

2014 年上海市金山区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 两个相似三角形的面积比为 1:4, 那么这两个三角形的周长比为()

- A. 1: 2 B. 1: 4 C. 1: 8 D. 1: 16

2. (4 分) 如果向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且长度为 $\frac{1}{2}$, 那么向量 $\vec{a}$ 用单位向量 $\vec{e}$ 表示为()

- A. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{e}$ B. $\vec{a} = 2\vec{e}$ C. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{e}$ D. $\vec{a} = -2\vec{e}$

3. (4 分) 将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 1 个单位, 所得新抛物线的函数解析式是()

- A. $y = (x+1)^2$ B. $y = (x-1)^2$ C. $y = x^2+1$ D. $y = x^2-1$

4. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, 如果把这个直角三角形的各边长都扩大 2 倍, 那么所得到的直角三角形中, $\angle B$ 的正切值()

- A. 扩大 2 倍 B. 缩小 2 倍 C. 扩大 4 倍 D. 大小不变

5. (4 分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $BC = m$, 那么 AB 的长为()

- A. $m \sin \alpha$ B. $m \cos \alpha$ C. $\frac{m}{\sin \alpha}$ D. $\frac{m}{\cos \alpha}$

6. (4 分) 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = -(x-2)^2+1$ 的顶点是点 P , 对称轴与 x 轴相交于点 Q , 以点 P 为圆心, PQ 长为半径画 $\odot P$, 那么下列判断正确的是()

- A. x 轴与 $\odot P$ 相离 B. x 轴与 $\odot P$ 相切
C. y 轴与 $\odot P$ 相切 D. y 轴与 $\odot P$ 相交

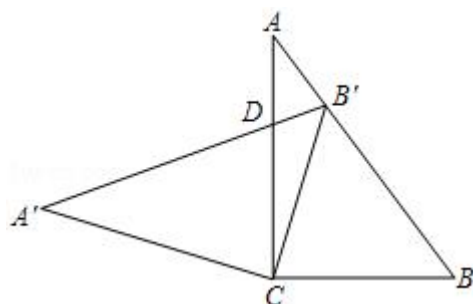
二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 如果 $2x = 3y$, 那么 $\frac{2x+y}{2x-y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. (4 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$, 那么 $\frac{AE}{CE}$ 的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

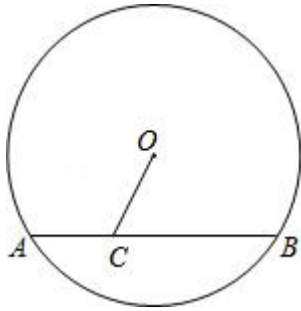
9. (4 分) 计算: $2(\vec{a}+2\vec{b})-3\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. (4分) 抛物线 $y = x^2 + 2x$ 的对称轴是_____.
11. (4分) 二次函数 $y = 2x^2 + t$ 的图象向下平移 2 个单位后经过点 $(1, 3)$, 那么 $t =$ _____.
12. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 12$, 点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $CG =$ _____.
13. (4分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = \sqrt{3}AC$, 那么 $\angle A =$ _____度.
14. (4分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cot B = \frac{1}{3}$, $BC = 3$, 那么 $AC =$ _____.
15. (4分) 已知内切两圆的圆心距为 6, 其中一个圆的半径为 4, 那么另一个圆的半径为_____.
16. (4分) 如果正 n 边形的每一个内角都等于 144° , 那么 $n =$ _____.
17. (4分) 正六边形的边长为 a , 面积为 S , 那么 S 关于 a 的函数关系式是_____.
18. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cos B = \frac{3}{5}$, 把这个直角三角形绕顶点 C 旋转后得到 $\text{Rt}\triangle A'B'C$, 其中点 B' 正好落在 AB 上, $A'B'$ 与 AC 相交于点 D , 那么 $\frac{B'D}{CD} =$ _____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{2\sin^2 60^\circ - \cos^2 45^\circ}{\cos 30^\circ - \tan 30^\circ} \cdot \frac{\tan 60^\circ}{\cot 45^\circ}$.
20. (10分) 已知一个二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(4, 1)$ 和 $(-1, 6)$.
- (1) 求这个二次函数的解析式;
- (2) 求这个二次函数图象的顶点坐标和对称轴.
21. (10分) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的弦, 点 C 在线段 AB 上, $OC = AC = 4$, $CB = 8$. 求 $\odot O$ 的半径.



22. (10分) 如图1, 某超市从底楼到二楼有一自动扶梯, 图2是侧面示意图. 已知自动扶梯 AB 的坡度为 $1:2.4$, AB 的长度是 13 米, MN 是二楼楼顶, $MN \parallel PQ$, C 是 MN 上处在自动扶梯顶端 B 点正上方的一点, $BC \perp MN$, 在自动扶梯底端 A 处测得 C 点的仰角为 42° , 求二楼的层高 BC (精确到 0.1 米). (参考数据: $\sin 42^\circ \approx 0.67$, $\cos 42^\circ \approx 0.74$, $\tan 42^\circ \approx 0.90$)



图1

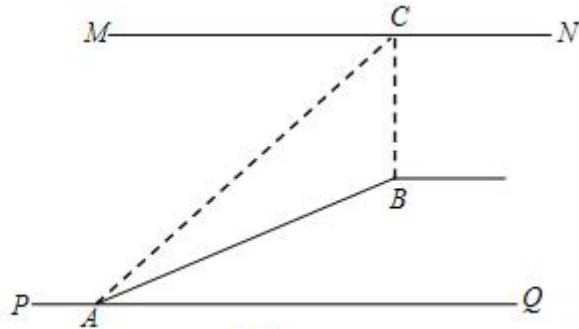
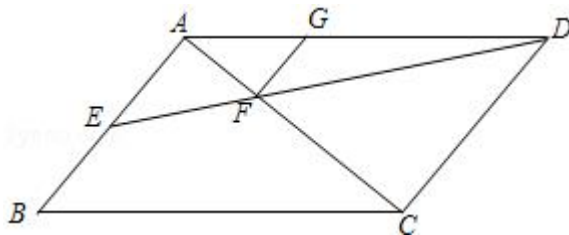


图2

23. (12分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, E 是 AB 的中点, ED 和 AC 相交于点 F , 过点 F 作 $FG \parallel AB$, 交 AD 于点 G .

(1) 求证: $AB = 3FG$;

(2) 若 $AB:AC = \sqrt{2}:\sqrt{3}$, 求证: $DF^2 = DG \cdot DA$.



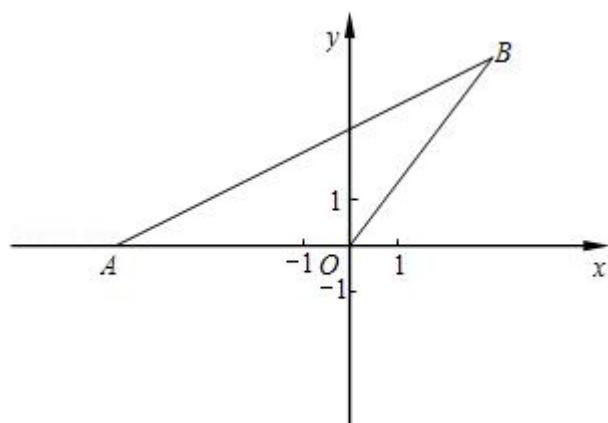
24. (12分) 已知, 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象经过点 $A(-5, 0)$ 和点 B , 其中点 B 在第一象限, 且 $OA = OB$, $\cot \angle BAO = 2$.

(1) 求点 B 的坐标;

(2) 求二次函数的解析式;

(3) 过点 B 作直线 BC 平行于 x 轴, 直线 BC 与二次函数图象的另一个交点为 C ,

联结 AC ，如果点 P 在 x 轴上，且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PAB$ 相似，求点 P 的坐标．



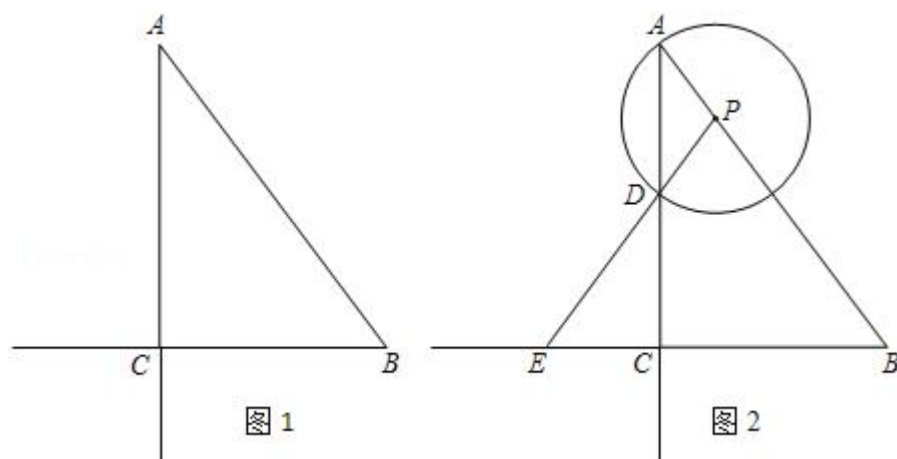
25. (14 分) 如图 1， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ， P 是斜边 AB 上的一个动点（点 P 与点 A 、 B 不重合），以点 P 为圆心， PA 为半径的 $\odot P$ 与射线 AC 的另一个交点为 D ，射线 PD 交射线 BC 于点 E ．

(1) 如图 2，若点 E 在线段 BC 的延长线上，设 $AP = x$ ， $CE = y$ ，

①求 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；

②当以 BE 为直径的圆和 $\odot P$ 外切时，求 AP 的长；

(2) 设线段 BE 的中点为 Q ，射线 PQ 与 $\odot P$ 相交于点 I ，若 $CI = AP$ ，求 AP 的长．



2014 年上海市金山区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）两个相似三角形的面积比为 1:4, 那么这两个三角形的周长比为（ ）

- A. 1: 2 B. 1: 4 C. 1: 8 D. 1: 16

【考点】S7: 相似三角形的性质.

【分析】根据相似三角形面积的比等于相似比的平方求出相似比, 再根据相似三角形的周长的比等于相似比解答.

【解答】解: $\because$ 两个相似三角形的面积比是 1: 4,

$\therefore$ 它们的相似比是 1: 2,

$\therefore$ 它们的周长比是 1: 2.

故选: A.

【点评】本题考查了相似三角形的性质, 熟记性质并求出两三角形的相似比是解题的关键.

2.（4 分）如果向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且长度为 $\frac{1}{2}$, 那么向量 $\vec{a}$ 用单位向量 $\vec{e}$ 表示为（ ）

- A. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{e}$ B. $\vec{a} = 2\vec{e}$ C. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{e}$ D. $\vec{a} = -2\vec{e}$

【考点】LM: *平面向量.

【分析】由向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且长度为 $\frac{1}{2}$, 根据向量的定义, 即可求得答案.

【解答】解: $\because$ 向量 $\vec{a}$ 与单位向量 $\vec{e}$ 方向相反, 且长度为 $\frac{1}{2}$,

$\therefore \vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{e}$.

故选: C.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题比较简单, 注意掌握单位向量的知识.

3.（4 分）将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 1 个单位, 所得新抛物线的函数解析式是（ ）

A. $y = (x+1)^2$ B. $y = (x-1)^2$ C. $y = x^2+1$ D. $y = x^2-1$

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【分析】求出平移后的抛物线的顶点坐标,然后根据顶点式解析式形式写出即可.

【解答】解: $\because$ 抛物线 $y = x^2$ 向右平移 1 个单位的顶点坐标为 $(1, 0)$,

$\therefore$ 所得新抛物线的函数解析式是 $y = (x-1)^2$.

故选: B.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换, 此类题目, 利用顶点的变化确定抛物线解析式更简便.

4. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, 如果把这个直角三角形的各边长都扩大 2 倍, 那么所得到的直角三角形中, $\angle B$ 的正切值 ()

A. 扩大 2 倍 B. 缩小 2 倍 C. 扩大 4 倍 D. 大小不变

【考点】T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】把这个直角三角形的各边长都扩大 2 倍, 那么所得到的直角三角形与原三角形相似, 则 $\angle B$ 的大小不变, 根据三角函数的性质即可判断.

【解答】解: 把这个直角三角形的各边长都扩大 2 倍, 那么所得到的直角三角形与原来的三角形相似, 则 $\angle B$ 的大小不变, 则 $\angle B$ 的正切值不变.

故选: D.

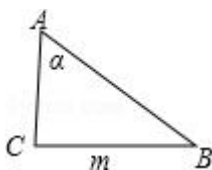
【点评】本题考查了三角函数, 三角函数值的大小是由角度的大小确定的, 角大小不变则三角函数值不变.

5. (4 分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $BC = m$, 那么 AB 的长为 ()

A. $m \sin \alpha$ B. $m \cos \alpha$ C. $\frac{m}{\sin \alpha}$ D. $\frac{m}{\cos \alpha}$

【考点】T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】解直角三角形得出 $\sin A = \frac{BC}{AB}$, 代入求出即可.



【解答】

解: 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $BC = m$, $\angle A = \alpha$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{m}{\sin \alpha},$$

故选：C.

【点评】 本题考查了锐角三角函数的定义的应用，主要考查学生的理解能力和计算能力.

6. (4分) 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = -(x-2)^2 + 1$ 的顶点是点 P ，对称轴与 x 轴相交于点 Q ，以点 P 为圆心， PQ 长为半径画 $\odot P$ ，那么下列判断正确的是 ()

A. x 轴与 $\odot P$ 相离

B. x 轴与 $\odot P$ 相切

C. y 轴与 $\odot P$ 相切

D. y 轴与 $\odot P$ 相交

【考点】 HF：二次函数综合题.

【分析】 根据抛物线解析式写出顶点 P 和点 Q 的坐标，然后求出 PQ 的长，再根据直线与圆的位置关系解答.

【解答】 解：由题意得，顶点 $P(2, 1)$ ， $Q(2, 0)$ ，

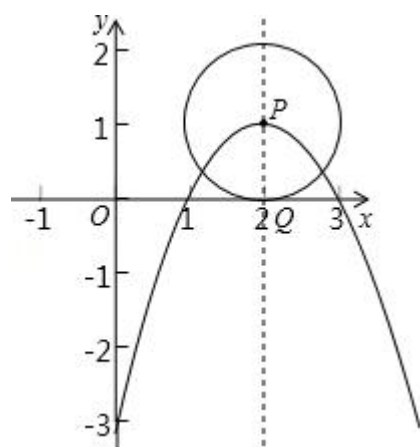
所以 $PQ = 1$ ，

即 $\odot P$ 的半径为 1，

$\therefore$ 点 P 到 x 轴的距离为 1，到 y 轴的距离为 2，

$\therefore x$ 轴与 $\odot P$ 相切， y 轴与 $\odot P$ 相离.

故选：B.



【点评】 本题是二次函数综合题，主要涉及根据抛物线顶点形式写出顶点坐标，直线与圆的位置关系，比较简单，作出图形更形象直观.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）如果 $2x = 3y$ ，那么 $\frac{2x+y}{2x-y} = \underline{2}$.

【考点】S1：比例的性质.

【分析】把比例式中的 $2x$ 换为 $3y$ ，然后求解即可.

【解答】解： $\because 2x = 3y$,

$$\therefore \frac{2x+y}{2x-y} = \frac{3y+y}{3y-y} = \frac{4y}{2y} = 2.$$

故答案为：2.

【点评】本题考查了比例的性质，整体代入求解更加简便.

8.（4 分）已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}$,

那么 $\frac{AE}{CE}$ 的值等于 $\underline{\frac{3}{2}}$.

【考点】S4：平行线分线段成比例.

【分析】根据平行线分线段成比例定理求得 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$ ；然后利用比例的性质

求得 $\frac{AE}{CE}$ 的值.

【解答】解： $\because DE \parallel BC$,

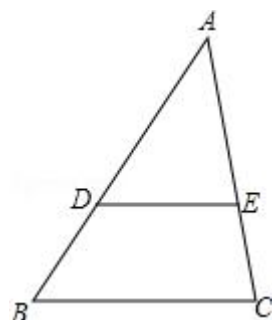
$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC};$$

$$\text{又 } \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{3}{2};$$

故答案是： $\frac{3}{2}$.



【点评】本题考查了平行线分线段成比例. 解答本题的关键是利用平行条件，写

出要求的线段与已知线段之间的数量关系.

9. (4分) 计算: $2(\vec{a}+2\vec{b})-3\vec{b} = \underline{2\vec{a}+\vec{b}}$.

【考点】LM: *平面向量.

【分析】直接利用整式加减的运算法则求解可求得答案.

【解答】解: $2(\vec{a}+2\vec{b})-3\vec{b} = 2\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{b} = 2\vec{a}+\vec{b}$.

故答案为: $2\vec{a}+\vec{b}$.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题比较简单, 注意掌握平面向量的运算.

10. (4分) 抛物线 $y = x^2+2x$ 的对称轴是 直线 $x = -1$.

【考点】H3: 二次函数的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】先把一般式配成顶点式, 根据二次函数的性质即可得到抛物线的对称轴.

【解答】解: $y = x^2+2x = (x^2+2x+1) - 1 = (x+1)^2 - 1$,

抛物线的对称轴为直线 $x = -1$.

故答案为直线 $x = -1$.

【点评】本题考查了二次函数的性质: 二次函数 $y = ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象为抛物线, 当 $a > 0$, 抛物线开口向上; 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$; 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, c)$; 当 $b^2 - 4ac > 0$, 抛物线与 x 轴有两个交点; 当 $b^2 - 4ac = 0$, 抛物线与 x 轴有一个交点; 当 $b^2 - 4ac < 0$, 抛物线与 x 轴没有交点.

11. (4分) 二次函数 $y = 2x^2+t$ 的图象向下平移 2 个单位后经过点 $(1, 3)$, 那么 $t = \underline{3}$.

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】根据向下平移纵坐标减求出平移后的顶点坐标并写出解析式, 然后把经过的点的坐标代入函数解析式计算即可得解.

【解答】解: $\because$ 二次函数 $y = 2x^2+t$ 的图象向下平移 2 个单位后的顶点坐标为 $(0, t-2)$,

$\therefore$ 平移后的函数解析式为 $y = 2x^2+t-2$,

$\therefore 2 \times 1^2+t-2 = 3$,

解得 $t = 3$.

故答案为：3.

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换，此类题目利用顶点的平移解答更简便.

12. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 12$ ，点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，那么 $CG = \underline{4}$.

【考点】 K5：三角形的重心.

【分析】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 G 为重心， $AB = 12$ ，则 AB 边上的中线是6，根据重心的性质即可求出 CG .

【解答】 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，

$\because AB = 12$,

$\therefore AB$ 边上的中线是6，

$\because$ 点 G 为重心，

$\therefore CG = 6 \times \frac{2}{3} = 4$.

故答案是：4.

【点评】 本题主要考查了三角形的重心的性质，是需要熟记的内容. 重心的性质：

①重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为2:1；②重心和三角形3个顶点组成的3个三角形面积相等；③重心到三角形3个顶点距离的和最小（等边三角形）.

13. (4分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = \sqrt{3}AC$ ，那么 $\angle A = \underline{60}$ 度.

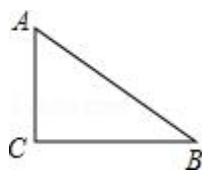
【考点】 T5：特殊角的三角函数值.

【分析】 做出图形，可得 $\tan A = \frac{BC}{AC}$ ，继而可求得 $\angle A$ 的度数.

【解答】 解：由图可得： $\tan A = \frac{BC}{AC} = \sqrt{3}$,

则 $\angle A = 60^\circ$.

故答案为：60.



【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值，解答本题的关键是根据题意做出图形，利用特殊角的三角函数值求解.

14. (4分) 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cot B = \frac{1}{3}$, $BC = 3$, 那么 $AC = \underline{9}$.

【考点】T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】根据三角函数的定义即可求解.

【解答】解: $\because \cot B = \frac{BC}{AC}$,

$$\therefore AC = \frac{BC}{\cot B} = \frac{BC}{\frac{1}{3}} = 3BC = 9.$$

故答案是: 9.

【点评】本题考查锐角三角函数的定义及运用: 在直角三角形中, 锐角的正弦为对边比斜边, 余弦为邻边比斜边, 正切为对边比邻边, 余切为邻边比对边.

15. (4分) 已知内切两圆的圆心距为 6, 其中一个圆的半径为 4, 那么另一个圆的半径为 10.

【考点】MJ: 圆与圆的位置关系.

【分析】由两圆内切根据两圆位置关系与圆心距 d , 两圆半径 R, r 的数量关系间的联系, 即可求得答案.

【解答】解: $\because$ 两圆内切, 一个圆的半径是 4, 圆心距是 6,

$$\therefore \text{另一个圆的半径} = 6 + 4 = 10.$$

故答案为: 10.

【点评】考查了两圆的位置关系, 外离, 则 $P > R + r$; 外切, 则 $P = R + r$; 相交, 则 $R - r < P < R + r$; 内切, 则 $P = R - r$; 内含, 则 $P < R - r$.

(P 表示圆心距, R, r 分别表示两圆的半径).

16. (4分) 如果正 n 边形的每一个内角都等于 144° , 那么 $n = \underline{10}$.

【考点】L3: 多边形内角与外角.

【分析】首先求得外角的度数, 然后利用 360 度除以外角的度数即可求得.

【解答】解: 外角的度数是: $180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$,

$$\text{则 } n = \frac{360}{36} = 10.$$

故答案是: 10.

【点评】本题考查根据多边形的内角和计算公式求多边形的边数, 解答时要会根据公式进行正确运算、变形和数据处理.

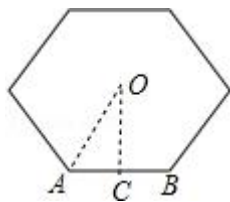
17. (4分) 正六边形的边长为 a , 面积为 S , 那么 S 关于 a 的函数关系式是

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

【考点】MM: 正多边形和圆.

【分析】: 经过圆心 O 作圆的内接正 n 边形的一边 AB 的垂线 OC , 垂足是 C ; 连接 OA , 则在直角 $\triangle OAC$ 中,

$\angle O = 30^\circ$, OC 是边心距, OA 即半径. 再根据三角函数即可求解.



【解答】解: 边长为 a 的正六边形的面积 $= 6 \times$ 边长为 a 的等边三角形的面积 s

$$= 6 \times \frac{1}{2} \times a \times (a \times \sin 60^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

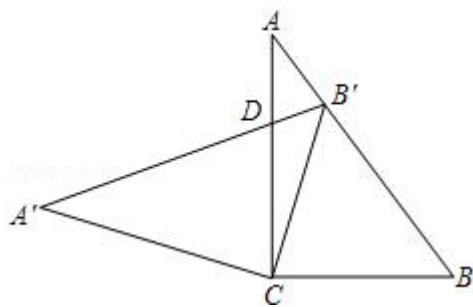
故答案为: $S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$.

【点评】本题考查了正多边形和圆的知识, 解决本题的关键是求得正六边形的面积所分割的等边三角形的面积.

18. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\cos B = \frac{3}{5}$, 把这个直角三角形绕顶点 C

旋转后得到 $\text{Rt}\triangle A'B'C$, 其中点 B' 正好落在 AB 上, $A'B'$ 与 AC 相交于

点 D , 那么 $\frac{B'D}{CD} = \frac{7}{20}$.



【考点】R2: 旋转的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】作 $CH \perp AB$ 于 H , 先在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 根据余弦的定义得到 $\cos B = \frac{BC}{AB} =$

$\frac{3}{5}$, 设 $BC = 3x$, 则 $AB = 5x$, 再根据勾股定理计算出 $AC = 4x$, 在 $\text{Rt}\triangle HBC$ 中,

根据余弦的定义可计算出 $BH = \frac{9}{5}x$ ，接着根据旋转的性质得 $CA' = CA = 4x$ ，

$CB' = CB$ ， $\angle A' = \angle A$ ，所以根据等腰三角形的性质有 $B'H = BH = \frac{9}{5}x$ ，

则 $AB' = \frac{7}{5}x$ ，然后证明 $\triangle ADB' \sim \triangle A'DC$ ，再利用相似比可计算出 $B'D$

与 DC 的比值。

【解答】 解：作 $CH \perp AB$ 于 H ，如图，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$ ，设 $BC = 3x$ ，则 $AB = 5x$ ，

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4x,$$

在 $\text{Rt}\triangle HBC$ 中， $\cos B = \frac{BH}{BC} = \frac{3}{5}$ ，而 $BC = 3x$ ，

$$\therefore BH = \frac{9}{5}x,$$

$\because \text{Rt}\triangle ABC$ 绕顶点 C 旋转后得到 $\text{Rt}\triangle A'B'C$ ，其中点 B' 正好落在 AB 上，

$$\therefore CA' = CA = 4x, CB' = CB, \angle A' = \angle A,$$

$$\because CH \perp BB',$$

$$\therefore B'H = BH = \frac{9}{5}x,$$

$$\therefore AB' = AB - B'H - BH = \frac{7}{5}x,$$

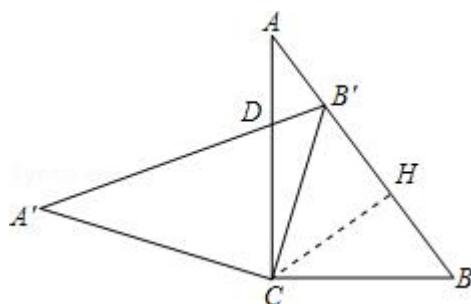
$$\because \angle ADB' = \angle A'DC, \angle A' = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADB' \sim \triangle A'DC,$$

$$\therefore \frac{AB'}{A'C} = \frac{B'D}{DC}, \text{ 即 } \frac{\frac{7}{5}x}{4x} = \frac{B'D}{DC},$$

$$\therefore \frac{B'D}{DC} = \frac{7}{20}.$$

故答案为 $\frac{7}{20}$ 。



【点评】 本题考查了旋转的性质：旋转前后两图形全等；对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角．也考查了三角形相似的判定与性质以及锐角三角函数．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. (10 分) 计算：
$$\frac{2\sin^2 60^\circ - \cos^2 45^\circ}{\cos 30^\circ - \tan 30^\circ} - \frac{\tan 60^\circ}{\cot 45^\circ}.$$

【考点】 T5：特殊角的三角函数值．

【分析】 将特殊角的三角函数值代入求解．

【解答】 解：原式 =
$$\frac{2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{6}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值，解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值．

20. (10 分) 已知一个二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过点 (4, 1) 和 (-1, 6)．

(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 求这个二次函数图象的顶点坐标和对称轴．

【考点】 H3：二次函数的性质；H8：待定系数法求二次函数解析式．

【专题】 11：计算题．

【分析】 (1) 利用待定系数法确定二次函数的解析式；

(2) 把 (1) 中得到的解析式配成顶点式，然后根据二次函数的性质确定顶点坐标和对称轴．

【解答】 解：(1) 由题意得
$$\begin{cases} 4^2 + b \cdot 4 + c = 1 \\ (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 6 \end{cases},$$

解这个方程组得
$$\begin{cases} b = -4 \\ c = 1 \end{cases},$$

所以所求二次函数的解析式是 $y = x^2 - 4x + 1$ ；

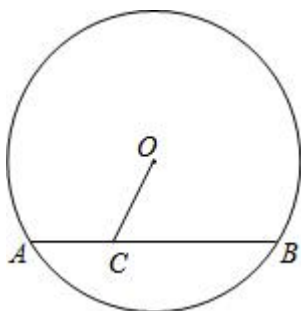
(2) $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$,

所以顶点坐标是 (2, -3)，对称轴是直线 $x = 2$ ．

【点评】 用待定系数法求二次函数的解析式．在利用待定系数法求二次函数关系式时，要根据题目给定的条件，选择恰当的方法设出关系式，从而代入数值求解．一般地，当已知抛物线上三点时，常选择一般式，用待定系数法列三

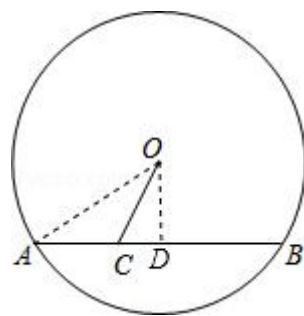
元一次方程组来求解；当已知抛物线的顶点或对称轴时，常设其解析式为顶点式来求解；当已知抛物线与 x 轴有两个交点时，可选择设其解析式为交点式来求解。

21. (10 分) 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的弦，点 C 在线段 AB 上， $OC = AC = 4$ ， $CB = 8$ 。求 $\odot O$ 的半径。



【考点】 KQ: 勾股定理; M2: 垂径定理.

【分析】 连接 OA ，过点 O 作 $OD \perp AB$ ，垂足为点 D ，根据垂径定理求出 AD ，求出 CD ，根据勾股定理求出 OD ，在 $\triangle ADO$ 中根据勾股定理求出 OA 即可。



【解答】 解：连接 OA ，过点 O 作 $OD \perp AB$ ，垂足为点 D ，

$$\because AC = 4, CB = 8,$$

$$\therefore AB = 12.$$

$$\because OD \perp AB,$$

$$\therefore AD = DB = 6,$$

$$\therefore CD = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDO$ 中， $\angle CDO = 90^\circ$ ， $OC = 4$ ， $CD = 2$ ，

$$\therefore OD = 2\sqrt{3}$$

在 $\text{Rt}\triangle ADO$ 中， $\angle ADO = 90^\circ$ ，由勾股定理得： $OA = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = 4\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \odot O \text{ 的半径是 } 4\sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了勾股定理，垂径定理的应用，主要考查学生的推理能力。

22. (10分) 如图1, 某超市从底楼到二楼有一自动扶梯, 图2是侧面示意图. 已知自动扶梯 AB 的坡度为 $1:2.4$, AB 的长度是 13 米, MN 是二楼楼顶, $MN \parallel PQ$, C 是 MN 上处在自动扶梯顶端 B 点正上方的一点, $BC \perp MN$, 在自动扶梯底端 A 处测得 C 点的仰角为 42° , 求二楼的层高 BC (精确到 0.1 米). (参考数据: $\sin 42^\circ \approx 0.67$, $\cos 42^\circ \approx 0.74$, $\tan 42^\circ \approx 0.90$)



图1

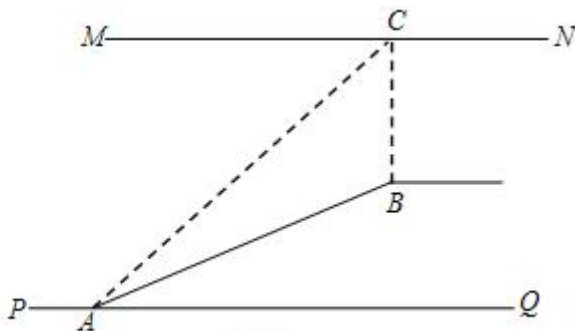


图2

【考点】 T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题; TA: 解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【分析】 延长 CB 交 PQ 于点 D , 根据坡度的定义即可求得 BD 的长, 然后在直角 $\triangle CDA$ 中利用三角函数即可求得 CD 的长, 则 BC 即可得到.

【解答】 解: 延长 CB 交 PQ 于点 D .

$$\because MN \parallel PQ, BC \perp MN,$$

$$\therefore BC \perp PQ.$$

$$\because \text{自动扶梯 } AB \text{ 的坡度为 } 1:2.4,$$

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12}.$$

$$\text{设 } BD = 5k \text{ 米, } AD = 12k \text{ 米, 则 } AB = 13k \text{ 米.}$$

$$\because AB = 13 \text{ 米,}$$

$$\therefore k = 1,$$

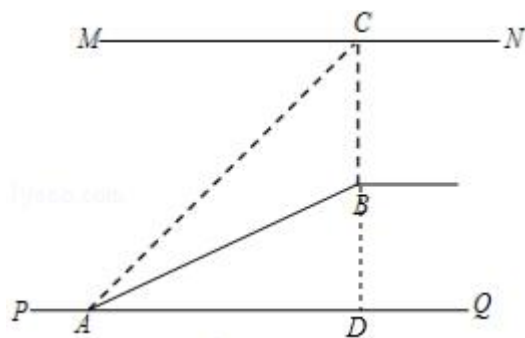
$$\therefore BD = 5 \text{ 米, } AD = 12 \text{ 米.}$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDA \text{ 中, } \angle CDA = 90^\circ, \angle CAD = 42^\circ,$$

$$\therefore CD = AD \cdot \tan \angle CAD \approx 12 \times 0.90 \approx 10.8 \text{ 米,}$$

$$\therefore BC \approx 5.8 \text{ 米.}$$

答: 二楼的层高 BC 约为 5.8 米.

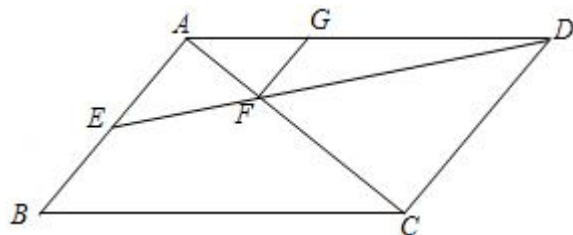


【点评】本题考查仰角和坡度的定义，要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形.

23. (12分) 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 是 AB 的中点， ED 和 AC 相交于点 F ，过点 F 作 $FG \parallel AB$ ，交 AD 于点 G .

(1) 求证： $AB = 3FG$;

(2) 若 $AB:AC = \sqrt{2}:\sqrt{3}$ ，求证： $DF^2 = DG \cdot DA$.



【考点】L5：平行四边形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】(1) 平行四边形的性质、线段中点的定义推知 $\frac{AF}{FC} = \frac{EF}{FD} = \frac{1}{2}$. 然后由平行线的性质和平行线分线段成比例得得到： $\frac{FG}{CD} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$ ，所以 $\frac{FG}{AB} = \frac{1}{3}$ ，即 $AB = 3FG$;

(2) 根据已知条件可以设 $AB = \sqrt{2}k$ ， $AC = \sqrt{3}k$ ，则 $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}k$ ， $AF = \frac{\sqrt{3}}{3}k$. 通过证 $\triangle AEF \sim \triangle ACB$ ，得到对应角 $\angle AEF = \angle ACB$. 然后易证 $\triangle FDG \sim \triangle ADF$ ，所以 $\frac{DF}{DA} = \frac{DG}{DF}$ ，即 $DF^2 = DG \cdot DA$.

【解答】证明：(1) 在 $\square ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ， $AD \parallel BC$ ，

又 $\because E$ 是 AB 的中点，

$$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{AF}{FC} = \frac{EF}{FD} = \frac{1}{2}.$$

$\because FG \parallel AB$ ，

$\therefore FG \parallel CD$ ，

$$\therefore \frac{FG}{CD} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{FG}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AB = 3FG;$$

(2) 设 $AB = \sqrt{2}k$, $AC = \sqrt{3}k$,

$$\text{则 } AE = \frac{\sqrt{2}}{2}k, \quad AF = \frac{\sqrt{3}}{3}k.$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}k}{\sqrt{3}k} = \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad \frac{AF}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}k}{\sqrt{2}k} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{又 } \because \angle EAF = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle ACB.$$

$$\because FG \parallel AB, \quad AD \parallel BC;$$

$$\therefore \angle AEF = \angle DFG, \quad \angle ACB = \angle DAF,$$

$$\therefore \angle DFG = \angle DAF.$$

$$\text{又 } \because \angle FDG = \angle ADF,$$

$$\therefore \triangle FDG \sim \triangle ADF,$$

$$\therefore \frac{DF}{DA} = \frac{DG}{DF},$$

$$\therefore DF^2 = DG \cdot DA.$$

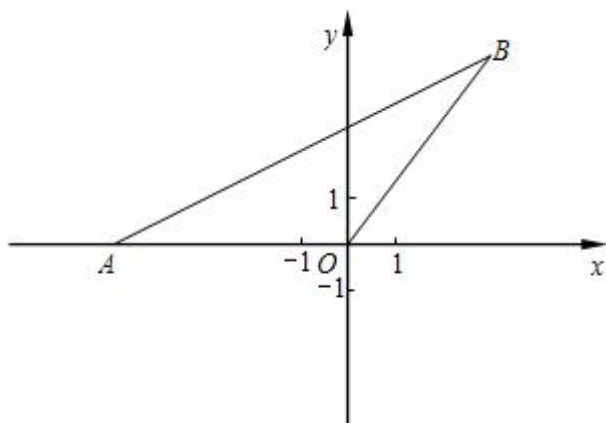
【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质，平行四边形的性质．相似三角形的对应边成比例，对应角相等．

24. (12分) 已知，二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象经过点 $A(-5, 0)$ 和点 B ，其中点 B 在第一象限，且 $OA = OB$, $\cot \angle BAO = 2$.

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 求二次函数的解析式；

(3) 过点 B 作直线 BC 平行于 x 轴，直线 BC 与二次函数图象的另一个交点为 C ，联结 AC ，如果点 P 在 x 轴上，且 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PAB$ 相似，求点 P 的坐标．



【考点】H8：待定系数法求二次函数解析式．

【专题】11：计算题．

【分析】（1）过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，垂足为点 D ，根据余切的定义可设 $BD = x$ ， $AD = 2x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ODB$ 中根据勾股定理可计算出 x ，则 $BD = 4$ ， $OD = 3$ ，所以点 B 的坐标是 $(3, 4)$ ；

（2）利用待定系数法可确定二次函数的解析式；

（3）先确定 C 点的坐标为 $(-8, 4)$ ，则 $BC = 11$ ， $AB = 4\sqrt{5}$ ，由 $CB \parallel x$ 轴得到 $\angle ABC = \angle BAP$ ，再分类讨论：当 $\triangle ABC \sim \triangle BAP$ ；当 $\triangle ABC \sim \triangle PAB$ ，然后利用比例线段求 AP 的长，从而确定 P 点坐标．

【解答】解：（1）过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，垂足为点 D ，如图，

在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中， $\angle ADB = 90^\circ$ ， $\cot \angle BAO = \frac{AD}{BD} = 2$ ，

设 $BD = x$ ， $AD = 2x$ ，

$\because OA = OB = 5$ ，

$\therefore OD = 2x - 5$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ODB$ 中， $\because OD^2 + BD^2 = OB^2$ ，

$\therefore (2x - 5)^2 + x^2 = 5^2$ ，

解得 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 0$ （不合题意，舍去），

$\therefore BD = 4$ ， $OD = 3$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(3, 4)$ ，

（2）根据题意得 $\begin{cases} 25a - 5b = 0 \\ 9a + 3b = 4 \end{cases}$ ，

解这个方程组，得 $\begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=\frac{5}{6} \end{cases}$,

$\therefore$ 二次函数的解析式是 $y=\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x$;

(3) $\because$ 直线 BC 平行于 x 轴,

$\therefore C$ 点的纵坐标为 4,

设 C 点的坐标为 $(m, 4)$.

由题意得 $\frac{1}{6}m^2+\frac{5}{6}m=4$, 解得 $m_1=3$ (不合题意, 舍去), $m_2=-8$,

$\therefore C$ 点的坐标为 $(-8, 4)$, $BC=11$, $AB=4\sqrt{5}$. $\cdots$ (1 分)

$\because \angle ABC = \angle BAP$,

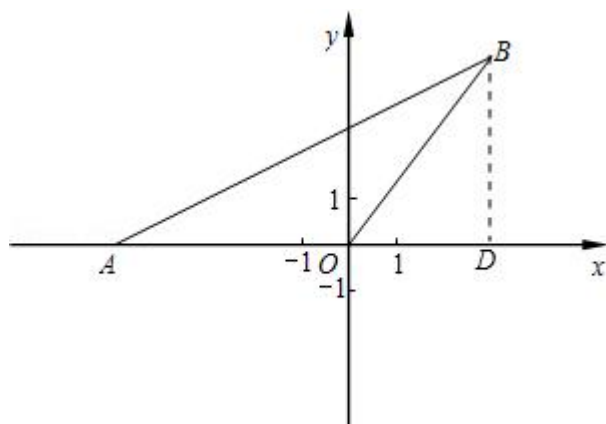
①如果 $\triangle ABC \sim \triangle BAP$, 那么 $\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{AP}$,

$\therefore AP=11$, 点 P 的坐标为 $(6, 0)$,

②如果 $\triangle ABC \sim \triangle PAB$, 那么 $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{AB}$,

$\therefore AP = \frac{80}{11}$, 点 P 的坐标为 $(\frac{25}{11}, 0)$,

综上所述, 点 P 的坐标为 $(6, 0)$ 或 $(\frac{25}{11}, 0)$.



【点评】用待定系数法求二次函数的解析式. 在利用待定系数法求二次函数关系式时, 要根据题目给定的条件, 选择恰当的方法设出关系式, 从而代入数值求解. 一般地, 当已知抛物线上三点时, 常选择一般式, 用待定系数法列三元一次方程组来求解; 当已知抛物线的顶点或对称轴时, 常设其解析式为顶点式来求解; 当已知抛物线与 x 轴有两个交点时, 可选择设其解析式为交点

式来求解.

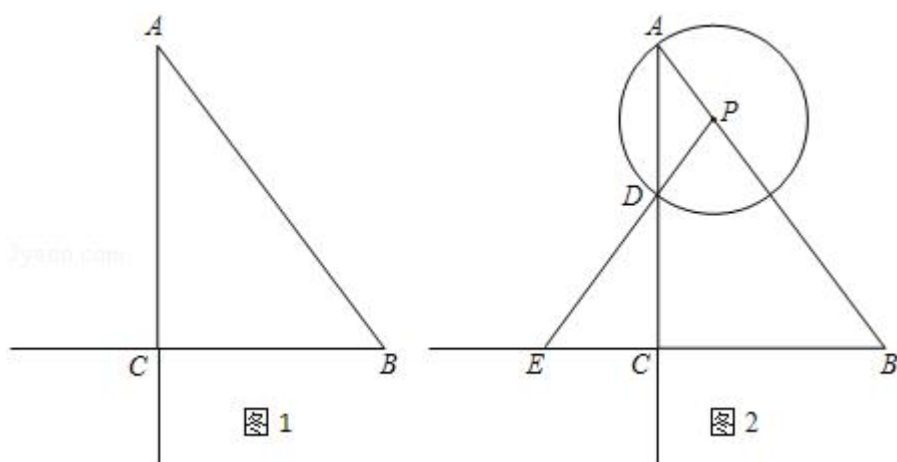
25. (14分) 如图1, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, P 是斜边 AB 上的一个动点 (点 P 与点 A 、 B 不重合), 以点 P 为圆心, PA 为半径的 $\odot P$ 与射线 AC 的另一个交点为 D , 射线 PD 交射线 BC 于点 E .

(1) 如图2, 若点 E 在线段 BC 的延长线上, 设 $AP = x$, $CE = y$,

①求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

②当以 BE 为直径的圆和 $\odot P$ 外切时, 求 AP 的长;

(2) 设线段 BE 的中点为 Q , 射线 PQ 与 $\odot P$ 相交于点 I , 若 $CI = AP$, 求 AP 的长.



【考点】MR: 圆的综合题.

【分析】(1) ①由 $AP = DP$ 得到 $\angle PAD = \angle PDA$, 由对顶角相等得 $\angle PDA = \angle CDE$, 则 $\angle PAD = \angle CDE$, 根据三角形相似的判定方法得到 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, 则 $\angle ABC = \angle DEC$, $\frac{BC}{CE} = \frac{AB}{DE}$, 且得到 $PB = PE$. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中根据勾股定理计算出 $AB = 5$, 则 $PB = PE = 5 - x$, $DE = 5 - 2x$, 然后利用相似比即可得到 y 关于 x 的函数关系式;

②设 BE 的中点为 Q , 连结 PQ , 由于 $PB = PE$, 根据等腰三角形的性质得 $PQ \perp BE$, 易得 $PQ \parallel AC$, 则 $\triangle BPQ \sim \triangle BAC$, 利用相似比得到 $PQ = -\frac{4}{5}x + 4$ (圆心距), $BQ = -\frac{3}{5}x + 3$ ($\odot Q$ 的半径), 根据两圆外切的性质得到 $-\frac{4}{5}x + 4 = x + (-\frac{3}{5}x + 3)$, 然后解方程即可;

(2) 分类讨论: 当点 E 在线段 BC 延长线上时, 利用 (1) ②的结论可得 $IQ =$

$PQ - PI = -\frac{9}{5}x + 4$, $CQ = BC - BQ = \frac{3}{5}x$, 在 $\text{Rt}\triangle CQI$ 中, 根据勾股定理得 $CI^2 = CQ^2 + IQ^2 = (\frac{3}{5}x)^2 + (-\frac{9}{5}x + 4)^2 = \frac{18}{5}x^2 - \frac{72}{5}x + 16$, 再由 $CI = AP$ 得到 $\frac{18}{5}x^2 - \frac{72}{5}x + 16 = x^2$, 解得 $x_1 = \frac{20}{13}$, $x_2 = 4$, 由于 $0 < x < \frac{5}{2}$, 由此得到 AP 的长为 $\frac{20}{13}$; 同理当点 E 在线段 BC 上时, $IQ = PI - PQ = \frac{9}{5}x - 4$, $CQ = BC - BQ = \frac{3}{5}x$, 在 $\text{Rt}\triangle CQI$ 中, $CI^2 = CQ^2 + IQ^2 = \frac{18}{5}x^2 - \frac{72}{5}x + 16$, 利用 $CI = AP$ 得到 $\frac{18}{5}x^2 - \frac{72}{5}x + 16 = x^2$, 解得 $x_1 = \frac{20}{13}$, $x_2 = 4$, 由于 $\frac{5}{2} < x < 5$, 则 AP 的长为 4, 由此得到 AP 的长为 $\frac{20}{13}$ 或 4.

【解答】解: (1) ①如图 2 $\because AP = DP$,

$$\therefore \angle PAD = \angle PDA,$$

$$\because \angle PDA = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle PAD = \angle CDE,$$

$$\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DEC, \frac{BC}{CE} = \frac{AB}{DE}.$$

$$\therefore PB = PE.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore PB = PE = 5 - x, DE = PE - PD = 5 - x - x = 5 - 2x,$$

$$\therefore \frac{3}{y} = \frac{5}{5-2x},$$

$$\therefore y = -\frac{6}{5}x + 3 \quad (0 < x < \frac{5}{2});$$

②设 BE 的中点为 Q , 连结 PQ , 如图 2,

$$\because PB = PE,$$

$$\therefore PQ \perp BE,$$

$$\text{又} \because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore PQ \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle BPQ \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB} = \frac{BQ}{BC}, \text{ 即 } \frac{PQ}{4} = \frac{5-x}{5} = \frac{BQ}{3},$$

$$\therefore PQ = -\frac{4}{5}x+4, BQ = -\frac{3}{5}x+3,$$

当以 BE 为直径的圆和 $\odot P$ 外切时, $-\frac{4}{5}x+4 = x + (-\frac{3}{5}x+3)$, 解得 $x = \frac{5}{6}$, 即 AP 的长为 $\frac{5}{6}$;

(2) 当点 E 在线段 BC 延长线上时,

$$\text{由 (1) ② 的结论可得 } IQ = PQ - PI = -\frac{4}{5}x+4 - x = -\frac{9}{5}x+4,$$

$$CQ = BC - BQ = 3 - (-\frac{3}{5}x+3) = \frac{3}{5}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CQI \text{ 中, } CI^2 = CQ^2 + IQ^2 = (\frac{3}{5}x)^2 + (-\frac{9}{5}x+4)^2 = \frac{18}{5}x^2 - \frac{72}{5}x+16,$$

$$\because CI = AP,$$

$$\therefore \frac{18}{5}x^2 - \frac{72}{5}x+16 = x^2,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{20}{13}, x_2 = 4 \text{ (不合题意, 舍去),}$$

$$\therefore AP \text{ 的长为 } \frac{20}{13};$$

$$\text{当点 } E \text{ 在线段 } BC \text{ 上时, } IQ = PI - PQ = x - (-\frac{4}{5}x+4) = \frac{9}{5}x - 4,$$

$$CQ = BC - BQ = 3 - (-\frac{3}{5}x+3) = \frac{3}{5}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CQI \text{ 中, } CI^2 = CQ^2 + IQ^2 = (\frac{3}{5}x)^2 + (\frac{9}{5}x - 4)^2 = \frac{18}{5}x^2 - \frac{72}{5}x+16,$$

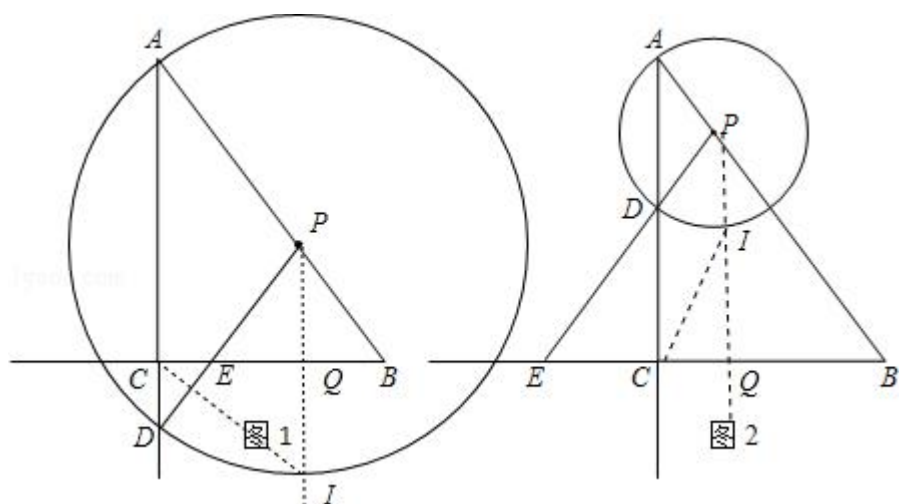
$$\because CI = AP,$$

$$\therefore \frac{18}{5}x^2 - \frac{72}{5}x+16 = x^2,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{20}{13} \text{ (舍去), } x_2 = 4,$$

$$\therefore AP \text{ 的长为 } 4,$$

综上所述, AP 的长为 $\frac{20}{13}$ 或 4 .



【点评】 本题考查了圆的综合题：熟练掌握两圆相切的性质和三角形相似的判定与性质；会运用勾股定理和相似比进行几何计算；能运用分类讨论的思想解决问题．