综合题；16：压轴题．

【分析】(1) 根据向右平移横坐标加写出平移后的抛物线解析式，然后写出顶点 M 的坐标，令 $x = 0$ 求出 A 点的坐标，把 $x = 3$ 代入函数解析式求出点 B 的坐标；

(2) 过点 B 作 $BE \perp AO$ 于 E ，过点 M 作 $MF \perp AO$ 于 M ，然后求出 $\angle EAB = \angle EBA = 45^\circ$ ，同理求出 $\angle FAM = \angle FMA = 45^\circ$ ，然后求出 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AMF$ 相似，根据相似三角形对应边成比例列式求出 $\frac{AM}{AB}$ ，再求出 $\angle BAM = 90^\circ$ ，然后根据锐角的正切等于对边比邻边列式即可得解；

(3) 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于 H ，分点 P 在 x 轴的上方和下方两种情况利用 α 的正切值列出方程求解即可．

【解答】解：(1) 抛物线 $y = x^2 - 3$ 向右平移一个单位后得到的函数解析式为 $y = (x - 1)^2 - 3$ ，

顶点 $M(1, -3)$ ，

令 $x = 0$ ，则 $y = (0 - 1)^2 - 3 = -2$ ，

点 $A(0, -2)$ ，

$x = 3$ 时， $y = (3 - 1)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$ ，

点 $B(3, 1)$ ；

(2) 过点 B 作 $BE \perp AO$ 于 E , 过点 M 作 $MF \perp AO$ 于 M ,

$$\because EB = EA = 3,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA = 45^\circ,$$

同理可求 $\angle FAM = \angle FMA = 45^\circ$,

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle AMF,$$

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{1}{3},$$

$$\text{又} \because \angle BAM = 180^\circ - 45^\circ \times 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle ABM = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3};$$

(3) 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于 H ,

$$\because y = (x - 1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2,$$

$$\therefore \text{设点 } P(x, x^2 - 2x - 2),$$

$$\text{①点 } P \text{ 在 } x \text{ 轴的上方时, } \frac{x^2 - 2x - 2}{x} = \frac{1}{3},$$

$$\text{整理得, } 3x^2 - 7x - 6 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{2}{3} \text{ (舍去), } x_2 = 3,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (3, 1);$$

$$\text{②点 } P \text{ 在 } x \text{ 轴下方时, } \frac{-(x^2 - 2x - 2)}{x} = \frac{1}{3},$$

$$\text{整理得, } 3x^2 - 5x - 6 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{5 - \sqrt{97}}{6} \text{ (舍去), } x_2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{6},$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{97}}{6} \text{ 时, } x^2 - 2x - 2 = -\frac{1}{3} \times \frac{5 + \sqrt{97}}{6} = -\frac{5 + \sqrt{97}}{18},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5 + \sqrt{97}}{6}, -\frac{5 + \sqrt{97}}{18} \right),$$

$$\text{综上所述, 点 } P \text{ 的坐标为 } (3, 1) \text{ 或 } \left(\frac{5 + \sqrt{97}}{6}, -\frac{5 + \sqrt{97}}{18} \right).$$

式，求出 x 的范围即可；

(2) ①连接 QB ，由 $DQ = BC = 6$ ，且 DQ 与 BC 平行，利用一组对边平行且相等的四边形为平行四边形得到四边形 $BCDQ$ 为平行四边形，确定出 QB 的长，当 $\triangle EDQ$ 与 $\triangle EGD$ 相似时，得到 $\angle EDC = \angle DQE$ ，由 QD 与 CE 平行，得到一对内错角相等，等量代换得到 $\angle EDC = \angle QEB$ ，再由一对直角相等，得到三角形 DCE 与三角形 QBE 相似，由相似得比例，列出关系式，求出 y 的值，代入 (1) 得出的解析式中计算即可求出 x 的值；

②延长 PQ ，交 EB 延长线于 M ，由 DQ 与 BM 平行，根据平行得比例，列出关系式，将 $QF = DF$ 代入得到 $MB = BE$ ，由①得到 QB 垂直于 ME ，得到 $QE = QM$ ，由 QD 与 ME 平行，得到比例式，将 $QE = QM$ 代入，变形后即可得证。

【解答】 解：(1) $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $AC = 8$ ， $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$ ，

$$\therefore AB = 10, BC = 6,$$

过点 P 作 $PH \perp BE$ ，垂足为 H ，

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle PHB \text{ 中, } PH = \frac{4}{5}x, BH = \frac{3}{5}x,$$

$$\because CD \parallel HP,$$

$$\therefore \frac{CE}{EH} = \frac{CD}{PH}, \text{ 即 } \frac{y}{y+6-\frac{3}{5}x} = \frac{4}{\frac{4}{5}x},$$

$$\text{解得: } y = \frac{30-3x}{x-5} \quad (5 < x < 10);$$

(2) ①连接 QB ，

$$\because DQ = BC = 6, DQ \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $QBCD$ 是平行四边形，

$$\therefore BQ = 4,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBQ = 90^\circ,$$

当 $\triangle EDQ$ 与 $\triangle EGD$ 相似时，

$$\because \angle EDG < \angle EDQ,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle DQE,$$

$$\because DQ \parallel CE,$$

$$\therefore \angle DQE = \angle QEB,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle QEB,$$

$$\because \angle EBQ = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EBQ \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{CE}{BQ} = \frac{CD}{BE}, \text{ 即 } \frac{y}{4} = \frac{4}{6+y},$$

$$\text{解得: } y_1 = -8 \text{ (舍去)}, y_2 = 2,$$

$$\text{代入 } y = \frac{30-3x}{x-5} \text{ 得: } x = 8;$$

②延长 PQ , 交 EB 延长线于 M ,

$$\because DQ \parallel ME,$$

$$\therefore \frac{QF}{MB} = \frac{PF}{PB} = \frac{FD}{BE},$$

$$\because QF = FD,$$

$$\therefore MB = BE,$$

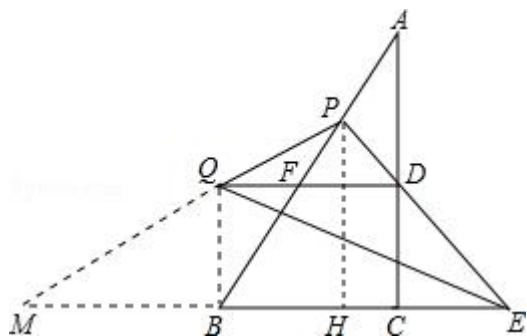
由①得 $QB \perp ME$,

$$\therefore QE = QM,$$

$$\because DQ \parallel ME,$$

$$\therefore \frac{PD}{DE} = \frac{PQ}{QM} = \frac{PQ}{QE},$$

$$\text{则 } \frac{PD}{PQ} = \frac{DE}{QE}.$$



【点评】 此题属于相似形综合题，涉及的知识有：相似三角形的判定与性质，勾股定理，锐角三角函数定义，以及平行线的性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解本题的关键．