

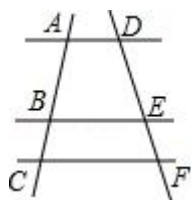
2014 年上海市普陀区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 用放大镜将图形放大，应该属于 ()
- A. 平移变换 B. 相似变换 C. 对称变换 D. 旋转变换
2. (4 分) 在比例尺是 1: 38 000 的南京交通浏览图上，玄武隧道长约 7cm，它的实际长度约为 ()
- A. 0.266km B. 2.66km C. 26.6km D. 266km
3. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\tan A = 1$ ， $\cot B = \sqrt{3}$ ，那么 $\triangle ABC$ 是 ()
- A. 钝角三角形 B. 直角三角形 C. 锐角三角形 D. 等腰三角形
4. (4 分) 二次函数 $y = ax^2 - 2x - 3$ ($a < 0$) 的图象一定不经过 ()
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限.
5. (4 分) 下列命题中，正确的是 ()
- A. 如果一条直线截三角形两边的延长线所得的对应线段成比例，那么这条直线一定平行于三角形的第三边
- B. 不同向量的单位向量的长度都相等，方向也都相同
- C. 一般来说，一条线段的黄金分割点有两个
- D. 相似三角形的中线的比等于相似比
6. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AC = a$ ， $\angle ACB = \theta$ ，那么下面各式正确的是 ()
- A. $AB = a \cdot \sin \theta$ B. $AB = a \cdot \cos \theta$ C. $AB = a \cdot \tan \theta$ D. $AB = a \cdot \cot \theta$.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 如图，直线 $AD \parallel BE \parallel CF$ ， $BC = \frac{1}{3}AC$ ， $DE = 4$ ，那么 EF 的值是_____.

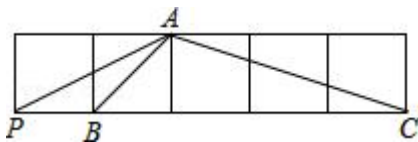


8. (4 分) 在一个陡坡上前进 5 米，水平高度升高了 3 米，则坡度 $i =$ _____.
9. (4 分) 抛物线 $y = x^2 - 1$ 关于 x 轴对称的抛物线的解析式是_____.
10. (4 分) 请写出一个以直线 $x = -2$ 为对称轴，且在对称轴左侧部分是上升的

抛物线的表达式，这条抛物线的表达式可以是_____.

11. (4分) 如果 E 、 F 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 的中点, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{FE}$ = _____.

12. (4分) 如图, 在边长为 1 的正方形网格中有点 P 、 A 、 B 、 C , 则图中所形成的三角形中, 相似的三角形是_____.



13. (4分) 已知 α 为一锐角, 且 $\cos \alpha = \sin 60^\circ$, 则 $\alpha =$ _____度.

14. (4分) 已知 α 为一锐角, 化简: $\sqrt{(\sin \alpha - 1)^2 + \sin \alpha} =$ _____.

15. (4分) 如果直角三角形的斜边长为 12, 那么它的重心与外心之间的距离为_____.

16. (4分) 已知二次函数的顶点坐标为 $(-2, 3)$, 并且经过平移后能与抛物线 $y = -2x^2$ 重合, 那么这个二次函数的解析式是_____.

17. (4分) 若一个三角形的三边长均满足方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$, 则此三角形的周长为_____.

18. (4分) 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 15$, $CD = 13$, $AD = 8$, $\angle B$ 是锐角, $\angle B$ 的正弦值为 $\frac{4}{5}$, 那么 BC 的长为_____.

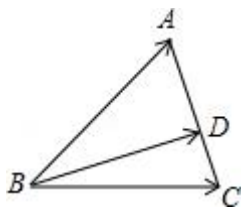
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 求值: $\frac{\sin 60^\circ + 3 \tan 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{(1 - 2 \cot 45^\circ) \cot 30^\circ}$

20. (10分) 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AC 边上的一点, 且 $AD:DC = 2:1$.

(1) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 先化简, 再求作: $(-2\vec{a} - \vec{b}) - (-3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b})$;

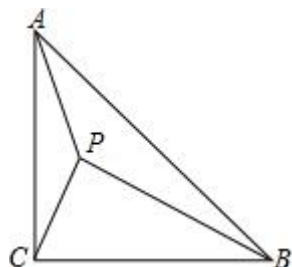
(2) 用 $x\vec{a} + y\vec{b}$ (x 、 y 为实数) 的形式表示 $\overrightarrow{BD}$.



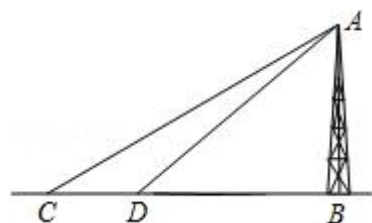
21. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, P 是 $\triangle ABC$ 形内一点, 且 $\angle APB = \angle APC = 135^\circ$.

(1) 求证: $\triangle CPA \sim \triangle APB$;

(2) 试求 $\tan \angle PCB$ 的值.



22. (10分) 如图, 浦西对岸的高楼 AB , 在 C 处测得楼顶 A 的仰角为 30° , 向高楼前进 100 米到达 D 处, 在 D 处测得 A 的仰角为 45° , 求高楼 AB 的高.

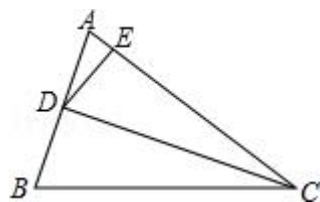


23. (12分) 如图, 已知 CD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB$ 的角平分线, E 是 AC 上的一点, 且 $CD^2 = BC \cdot CE$, $AD = 6$, $AE = 4$.

(1) 求证: $\triangle BCD \sim \triangle DCE$;

(2) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle ACD$;

(3) 求 CE 的长.

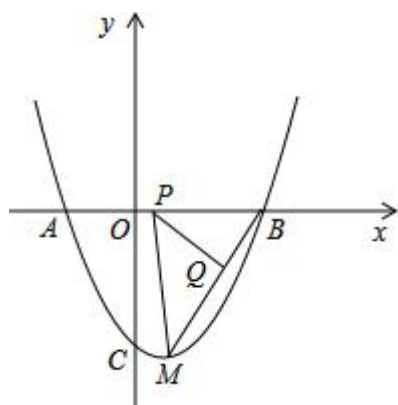


24. (12分) 如图, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax + b$ 经过点 $C(0, -\frac{3}{2})$, 且与 x 轴交于

点 A 、点 B , 若 $\tan \angle ACO = \frac{2}{3}$.

(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 若抛物线的顶点为 M , 点 P 是线段 OB 上一动点 (不与点 B 重合), $\angle MPQ = 45^\circ$, 射线 PQ 与线段 BM 交于点 Q , 当 $\triangle MPQ$ 为等腰三角形时, 求点 P 的坐标.

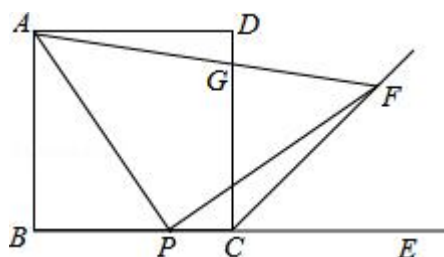


25. (14 分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, 点 P 是边 BC 上的任意一点, E 是 BC 延长线上一点, 联结 AP , 作 $PF \perp AP$ 交 $\angle DCE$ 的平分线 CF 上一点 F , 联结 AF 交边 CD 于点 G .

(1) 求证: $AP = PF$;

(2) 设点 P 到点 B 的距离为 x , 线段 DG 的长为 y , 试求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(3) 当点 P 是线段 BC 延长线上一动点, 那么 (2) 式中 y 与 x 的函数关系式保持不变吗? 如改变, 试直接写出函数关系式.



2014 年上海市普陀区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）用放大镜将图形放大，应该属于（ ）

- A. 平移变换 B. 相似变换 C. 对称变换 D. 旋转变换

【考点】RA：几何变换的类型．

【分析】根据放大镜成像的特点，结合各变换的特点即可得出答案．

【解答】解：根据相似图形的定义知，用放大镜将图形放大，属于图形的形状相同，大小不相同，所以属于相似变换．

故选：B．

【点评】本题考查的是相似形的识别，关键要联系图形，根据相似图形的定义得出．

2.（4 分）在比例尺是 1：38 000 的南京交通浏览图上，玄武隧道长约 7cm，它的实际长度约为（ ）

- A. 0.266km B. 2.66km C. 26.6km D. 266km

【考点】S2：比例线段．

【专题】12：应用题．

【分析】比例尺 = 图上距离：实际距离．按题目要求列出比例式计算即可．

【解答】解：根据：比例尺 = 图上距离：实际距离．

得它的实际长度约为 $7 \times 38000 = 266000$ （cm）= 2.66（km）．故选 B．

【点评】理解比例尺的概念，正确进行有关计算，注意单位的转换．

3.（4 分）在 $\triangle ABC$ 中， $\tan A = 1$ ， $\cot B = \sqrt{3}$ ，那么 $\triangle ABC$ 是（ ）

- A. 钝角三角形 B. 直角三角形 C. 锐角三角形 D. 等腰三角形

【考点】T5：特殊角的三角函数值．

【专题】2B：探究型．

【分析】先根据 $\triangle ABC$ 中， $\tan A = 1$ ， $\cot B = \sqrt{3}$ 求出 $\angle A$ 及 $\angle B$ 的度数，再由三角形内角和定理求出 $\angle C$ 的度数，进而可判断出三角形的形状．

【解答】解： $\because \triangle ABC$ 中， $\tan A = 1$ ， $\cot B = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore \angle A = 45^\circ, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形.

故选: A.

【点评】 本题考查的是特殊角的三角函数值及三角形内角和定理, 先特殊角的三角函数值求出 $\angle A$ 及 $\angle B$ 的度数是解答此题的关键.

4. (4 分) 二次函数 $y = ax^2 - 2x - 3$ ($a < 0$) 的图象一定不经过 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限.

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【分析】 先根据题意判断出二次函数的对称轴方程, 再令 $x = 0$ 求出 y 的值, 进而可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 二次函数 $y = ax^2 - 2x - 3$ ($a < 0$) 的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2a} = \frac{1}{a} < 0$,

$\therefore$ 其顶点坐标在第二或三象限,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = -3$,

$\therefore$ 抛物线一定经过第四象限,

$\therefore$ 此函数的图象一定不经过第一象限.

故选: A.

【点评】 本题考查的是二次函数的性质, 熟知二次函数的对称轴方程是解答此题的关键.

5. (4 分) 下列命题中, 正确的是 ()

A. 如果一条直线截三角形两边的延长线所得的对应线段成比例, 那么这条直线一定平行于三角形的第三边

B. 不同向量的单位向量的长度都相等, 方向也都相同

C. 一般来说, 一条线段的黄金分割点有两个

D. 相似三角形的中线的比等于相似比

【考点】 LM: *平面向量; O1: 命题与定理.

【专题】 16: 压轴题.

【分析】 定理: 如果一条直线截三角形的两边 (或两边的延长线) 所得的对应线

段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边；不同向量的单位向量的长度不一定相等，方向也不一定相同；一般来说，一条线段的黄金分割点有两个；相似三角形的对应中线的比等于相似比。

【解答】解：A、如果一条直线截三角形的两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边，故本选项错误。

B、不同向量的单位向量的长度不一定相等，方向也不一定相同，故本选项错误。

C、一般来说，一条线段的黄金分割点有两个，正确。

D、相似三角形的对应中线的比等于相似比，故本选项错误。

故选：C。

【点评】本题考查真假命题的概念关键是了解黄金分割点，相似比，向量等知识。

6.（4分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AC = a$ ， $\angle ACB = \theta$ ，那么下面各式正确的是（ ）

A. $AB = a \cdot \sin\theta$ B. $AB = a \cdot \cos\theta$ C. $AB = a \cdot \tan\theta$ D. $AB = a \cdot \cot\theta$ 。

【考点】T1：锐角三角函数的定义。

【分析】根据正弦、余弦、正切、余切定义可得 $\sin\theta = \frac{AB}{BC}$ ， $\cos\theta = \frac{AC}{BC}$ ， $\tan\theta = \frac{AB}{AC}$ ， $\cot\theta = \frac{a}{AB}$ ，再变形可得答案。

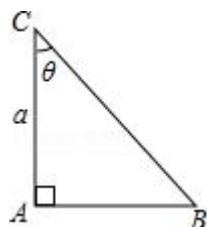
【解答】解：A、 $\sin\theta = \frac{AB}{BC}$ ，故此选项错误；

B、 $\cos\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{CB}$ ，则 $CB = a \cdot \cos\theta$ ，故此选项错误；

C、 $\tan\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{a}$ ，则 $AB = a \cdot \tan\theta$ ，故此选项正确；

D、 $\cot\theta = \frac{a}{AB}$ ，则 $AB = \frac{a}{\cot\theta}$ ，故此选项错误；

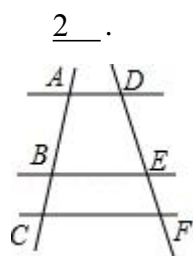
故选：C。



【点评】此题主要考查了锐角三角函数定义，关键是掌握正弦、余弦、正切、余切定义。

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）如图，直线 $AD \parallel BE \parallel CF$ ， $BC = \frac{1}{3}AC$ ， $DE = 4$ ，那么 EF 的值是



【考点】S4：平行线分线段成比例.

【分析】根据 $BC = \frac{1}{3}AC$ 可得 $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{1}$ ，再根据条件 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，可得 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ，

再把 $DE = 4$ 代入可得 EF 的值.

【解答】解：∵ $BC = \frac{1}{3}AC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{2}{1},$$

$$\because AD \parallel BE \parallel CF,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

$$\because DE = 4,$$

$$\therefore \frac{4}{EF} = 2,$$

$$\therefore EF = 2.$$

故答案为：2.

【点评】此题主要考查了平行线分线段成比例定理，关键是掌握三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.

8.（4 分）在一个陡坡上前进 5 米，水平高度升高了 3 米，则坡度 $i = \frac{3}{4}$.

【考点】T9：解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

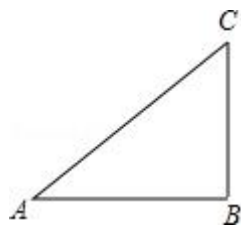
【分析】先求出水平方向上前进的距离，然后根据山坡的坡度 = 竖直方向上升的距离：水平方向前进的距离，即可解题.

【解答】解：如图所示： $AC = 5$ 米， $BC = 3$ 米，

$$\text{则 } AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ (米)},$$

$$\text{则坡度 } i = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}.$$

故答案为：3：4.



【点评】 本题考查了坡度的概念，坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比，又叫做坡比.

9. (4 分) 抛物线 $y = x^2 - 1$ 关于 x 轴对称的抛物线的解析式是 $y = -x^2 + 1$.

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】 根据关于 x 轴对称的两点 x 坐标相同, y 坐标互为相反数即可得出

【解答】 解: 根据题意, $-y = x^2 - 1$, 化简得: $y = -x^2 + 1$,

故抛物线 $y = x^2 - 1$ 关于 x 轴对称的抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 1$.

故答案为: $y = -x^2 + 1$.

故答案为: $y = -x^2 + 1$.

【点评】 本题考查的是二次函数的图象与几何变换, 熟知图形平移不变性的性质是解答此题的关键.

10. (4 分) 请写出一个以直线 $x = -2$ 为对称轴, 且在对称轴左侧部分是上升的抛物线的表达式, 这条抛物线的表达式可以是 $y = -(x+2)^2$ 等.

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【专题】 26: 开放型.

【分析】 在对称轴左侧部分是上升的抛物线必然开口向下, 即 $a < 0$, 直线 $x = -2$ 为对称轴可直接利用配方法的形式写出一个二次函数的解析式.

【解答】 解: 根据题意得: $y = -(x+2)^2$. (答案不唯一).

【点评】 配方法: 将解析式化为顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$, 顶点坐标是 (h, k) , 对称轴是 $x = h$. 二次函数当 $a > 0$, 函数开口向上, 当 $a < 0$, 函数开口向下.

11. (4 分) 如果 E 、 F 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 的中点, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{FE}$
$$= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

【考点】 KX: 三角形中位线定理; LM: *平面向量.

【专题】 17: 推理填空题.

【分析】先根据向量的三角形法则得出 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ ，故 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ，即 $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$ ，再由三角形中位线定理可知， $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$ ，进而可求出答案．

【解答】解：∵ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \text{ 即 } \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b},$$

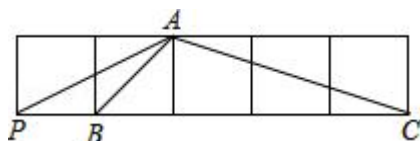
$$\therefore \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB},$$

$$\therefore \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b}.$$

故答案为： $\frac{1}{2} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b}$ ．

【点评】本题考查的是向量的三角形法则，即首尾相连的两个向量的和是以第一个向量的起点指向第二个向量的终点．规定：零向量与向量 $\overrightarrow{AB}$ 的和等于 $\overrightarrow{AB}$ ．

12. (4分) 如图，在边长为1的正方形网格中有点P、A、B、C，则图中所形成的三角形中，相似的三角形是 $\triangle APB \sim \triangle CPA$ ．



【考点】S8：相似三角形的判定．

【专题】24：网格型．

【分析】 $\triangle APB \sim \triangle CPA$ ，可利用正方形的边把对应的线段表示出来，利用三边对应成比例两个三角形相似，分别计算各边的长度即可解题．

【解答】解： $\triangle APB \sim \triangle CPA$ ，

理由如下：

由题意可知： $AP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ， $PB = 1$ ， $PC = 5$ ，

$$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{PB}{AP} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \angle APB = \angle CPA,$$

$$\therefore \triangle APB \sim \triangle CPA,$$

故答案为： $\triangle APB \sim \triangle CPA$ ．

【点评】本题考查了勾股定理在直角三角形中的运用，三角形对应边比值相等判

定三角形相似的方法，本题中根据勾股定理计算三角形的三边长是解题的关键.

13. (4分) 已知 α 为一锐角，且 $\cos\alpha = \sin 60^\circ$ ，则 $\alpha =$ 30 度.

【考点】T4: 互余两角三角函数的关系.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据 $\angle A$ ， $\angle B$ 均为锐角，若 $\sin A = \cos B$ ，那么 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ 即可得到结论.

【解答】解： $\because \sin 60^\circ = \cos (90^\circ - 60^\circ)$,

$\therefore \cos\alpha = \cos (90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$,

即锐角 $\alpha = 30^\circ$.

故答案为：30.

【点评】本题考查了互余两角的三角函数关系，牢记互余两角的三角函数关系是解答此类题目的关键.

14. (4分) 已知 α 为一锐角，化简： $\sqrt{(\sin\alpha - 1)^2} + \sin\alpha =$ 1.

【考点】73: 二次根式的性质与化简；T1: 锐角三角函数的定义.

【专题】11: 计算题.

【分析】先根据 α 是锐角得出 $\sin\alpha < 1$ ，再根据二次根式的性质解答即可.

【解答】解： $\because \alpha$ 是锐角，

$\therefore \sin\alpha < 1$,

$\therefore$ 原式 $= 1 - \sin\alpha + \sin\alpha = 1$.

故答案为：1.

【点评】本题考查的是二次根式的性质与化简，熟知二次根式具有非负性是解答此题的关键.

15. (4分) 如果直角三角形的斜边长为 12，那么它的重心与外心之间的距离为 2.

【考点】K5: 三角形的重心；MA: 三角形的外接圆与外心.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据重心是三角形三边中线的交点，直角三角形的外心是斜边的中点，以及重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1. 即可得出答案.

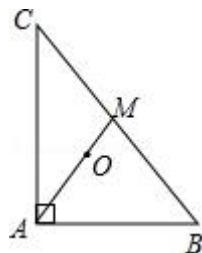
【解答】解：∵直角三角形斜边长为 12，

∴斜边上的中线 AM 长为 6，

∵重心 O 到顶点 A 的距离与重心 O 到外心 M 的距离之比为 2：1，

∴三角形的重心与外心之间的距离 OM 为 2，

故答案为：2.



【点评】此题主要考查了三角形的重心的性质以及直角三角形斜边上中线的性质，利用重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2：1 是解决问题的关键.

16. (4 分) 已知二次函数的顶点坐标为 $(-2, 3)$ ，并且经过平移后能与抛物线 $y = -2x^2$ 重合，那么这个二次函数的解析式是 $y = -2(x+2)^2 + 3$.

【考点】H6：二次函数图象与几何变换.

【分析】先设原抛物线的解析式为 $y = a(x-h)^2 + k$ ，再根据经过平移后能与抛物线 $y = -2x^2$ 重合可知 $a = -2$ ，再由二次函数的顶点坐标为 $(-2, 3)$ 即可得出结论.

【解答】解：先设原抛物线的解析式为 $y = a(x+h)^2 + k$ ，

∵经过平移后能与抛物线 $y = -2x^2$ 重合，

∴ $a = -2$ ，

∵二次函数的顶点坐标为 $(-2, 3)$ ，

∴这个二次函数的解析式是 $y = -2(x+2)^2 + 3$.

故答案为： $y = -2(x+2)^2 + 3$.

【点评】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知图形平移不变性的性质是解答此题的关键.

17. (4 分) 若一个三角形的三边长均满足方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ ，则此三角形的周长为 6, 10, 12.

【考点】A8：解一元二次方程 - 因式分解法；K6：三角形三边关系.

【专题】11：计算题；16：压轴题.

【分析】求 $\triangle ABC$ 的周长，即是确定等腰三角形的腰与底的长求周长. 首先求出方程的根，根据三角形三边关系定理列出不等式，然后解不等式即可.

【解答】解：解方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 得 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 2$ ；

当4为腰，2为底时， $4 - 2 < 4 < 4 + 2$ ，能构成等腰三角形，周长为 $4 + 2 + 4 = 10$ ；

当2为腰，4为底时 $4 - 2 = 2 < 4 + 2$ 不能构成三角形，

当等腰三角形的三边分别都为4，或者都为2时，构成等边三角形，周长分别为6，12，故 $\triangle ABC$ 的周长是6或10或12.

【点评】本题从边的方面考查三角形，涉及分类讨论的思想方法. 求三角形的周长，不能盲目地将三边长相加起来，而应养成检验三边长能否组成三角形的好习惯，把不符合题意的舍去.

18. (4分) 已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = 15$ ， $CD = 13$ ， $AD = 8$ ， $\angle B$ 是锐角， $\angle B$ 的正弦值为 $\frac{4}{5}$ ，那么 BC 的长为 22 或 12 .

【考点】LH：梯形；T7：解直角三角形.

【分析】首先根据题意画出图形，然后过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ，过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ，易得四边形 $AEFD$ 是矩形，然后由 $AB = 15$ ， $\angle B$ 的正弦值为 $\frac{4}{5}$ ，求得 AE 与 BE 的长，再由勾股定理求得 CF 的长，继而可求得答案.

【解答】解：如图①，过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ，过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ，

$\because$ 梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形，

$\therefore EF = AD = 8$ ， $AE = DF$ ，

$\because AB = 15$ ， $\angle B$ 的正弦值为 $\frac{4}{5}$ ，

$\therefore AE = AB \cdot \sin \angle B = 15 \times \frac{4}{5} = 12$ ，

$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 9$ ，

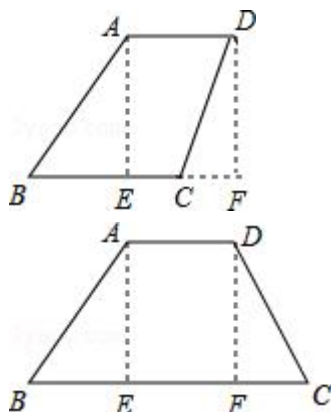
$\therefore DF = AE = 12$ ，

$\therefore CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ ，

$\therefore BC = BE + EF + CF = 9 + 8 + 5 = 22$.

如图②, $BC = BE + EF - CF = 9 + 8 - 5 = 12$.

故答案为: 22 或 12.



【点评】 此题考查了梯形的性质以及解直角三角形的知识. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 求值: $\frac{\sin 60^\circ + 3 \tan 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{(1 - 2 \cot 45^\circ) \cot 30^\circ}$

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 将特殊角的三角函数值代入计算即可.

【解答】 解: 原式 $= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}}{(1 - 2 \times 1) \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -1$

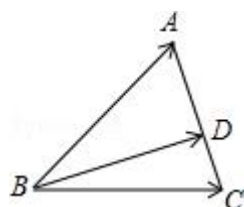
【点评】 本题考查了特殊角的三角函数, 是基础知识比较简单.

20. (10 分) 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AC 边上的一点, 且 $AD:DC = 2:$

1.

(1) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 先化简, 再求作: $(-2\vec{a} - \vec{b}) - (-3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b})$;

(2) 用 $x\vec{a} + y\vec{b}$ (x, y 为实数) 的形式表示 $\overrightarrow{BD}$.



【考点】 LM: *平面向量.

【分析】 (1) 首先化简: $(-2\vec{a} - \vec{b}) - (-3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b})$, 可得原式 $= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, 然后

根据三角形法则求解，即可作出： $(-2\vec{a} - \vec{b}) - (-3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b})$;

(2) 首先根据三角形法则求得 $\vec{AC}$ ，然后由 $AD:DC=2:1$ ，求得 $\vec{AD}$ ，继而求得答案.

【解答】解：(1) $(-2\vec{a} - \vec{b}) - (-3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}) = -2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$;

如图①，作 BC 的垂直平分线，交 BC 于点 E ，则 $\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}$ ，

如图②， $\vec{MN} = \vec{BA} = \vec{a}$ ， $\vec{NH} = \vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ，

则 $\vec{MH}$ 即为所求；

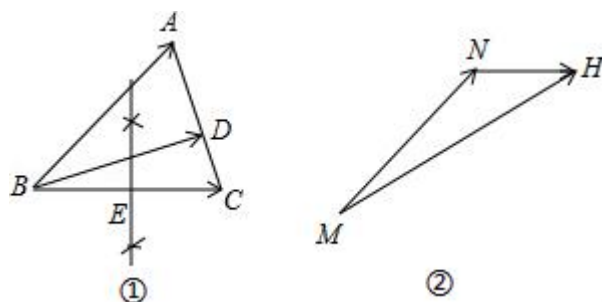
(2) $\because \vec{BA} = \vec{a}$ ， $\vec{BC} = \vec{b}$ ，

$\therefore \vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA} = \vec{b} - \vec{a}$ ，

$\because AD:DC=2:1$ ，

$\therefore \vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$ ，

$\therefore \vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{a} + (\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ 。

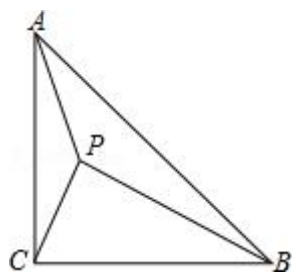


【点评】此题考查了平面向量的知识．此题难度适中，注意掌握三角形法则的应用，注意掌握数形结合思想的应用．

21. (10分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， P 是 $\triangle ABC$ 形内一点，且 $\angle APB = \angle APC = 135^\circ$ 。

(1) 求证： $\triangle CPA \sim \triangle APB$ ；

(2) 试求 $\tan \angle PCB$ 的值。



【考点】 KW：等腰直角三角形；S9：相似三角形的判定与性质；T1：锐角三角函数的定义.

【分析】 (1) 结合题意，易得 $\angle BAC = 45^\circ$ ，从而可得出 $\angle PAC + \angle PAB = 45^\circ$ ，又在 $\triangle APB$ 中， $\angle APB = 135^\circ$ ，以及 $\angle APB = \angle APC$ ，即可得出 $\triangle CPA \sim \triangle APB$ ；

(2) 由于 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，即可得出 CA 和 AB 之间的关系，利用 (1) 的条件， $\frac{CP}{PA} = \frac{PA}{PB} = \frac{CA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，在 $\triangle BCP$ 中， $\angle BPC = 90^\circ$ ，易得出 $\tan \angle PCB$ 的值.

【解答】 解：(1) $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，
 $\therefore \angle BAC = 45^\circ$ ，即 $\angle PAC + \angle PAB = 45^\circ$ ，
 又在 $\triangle APB$ 中， $\angle APB = 135^\circ$ ，
 $\therefore \angle PBA + \angle PAB = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle PAC = \angle PBA$ ，
 又 $\angle APB = \angle APC$ ，
 $\therefore \triangle CPA \sim \triangle APB$.

(2) $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \frac{CA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

又 $\because \triangle CPA \sim \triangle APB$ ，

$$\therefore \frac{CP}{PA} = \frac{PA}{PB} = \frac{CA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

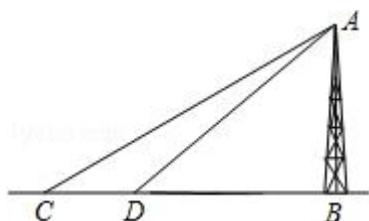
令 $CP = k$ ，则 $PA = \sqrt{2}k$ ， $PB = 2k$ ，

又在 $\triangle BCP$ 中， $\angle BPC = 360^\circ - \angle APC - \angle APB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle PCB = \frac{PB}{PC} = 2.$$

【点评】 本题主要考查相似三角形的判定与性质的知识点，熟练三角形内角和定理，等腰三角形的判定与性质，三角形外角的性质，勾股定理等知识点，综合性较强，有一定难度.

22. (10 分) 如图，浦西对岸的高楼 AB ，在 C 处测得楼顶 A 的仰角为 30° ，向高楼前进 100 米到达 D 处，在 D 处测得 A 的仰角为 45° ，求高楼 AB 的高.



【考点】 TA：解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【分析】 首先 $AB = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中， $\angle ADB = 45^\circ$ ，可得 $BD = AB = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 30^\circ$ ，可得 $BC = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x$ ，继而可得方程： $\sqrt{3}x - x = 100$ ，解此方程即可求得答案.

【解答】 解：由题意可知： $AB \perp CD$ ，

设 $AB = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中， $\angle ADB = 45^\circ$ ，

$$\therefore BD = AB = x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 30^\circ$ ，

$$\therefore BC = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x.$$

$$\because CD = CB - BD,$$

$$\therefore \sqrt{3}x - x = 100,$$

解得： $x = 50\sqrt{3} + 50$ (m).

答：高楼 AB 的高为 $(50\sqrt{3} + 50)$ m.

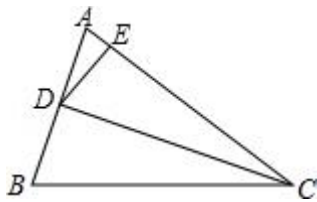
【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，还考查了三角函数的定义，一个角的正切值等于对边比邻边.

23. (12 分) 如图，已知 CD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB$ 的角平分线， E 是 AC 上的一点，且 $CD^2 = BC \cdot CE$ ， $AD = 6$ ， $AE = 4$.

(1) 求证： $\triangle BCD \sim \triangle DCE$;

(2) 求证： $\triangle ADE \sim \triangle ACD$;

(3) 求 CE 的长.



【考点】S9：相似三角形的判定与性质．

【分析】（1）根据两边对应成比例，且夹角相等的两个三角形相似，可得答案；

（2）根据两个角对应相等的两个三角形相似，可得答案；

（3）根据两个三角形相似，对应边成比例，可得答案．

【解答】（1）证明：CD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB$ 的角平分线，

$$\therefore \angle BCD = \angle DCE.$$

$$\because CD^2 = BC \cdot CE,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{CE}{CD},$$

$\therefore \triangle BCD \sim \triangle DCE$ （两边对应成比例，且夹角相等的两个三角形相似）；

（2）证明： $\because \triangle BCD \sim \triangle DCE$ ，

$\therefore \angle EDC = \angle DBC$ （相似三角形的对应角相等）．

$\because \angle ADC = \angle DBC + \angle DCB$ （三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和），

$$\angle ADC = \angle ADE + \angle EDC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ACD.$$

$$\angle A = \angle A,$$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD$ （两个角对应相等的两个三角形相似）；

（3）解： $\because \triangle ADE \sim \triangle ACD$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD},$$

$$\frac{6}{AC} = \frac{4}{6}$$

$$AC = 9,$$

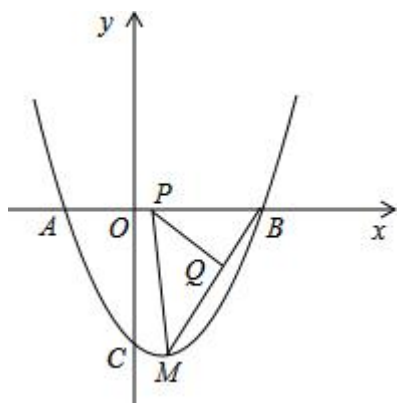
$$CE = AC - AE = 9 - 4 = 5.$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似，两角对应相等的两个三角形相似．

24. (12分) 如图, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax + b$ 经过点 $C(0, -\frac{3}{2})$, 且与 x 轴交于点 A 、点 B , 若 $\tan \angle ACO = \frac{2}{3}$.

(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 若抛物线的顶点为 M , 点 P 是线段 OB 上一动点 (不与点 B 重合), $\angle MPQ = 45^\circ$, 射线 PQ 与线段 BM 交于点 Q , 当 $\triangle MPQ$ 为等腰三角形时, 求点 P 的坐标.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 根据抛物线 $y = ax^2 - 2ax + b$ 经过点 $C(0, -\frac{3}{2})$, 求出 $b = -\frac{3}{2}$, 再根据 $\tan \angle ACO = \frac{2}{3}$, 求出点 A 的坐标, 再代入 $y = ax^2 - 2ax - \frac{3}{2}$ 即可得出此抛物线的解析式; (2) ①过点 M 作 $MP \perp AB$, 垂足为点 P , 过点 P 作 $PQ \perp MB$, 垂足为点 Q , 先求出 $PB = PM = 2$, 再根据 $\angle PMQ = 45^\circ$, 得出 $\angle MPQ = 45^\circ$, 再求出点 P 的坐标即可;

②当 $\angle MPQ = 45^\circ$, $PM = PQ$ 时, 设点 P 的坐标为 $(m, 0)$, 则 $BP = 3 - m$, 根据 $\triangle MPQ \sim \triangle MBP$, 得出 $MB = BP$, $2\sqrt{2} = 3 - m$, 求出 m 的值即可得出点 P 的坐标, 再根据点 P 是线段 OB 上一动点, 得出不合题意, 舍去;

③当 $\angle MPQ = 45^\circ$, $PM = QM$ 时, 点 P 与点 A 重合, 得出不合题意, 舍去.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 - 2ax + b$ 经过点 $C(0, -\frac{3}{2})$,

$$\therefore b = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore OC = \frac{3}{2},$$

$$\because \tan \angle ACO = \frac{2}{3},$$

$$\therefore OA = 1,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标是: } (-1, 0),$$

$$\text{把 } (-1, 0) \text{ 代入 } y = ax^2 - 2ax - \frac{3}{2} \text{ 得; } a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{此抛物线的解析式为: } y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2},$$

(2) ①过点 M 作 $MP \perp AB$, 垂足为点 P , 过点 P 作 $PQ \perp MB$, 垂足为点 Q ,

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为: } (1, -2),$$

$$\text{点 } B \text{ 的坐标为: } (3, 0),$$

$$\therefore PB = PM = 2,$$

$$\therefore \angle PMQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MPQ = 45^\circ,$$

$$\therefore PQ = MQ,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (1, 0);$$

②当 $\angle MPQ = 45^\circ$, $PM = PQ$ 时, 设点 P 的坐标为 $(m, 0)$, 则 $BP = 3 - m$,

$$\therefore \angle M = \angle M, \angle MPQ = \angle MBP,$$

$$\therefore \triangle MPQ \sim \triangle MBP,$$

$$\therefore \frac{MP}{MB} = \frac{PQ}{BP},$$

$$\therefore PM = PQ,$$

$$\therefore MB = BP,$$

$$\therefore MB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore 2\sqrt{2} = 3 - m,$$

$$\therefore m = 3 - 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (3 - 2\sqrt{2}, 0);$$

③当 $\angle MPQ = 45^\circ$, $PM = QM$ 时, 点 P 与点 A 重合,

(当 $PM = QM$ 时, $\angle MPQ = \angle MQP = 45^\circ$, 所以 $\angle M = 90^\circ$, 又因为 $\angle B = 45^\circ$,

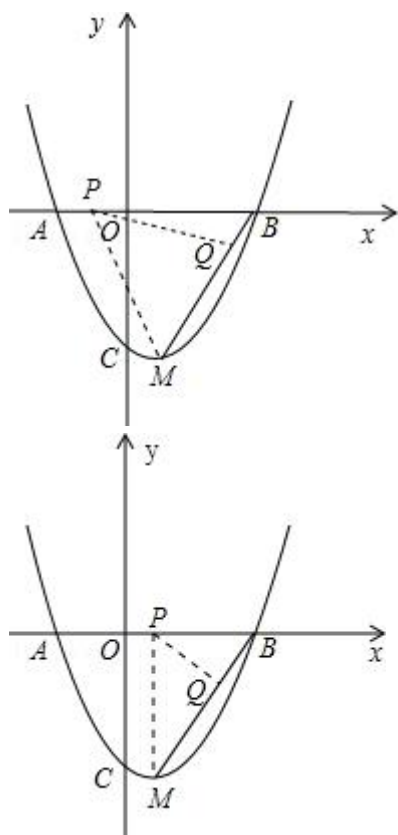
所以 $\triangle MBP$ 是等腰直角三角形, 所以, 点 M 在线段 BP 的垂直平分线上.

又点 M 是抛物线的顶点, 所以, 点 M 在 BA 的垂直平分线上, 所以, 点 P 与点 A 重合)

$\therefore$ 点 P 是线段 OB 上一动点,

∴不合题意，舍去.

综上所述：点 $P(1, 0), (3 - 2\sqrt{2}, 0)$.



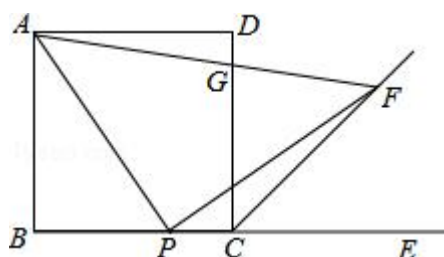
【点评】 此题考查了二次函数的综合，用到的知识点是二次函数的图象与性质，关键是根据题意画出所有图形，注意把不合题意的结果舍去.

25. (14分) 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ，点 P 是边 BC 上的任意一点， E 是 BC 延长线上一点，联结 AP ，作 $PF \perp AP$ 交 $\angle DCE$ 的平分线 CF 上一点 F ，联结 AF 交边 CD 于点 G .

(1) 求证： $AP = PF$;

(2) 设点 P 到点 B 的距离为 x ，线段 DG 的长为 y ，试求 y 关于 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围;

(3) 当点 P 是线段 BC 延长线上一动点，那么 (2) 式中 y 与 x 的函数关系式保持不变吗？如改变，试直接写出函数关系式.



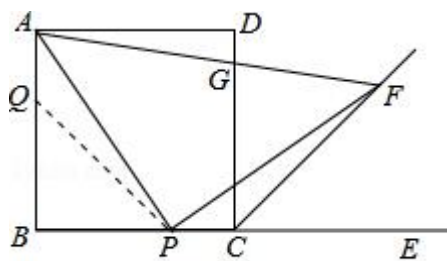
【考点】SO：相似形综合题．

【分析】（1）利用全等三角形证明．如答图 1，在线段 AB 上截取 $AQ = PC$ ，构造 $\triangle APQ \cong \triangle PFC$ ；

（2）利用相似三角形求解．如答图 2，过点 F 作 $FN \perp CE$ 于点 N ，易证 $\triangle ABP \cong \triangle PNF$ ，则有 $FN = BP = x$ ；过点 F 作 $FM \perp CD$ 于点 M ，则 $MCNF$ 为正方形，从而得到： $MF = x$ ， $MG = 2 - x - y$ ；最后利用相似三角形 $\triangle ADG \sim \triangle FMG$ ，列出比例关系式，求出表达式；

（3）与（2）相同方法求解，如答图 3 所示，结论不变．

【解答】（1）证明：如答图 1，在线段 AB 上截取 $AQ = PC$ ，则有 $BP = BQ$ ， $\therefore \triangle BPQ$ 为等腰直角三角形， $\therefore \angle AQP = 135^\circ$ ．



答图1

$\because PF \perp AP$,

$\therefore \angle FPC + \angle APB = 90^\circ$,

又 $\angle PAQ + \angle APB = 90^\circ$,

$\therefore \angle PAQ = \angle FPC$.

在 $\triangle APQ$ 与 $\triangle PFC$ 中,

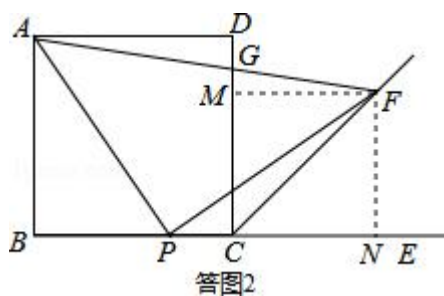
$$\begin{cases} \angle AQP = \angle PCF = 135^\circ \\ AQ = PC \\ \angle PAQ = \angle FPC \end{cases},$$

$\therefore \triangle APQ \cong \triangle PFC$ (ASA)

$\therefore AP = PF$.

（2）解：如答图 2，过点 F 作 $FN \perp CE$ 于点 N ，则易证 $\triangle ABP \cong \triangle PNF$ ，

$\therefore FN = BP = x$.



过点 F 作 $FM \perp CD$ 于点 M ，由 CF 为角平分线，可知 $MCNF$ 为正方形，

$$\therefore MC = MF = FN = BP = x,$$

$$\therefore MG = MD - DG = CD - MC - DG = 2 - x - y.$$

$$\because MF \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle FMG,$$

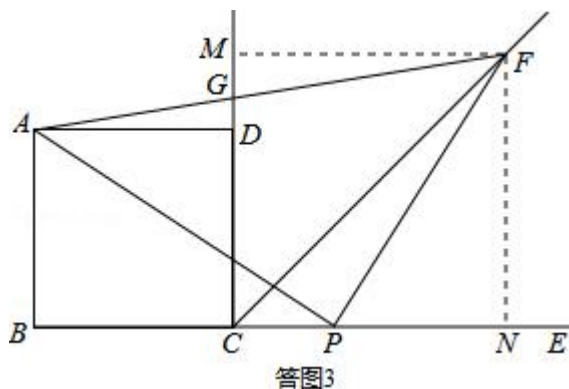
$$\therefore \frac{AD}{MF} = \frac{DG}{MG}, \text{ 即 } \frac{2}{x} = \frac{y}{2-x-y},$$

$$\text{解得: } y = \frac{4-2x}{x+2} \quad (0 \leq x \leq 2).$$

(3) 解：解析式变化．理由如下：

如答图 3，过点 F 作 $FN \perp CE$ 于点 N ，则易证 $\triangle ABP \cong \triangle PNF$ ，

$$\therefore FN = BP = x.$$



过点 F 作 $FM \perp CD$ 于点 M ，由 CF 为角平分线，可知 $MCNF$ 为正方形，

$$\therefore MC = MF = FN = BP = x,$$

$$\therefore MG = MC - DG - CD = x - y - 2.$$

$$\because MF \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle FMG,$$

$$\therefore \frac{AD}{MF} = \frac{DG}{MG}, \text{ 即 } \frac{2}{x} = \frac{y}{x-y-2},$$

解得： $y = \frac{2x-4}{x+2}$.

【点评】本题是几何综合题，考查了相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、正方形、角平分线性质的知识点，题目难度不大，重点是对几何基础知识的考查.