

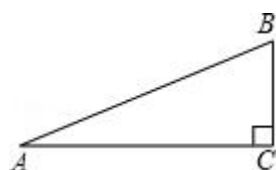
2014 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 在比例尺为 1: 2000 的地图上测得 A 、 B 两地间的图上距离为 5cm, 则 A 、 B 两地间的实际距离为 ()

- A. 10m B. 25m C. 100m D. 10000m

2. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 13$, $BC = 5$, 则 $\sin A$ 的值是 ()

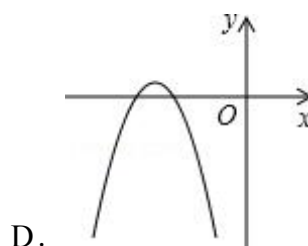
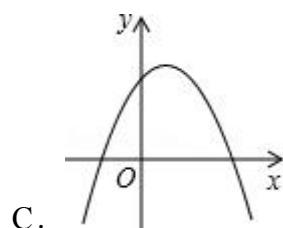
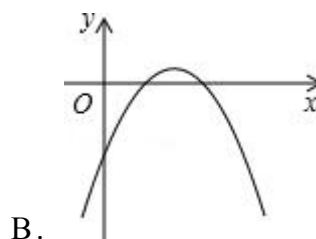
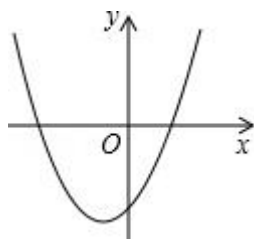


- A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{13}{5}$

3. (4 分) 抛物线 $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$ 的顶点坐标是 ()

- A. (2, 3) B. (2, -3) C. (-2, 3) D. (-2, -3)

4. (4 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + 3x + (a - 2)$, a 是常数且 $a < 0$, 下列选项中可能是它大致图象的是 ()



5. (4 分) 下列命题中是假命题的是 ()

- A. 若 $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{b} = \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{c}$ B. $2(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} - 2\vec{b}$
C. 若 $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ D. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 则 $\vec{a} = \vec{b}$

6. (4 分) 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似, 且 $\triangle ABC$ 的三边长为 3、4、5, 如果 $\triangle DEF$ 的周长为 6, 那么下列不可能是 $\triangle DEF$ 一边长的是 ()

A. 1.5

B. 2

C. 2.5

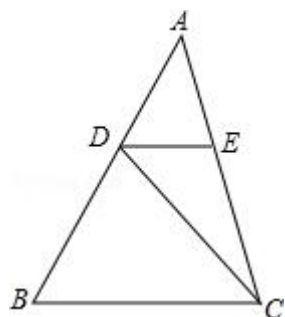
D. 3

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

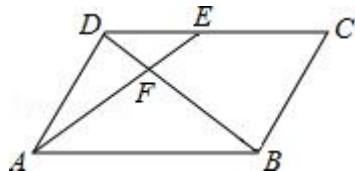
7. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ，则 $\frac{2a}{a+b}$ 的值为_____.

8. (4 分) 计算： $2(\vec{m} + \vec{n}) + 3(\vec{m} - \vec{n}) =$ _____.

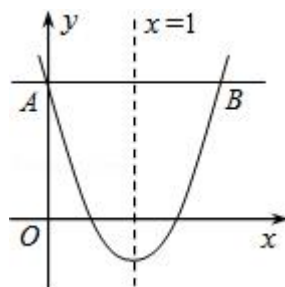
9. (4 分) 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， CD 平分 $\angle ACB$ ， $DE \parallel BC$ ，若 $AC = 10$ ， $AE = 4$ ，则 $BC =$ _____.



10. (4 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 CD 上一点，联结 AE 、 BD ，且 AE 、 BD 交于点 F ，若 $DE:EC = 2:3$ ，则 $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABF} =$ _____.

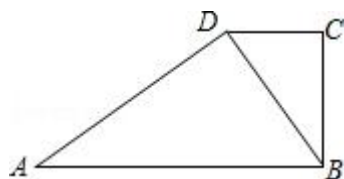


11. (4 分) 如图，已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = 1$ ，点 A 、 B 均在抛物线上，且 AB 与 x 轴平行，若点 A 的坐标为 $(0, \frac{3}{2})$ ，则点 B 的坐标为_____.



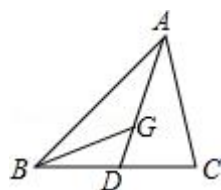
12. (4 分) 如果抛物线 $y = (x+3)^2 + 1$ 经过点 $A(1, y_1)$ 和点 $B(3, y_2)$ ，那么 y_1 与 y_2 的大小关系是 y_1 _____ y_2 (填写 “>” 或 “<” 或 “=”).

13. (4 分) 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp BC$ ，且 $AD \perp BD$ ，若 $CD = 1$ ， $BC = 3$ ，那么 $\angle A$ 的正切值为_____.



14. (4分) 在高位 100 米的楼顶测得地面上某十字路口的俯角为 β ，那么楼底到这个十字路口的水平距离是_____米 (用含 β 的代数式表示)。

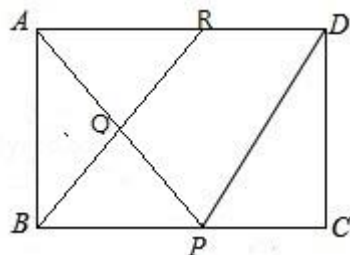
15. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是中线， G 是重心， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BG}$ = _____。(用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



16. (4分) $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ，那么 $\sin B =$ _____。

17. (4分) 将二次函数 $y = 3x^2$ 的图象向左平移 2 个单位再向下平移 4 个单位，所得函数表达式是 $y = 3(x+2)^2 - 4$ ，我们来解释一下其中的原因：不妨设平移前图象上任意一点 P 经过平移后得到点 P' ，且点 P' 的坐标为 (x, y) ，那么 P' 点反之向右平移 2 个单位，再向上平移 4 个单位得到点 $P(x+2, y+4)$ ，由于点 P 是二次函数 $y = 3x^2$ 的图象上的点，于是把点 $P(x+2, y+4)$ 的坐标代入 $y = 3x^2$ 再进行整理就得到 $y = 3(x+2)^2 - 4$ 。类似的，我们对函数 $y = \frac{1}{x(x+1)}$ 的图象进行平移：先向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位，所得图象的函数表达式为_____。

18. (4分) 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， $BC = 9$ ，点 P 在 BC 边上， $CP = 3$ ，点 Q 为线段 AP 上的动点，射线 BQ 与矩形 $ABCD$ 的一边交于点 R ，且 $AP = BR$ ，则 $\frac{QR}{BQ} =$ _____。



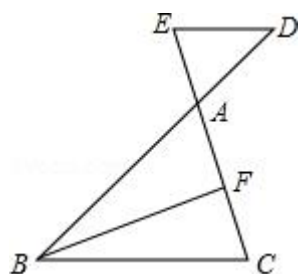
三、解答题：

19. (10分) 计算: $\frac{2\sin^2 30^\circ + \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ + \sin^2 60^\circ}{\cos^2 45^\circ + \cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ}$.

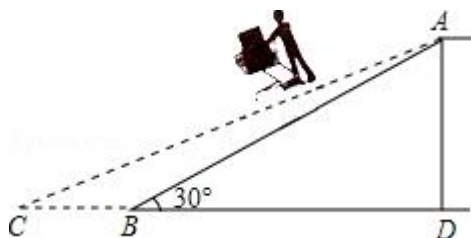
20. (10分) 如图, 点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BA 、 CA 的延长线上, 且 $DE \parallel BC$, $AE = \frac{1}{2}AC$, F 为 AC 的中点.

(1) 设 $\overrightarrow{BF} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 试用 $x\vec{a} + y\vec{b}$ 的形式表示 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{ED}$; (x 、 y 为实数)

(2) 作出 $\overrightarrow{BF}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 上的分向量. (保留作图痕迹, 不写作法, 写出结论)



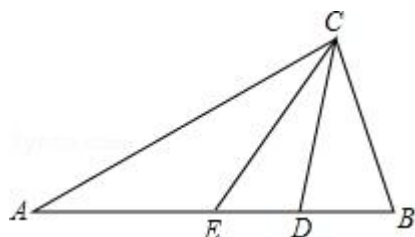
21. (10分) 某商场为了方便顾客使用购物车, 将滚动电梯由坡角 30° 的坡面改为坡度为 1:2.4 的坡面. 如图, BD 表示水平面, AD 表示电梯的铅直高度, 如果改动后电梯的坡面 AC 长为 13 米, 求改动后电梯水平宽度增加部分 BC 的长 (结果保留根号).



22. (10分) 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 是边 AB 上的点, CD 平分 $\angle ECB$, 且 $BC^2 = BD \cdot BA$.

(1) 求证: $\triangle CED \sim \triangle ACD$;

(2) 求证: $\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{ED}$.

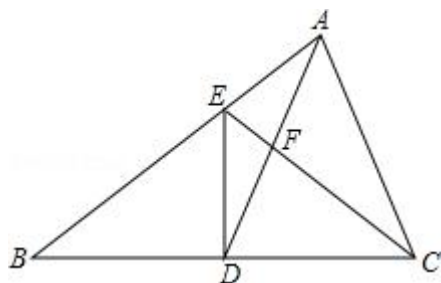


23. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, 且 $AD = AC$, $DE \perp BC$, 与 AB 相交

于点 E , EC 与 AD 相交于点 F .

(1) 求证: $\triangle ABC \sim \triangle FCD$;

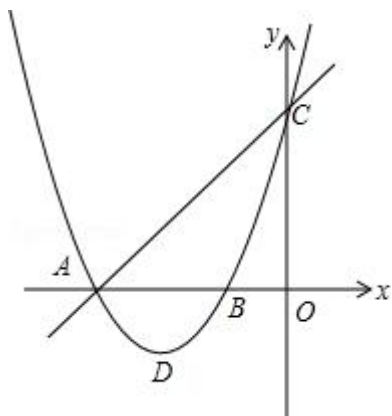
(2) 若 $DE = 3$, $BC = 8$, 求 $\triangle FCD$ 的面积.



24. (12 分) 如图, 直线 $y = x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 C , 经过 A 、 C 两点的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的负半轴上另一交点为 B , 且 $\tan \angle CBO = 3$.

(1) 求该抛物线的解析式及抛物线的顶点 D 的坐标;

(2) 若点 P 是射线 BD 上一点, 且以点 P 、 A 、 B 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 求点 P 的坐标.

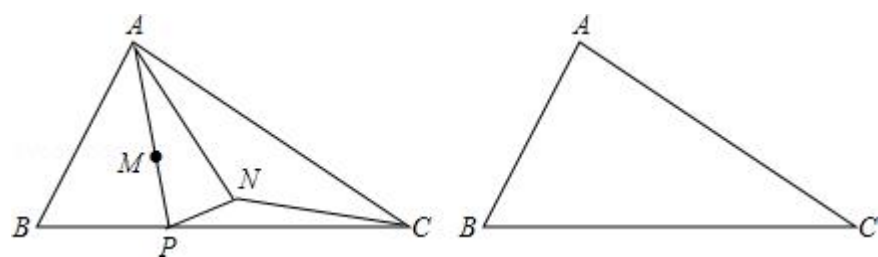


25. (14 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $BC = 11$, $\cos B = \frac{3}{5}$, 点 P 是 BC 边上的一个动点, 联结 AP , 取 AP 的中点 M , 将线段 MP 绕点 P 顺时针旋转 90° 得到线段 PN , 联结 AN , NC .

(1) 当点 N 恰好落在 BC 边上时, 求 NC 的长;

(2) 若点 N 在 $\triangle ABC$ 内部 (不含边界), 设 $BP = x$, $CN = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并求出函数的定义域;

(3) 若 $\triangle PNC$ 是等腰三角形, 求 BP 的长.



2014 年上海市徐汇区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. (4 分) 在比例尺为 1: 2000 的地图上测得 A 、 B 两地间的图上距离为 5cm，则 A 、 B 两地间的实际距离为 ()

- A. 10m B. 25m C. 100m D. 10000m

【考点】S2：比例线段.

【专题】11：计算题.

【分析】设 A 、 B 两地间的实际距离为 xm ，根据比例线段得 $\frac{1}{2000} = \frac{5}{x \cdot 100}$ ，然后解方程即可.

【解答】解：设 A 、 B 两地间的实际距离为 xm ，

根据题意得 $\frac{1}{2000} = \frac{5}{x \cdot 100}$ ，

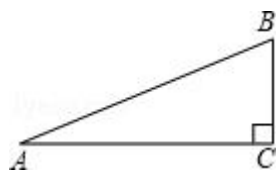
解得 $x = 100$.

所以 A 、 B 两地间的实际距离为 100m.

故选：C.

【点评】本题考查了比例线段：对于四条线段 a 、 b 、 c 、 d ，如果其中两条线段的比（即它们的长度比）与另两条线段的比相等，如 $a:b=c:d$ （即 $ad=bc$ ），我们就说这四条线段是成比例线段，简称比例线段.

2. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 13$ ， $BC = 5$ ，则 $\sin A$ 的值是 ()



- A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{13}{5}$

【考点】KQ：勾股定理；T1：锐角三角函数的定义.

【分析】本题可以利用锐角三角函数的定义求解， $\sin A$ 为 $\angle A$ 的对边比上斜边，求出即可.

【解答】解：∵在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 13$ ， $BC = 5$ ，

$$\therefore \sin A = \frac{\angle A \text{的对边}}{\text{斜边}} = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}.$$

故选：A.

【点评】此题主要考查了锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

3. (4分) 抛物线 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$ 的顶点坐标是 ()

- A. (2, 3) B. (2, -3) C. (-2, 3) D. (-2, -3)

【考点】H3：二次函数的性质.

【分析】已知解析式是抛物线的顶点式，根据顶点式的坐标特点，直接写出顶点坐标.

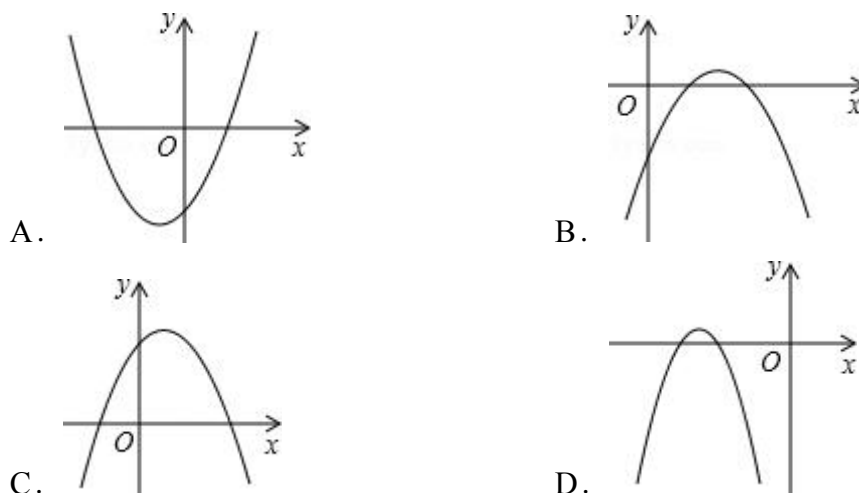
【解答】解：因为 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$ 的是抛物线的顶点式，

根据顶点式的坐标特点可知，顶点坐标为 (2, -3).

故选：B.

【点评】此题考查了二次函数顶点式的性质：抛物线 $y = a(x-h)^2 + k$ 的顶点坐标为 (h, k) .

4. (4分) 已知抛物线 $y = ax^2 + 3x + (a-2)$ ， a 是常数且 $a < 0$ ，下列选项中可能是它大致图象的是 ()



【考点】H4：二次函数图象与系数的关系.

【分析】根据抛物线对称轴位置和 a, b 的关系以及利用图象开口方向与 a 的关系，得出图象开口向下，对称轴经过 x 轴正半轴，利用图象与 y 轴交点和 c

的符号，进而得出答案.

【解答】解：∵抛物线 $y = ax^2 + 3x + (a - 2)$ ， a 是常数且 $a < 0$ ，

∴图象开口向下， $a - 2 < 0$ ，

∴图象与 y 轴交于负半轴，

∵ $a < 0$ ， $b = 3$ ，

∴抛物线对称轴在 y 轴右侧.

故选：B.

【点评】此题主要考查了二次函数图象与系数的关系，正确把握图象对称轴位置与 a ， b 的关系是解题关键.

5. (4 分) 下列命题中是假命题的是 ()

A. 若 $\vec{a} = \vec{b}$ ， $\vec{b} = \vec{c}$ ，则 $\vec{a} = \vec{c}$

B. $2(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} - 2\vec{b}$

C. 若 $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ ，则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$

【考点】LM：*平面向量.

【分析】根据向量的性质对每一项分别进行分析，即可得出答案.

【解答】解：A、若 $\vec{a} = \vec{b}$ ， $\vec{b} = \vec{c}$ ，则 $\vec{a} = \vec{c}$ ，是真命题；

B、 $2(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} - 2\vec{b}$ ，是真命题；

C、若 $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ ，则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，是真命题；

D、若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a}$ 不一定等于 $\vec{b}$ ，故原命题是假命题；

故选：D.

【点评】此题考查了平面向量，掌握向量的性质是本题的关键，注意向量包括长度及方向.

6. (4 分) 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似，且 $\triangle ABC$ 的三边长为 3、4、5，如果 $\triangle DEF$ 的周长为 6，那么下列不可能是 $\triangle DEF$ 一边长的是 ()

A. 1.5

B. 2

C. 2.5

D. 3

【考点】S7：相似三角形的性质.

【分析】由 $\triangle ABC$ 的三边长为 2、3、4，即可求得 $\triangle ABC$ 的周长，然后根据相似三角形周长的比等于相似比得出两三角形的相似比，再把各选项中的值与相

似比相乘即可得出结论.

【解答】解: $\because \triangle ABC$ 的三边长为 3、4、5,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 = 12,

$$\therefore \frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle DEF}} = \frac{12}{6} = 2,$$

A、 $1.5 \times 2 = 3$, 与 $\triangle ABC$ 一边长相符, 故本选项正确;

B、 $2 \times 2 = 4$, 与 $\triangle ABC$ 一边长相符, 故本选项正确;

C、 $2.5 \times 2 = 5$, 与 $\triangle ABC$ 一边长相符, 故本选项正确;

D、 $3 \times 2 = 6$, 故本选项错误.

故选: D.

【点评】 本题考查的是相似三角形的性质, 熟知相似三角形周长的比等于相似比是解答此题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) **【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】**

7. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, 则 $\frac{2a}{a+b}$ 的值为 $\frac{6}{7}$.

【考点】 S1: 比例的性质.

【分析】 用 a 表示出 b , 然后代入比例式进行计算即可得解.

【解答】 解: $\because \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore b = \frac{4}{3}a,$$

$$\therefore \frac{2a}{a+b} = \frac{2a}{a+\frac{4}{3}a} = \frac{6}{7}.$$

故答案为: $\frac{6}{7}$.

【点评】 本题考查了比例的性质, 用 a 表示出 b 是解题的关键.

8. (4 分) 计算: $2(\vec{m} + \vec{n}) + 3(\vec{m} - \vec{n}) = 5\vec{m} - \vec{n}$.

【考点】 LM: *平面向量.

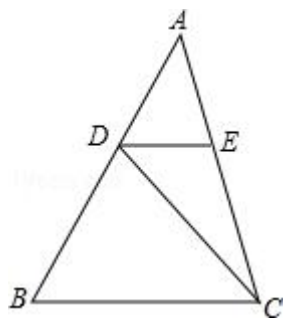
【分析】 直接利用整式加减的运算法则求解可求得答案.

【解答】 解: $2(\vec{m} + \vec{n}) + 3(\vec{m} - \vec{n}) = 2\vec{m} + 2\vec{n} + 3\vec{m} - 3\vec{n} = 5\vec{m} - \vec{n}$.

故答案为: $5\vec{m} - \vec{n}$.

【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题比较简单, 注意掌握平面向量的运算.

9. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, CD 平分 $\angle ACB$, $DE \parallel BC$, 若 $AC = 10$, $AE = 4$, 则 $BC = \underline{15}$.



【考点】KJ: 等腰三角形的判定与性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】首先利用角平分线的性质和两直线平行, 内错角相等的性质求证出 $\triangle EDC$ 是等腰三角形, 然后再根据相似三角形对应边的比相等求解.

【解答】解: $\because CD$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle ECD = \angle DCB,$$

又 $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle EDC = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ECD,$$

$\therefore \triangle EDC$ 是等腰三角形.

$$\text{即 } ED = EC = AC - AE = 10 - 4 = 6.$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

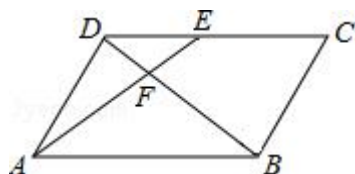
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore BC = 5 \times 6 \div 2 = 15,$$

故答案为 15.

【点评】本题考查的是平行线的性质以及角平分线的性质. 本题关键是找出内错角, 求出 $\triangle DEC$ 为等腰三角形, 从而求解.

10. (4分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为 CD 上一点, 联结 AE 、 BD , 且 AE 、 BD 交于点 F , 若 $DE: EC = 2: 3$, 则 $S_{\triangle DEF}: S_{\triangle ABF} = \underline{4: 25}$.



【考点】L5：平行四边形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】由四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，即可证得 $\triangle DEF \sim \triangle BAF$ ，然后由相似三角形面积比等于相似比的平方，即可求得答案.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle BAF,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2,$$

$$\because DE:EC = 2:3,$$

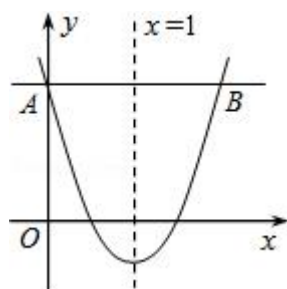
$$\therefore DE:CD = DE:AB = 2:5,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABF} = 4:25.$$

故答案为：4：25.

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质以及平行四边形的性质. 此题难度不大，注意掌握数形结合思想的应用.

11. (4 分) 如图，已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = 1$ ，点 A ， B 均在抛物线上，且 AB 与 x 轴平行，若点 A 的坐标为 $(0, \frac{3}{2})$ ，则点 B 的坐标为 $(2, \frac{3}{2})$.



【考点】H3：二次函数的性质.

【专题】11：计算题.

【分析】由于 AB 与 x 轴平行，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = 1$ ，根据抛物线的对称性得到点 A 与点 B 关于直线 $x = 1$ 对称，然后写出 B 点坐标.

【解答】解：∵ AB 与 x 轴平行，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = 1$ ，
 ∴ 点 A 与点 B 关于直线 $x = 1$ 对称，
 而点 A 的坐标为 $(0, \frac{3}{2})$ ，
 ∴ B 点坐标为 $(2, \frac{3}{2})$.
 故答案为 $(2, \frac{3}{2})$.

【点评】 本题考查了二次函数的性质：二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象为抛物线，当 $a > 0$ ，抛物线开口向上；对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ；抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, c)$ ；当 $b^2 - 4ac > 0$ ，抛物线与 x 轴有两个交点；当 $b^2 - 4ac = 0$ ，抛物线与 x 轴有一个交点；当 $b^2 - 4ac < 0$ ，抛物线与 x 轴没有交点.

12. (4 分) 如果抛物线 $y = (x+3)^2 + 1$ 经过点 $A(1, y_1)$ 和点 $B(3, y_2)$ ，那么 y_1 与 y_2 的大小关系是 y_1 < y_2 (填写 “>” 或 “<” 或 “=”).

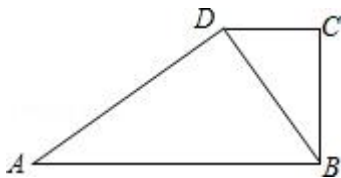
【考点】 H5：二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 分别把点 A 、 B 的横坐标代入函数解析式进行计算即可判断.

【解答】解：当 $x = 1$ 时， $y_1 = (1+3)^2 + 1 = 16 + 1 = 17$ ，
 当 $x = 3$ 时， $y_2 = (3+3)^2 + 1 = 36 + 1 = 37$ ，
 ∵ $17 < 37$ ，
 ∴ $y_1 < y_2$.
 故答案为：<.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，正确计算是解题的关键.

13. (4 分) 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp BC$ ，且 $AD \perp BD$ ，若 $CD = 1$ ， $BC = 3$ ，那么 $\angle A$ 的正切值为 $\frac{1}{3}$.



【考点】 T1：锐角三角函数的定义.

【分析】 求出 $\angle ABC = \angle ADB = 90^\circ$ ，根据三角形内角和定理求出 $\angle A = \angle DBC$ ，解直角三角形求出即可.

【解答】解：∵ $AB \parallel CD$, $AB \perp BC$,
 ∴ $DC \perp BC$, $\angle ABC = 90^\circ$,
 ∴ $\angle C = 90^\circ$,
 ∵ $AD \perp BD$,
 ∴ $\angle ADB = 90^\circ$,
 ∴ $\angle DBC + \angle ABD = \angle A + \angle ABD = 90^\circ$,
 ∴ $\angle A = \angle DBC$,
 ∵ $CD = 1$, $BC = 3$,
 ∴ $\angle A$ 的正切值为 $\tan A = \tan \angle DBC = \frac{DC}{BC} = \frac{1}{3}$,
 故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点评】本题考查了锐角三角函数的定义，三角形内角和定理的应用，关键是求出 $\angle A = \angle DBC$ 和求出 $\tan \angle DBC = \frac{DC}{BC}$.

14. (4分) 在高位 100 米的楼顶测得地面上某十字路口的俯角为 β , 那么楼底到这个十字路口的水平距离是 $\frac{100}{\tan \beta}$ 米 (用含 β 的代数式表示).

【考点】TA: 解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

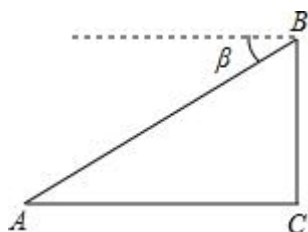
【分析】首先作出示意图, 然后利用三角函数即可求解.

【解答】解: 因为俯角是 β , 则在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \beta$,

$$\because \tan A = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore AC = \frac{BC}{\tan A} = \frac{100}{\tan \beta}.$$

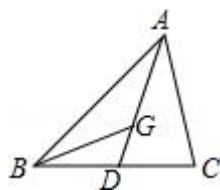
故答案是: $\frac{100}{\tan \beta}$.



【点评】本题考查了俯角的定义以及三角函数, 正确理解俯角的定义是关键.

15. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是中线, G 是重心, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BG}$

$$= -\frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}. \text{ (用 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 表示)}$$



【考点】 K5: 三角形的重心; LM: *平面向量.

【专题】 11: 计算题.

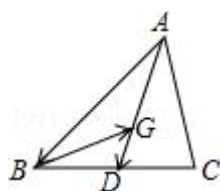
【分析】 根据重心定理求出 $\vec{GD}$, 再利用三角形法则求出 $\vec{BG}$ 即可.

【解答】 解: 根据三角形的重心定理, $AG = \frac{2}{3}AD$,

$$\text{于是 } \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{b}.$$

$$\text{故 } \vec{BG} = \vec{AG} - \vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}.$$

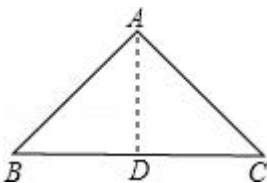


【点评】 此题考查了平面向量的三角形法则和重心定理 (三角形的重心是各中线的交点, 重心定理是说三角形顶点到重心的距离等于该顶点对边上中线长的 $\frac{2}{3}$), 难度不大.

16. (4 分) $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$, 那么 $\sin B = \frac{3}{5}$.

【考点】 KH: 等腰三角形的性质; KQ: 勾股定理; T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】 过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D , 求出 BD , 根据勾股定理求出 AD , 解直角三角形求出即可.



【解答】 解:

过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ,

$$\because AB = AC = 5, BC = 8,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ, BD = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\text{由勾股定理得: } AD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore \sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{5}.$$

【点评】 本题考查了解直角三角形，勾股定理，等腰三角形的性质的应用，主要考查学生运用定理进行推理和计算的能力。

17. (4分) 将二次函数 $y = 3x^2$ 的图象向左平移 2 个单位再向下平移 4 个单位，所得函数表达式是 $y = 3(x+2)^2 - 4$ ，我们来解释一下其中的原因：不妨设平移前图象上任意一点 P 经过平移后得到点 P' ，且点 P' 的坐标为 (x, y) ，那么 P' 点反之向右平移 2 个单位，再向上平移 4 个单位得到点 $P(x+2, y+4)$ ，由于点 P 是二次函数 $y = 3x^2$ 的图象上的点，于是把点 $P(x+2, y+4)$ 的坐标代入 $y = 3x^2$ 再进行整理就得到 $y = 3(x+2)^2 - 4$ 。类似的，我们对函数 $y = \frac{1}{x(x+1)}$ 的图象进行平移：先向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位，所得图象的函数表达式为 $y = \frac{1}{x(x-1)} + 3$ 。

【考点】 H6：二次函数图象与几何变换。

【分析】 根据题目信息，设平移前图象上任意一点 P 经过平移后得到点 P' ，且点 P' 的坐标为 (x, y) ，那么 P' 点反之向左平移 1 个单位，再向下平移 3 个单位得到点 $P(x-1, y-3)$ ，然后代入原函数解析式整理即可得解。

【解答】 解：设平移前图象上任意一点 P 经过平移后得到点 P' ，且点 P' 的坐标为 (x, y) ，

那么 P' 点反之向左平移 1 个单位，再向下平移 3 个单位得到点 $P(x-1, y-3)$ ，

$$\text{把点 } P \text{ 坐标代入函数 } y = \frac{1}{x(x+1)} \text{ 得, } y-3 = \frac{1}{(x-1)(x-1+1)},$$

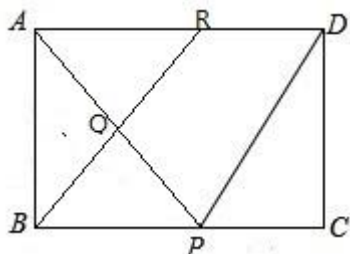
$$\text{整理得, } y = \frac{1}{x(x-1)} + 3.$$

$$\text{故答案为: } y = \frac{1}{x(x-1)} + 3.$$

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换，读懂题目信息是解题的关键，也

是本题的难点.

18. (4分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=8$, $BC=9$, 点 P 在 BC 边上, $CP=3$, 点 Q 为线段 AP 上的动点, 射线 BQ 与矩形 $ABCD$ 的一边交于点 R , 且 $AP=BR$, 则 $\frac{QR}{BQ} = \underline{1 \text{ 或 } \frac{4+\sqrt{19}}{8}}$.



【考点】 LB: 矩形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 当 R 在 AD 上时, 如图 1, 由条件可以得出 $\triangle ABP \cong \triangle BAR$, 就可以得出 $BP=AR$, 在得出 $\triangle BQP \cong \triangle RQA$ 就可以得出 $BQ=RQ$ 就可以得出结论; 当 R 在 CD 上时, 如图 2, 作 $QE \perp BC$ 于 E , 设 $PE=x$, 可以得出 $QE=\frac{4}{3}x$, 由相似三角形的性质可以求出 x 的值就可以求出 BQ 和 RQ 的值而得出结论.

【解答】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore \angle ABC = \angle BAD = \angle C = 90^\circ, AB = CD = 8, AD = BC = 9. AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle RAQ = \angle BPQ, \angle ARQ = \angle PBQ.$$

$$\because CP = 3,$$

$$\therefore BP = 6.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 中由勾股定理, 得

$$AP = 10.$$

$$\because AP = BR,$$

$$\therefore BR = 10.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABP$ 和 $\text{Rt}\triangle BAR$ 中

$$\begin{cases} AP=BR \\ AB=BA \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABP \cong \text{Rt}\triangle BAR \text{ (HL)},$$

$$\therefore BP = AR.$$

在 $\triangle AQR$ 和 $\triangle PQB$ 中

$$\begin{cases} \angle RAQ = \angle BPQ \\ AR = PB \\ \angle ARQ = \angle PBQ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AQR \cong \triangle PQB \text{ (ASA)},$$

$$\therefore QR = QB,$$

$$\therefore \frac{QR}{BQ} = 1;$$

当 R 在 CD 上时, 如图 2, 作 $QE \perp BC$ 于 E , 设 $PE = x$,

$$\therefore \frac{QE}{AB} = \frac{PE}{PB},$$

$$\therefore \frac{QE}{8} = \frac{x}{6},$$

$$\therefore QE = \frac{4}{3}x.$$

在 $\text{Rt}\triangle BRC$ 中, 由勾股定理, 得

$$CR = \sqrt{19}.$$

$$\therefore \frac{QE}{CR} = \frac{BE}{BC},$$

$$\therefore \frac{\frac{4}{3}x}{\sqrt{19}} = \frac{6-x}{9},$$

$$\therefore x = \frac{72\sqrt{19}-114}{125},$$

$$\therefore BE = 6 - \frac{72\sqrt{19}-114}{125} = \frac{864-72\sqrt{19}}{125}.$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{BQ}{BR},$$

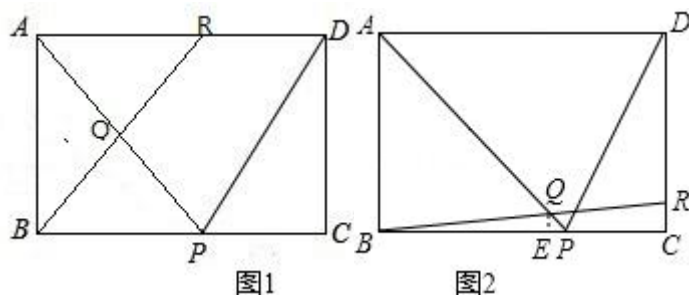
$$\therefore \frac{\frac{864-72\sqrt{19}}{125}}{9} = \frac{BQ}{10},$$

$$\therefore BQ = \frac{192-16\sqrt{19}}{25},$$

$$\therefore RQ = 10 - \frac{192-16\sqrt{19}}{25} = \frac{58+16\sqrt{19}}{25}.$$

$$\therefore \frac{RQ}{BQ} = \frac{\frac{58+16\sqrt{19}}{25}}{\frac{192-16\sqrt{19}}{25}} = \frac{4+\sqrt{19}}{8}.$$

故答案为: 1 或 $\frac{4+\sqrt{19}}{8}$.



【点评】 本题考查了矩形的性质的运用，全等三角形的判定及性质的运用，勾股定理的运用，相似三角形的判定及性质的运用，比例的运用，解答时运用比例线段求解是关键.

三、解答题:

19. (10 分) 计算:
$$\frac{2\sin^2 30^\circ + \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ + \sin^2 60^\circ}{\cos^2 45^\circ + \cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ}.$$

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 将特殊角的三角函数值代入求解.

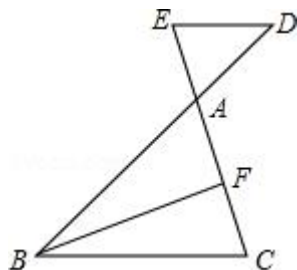
【解答】 解: 原式 =
$$\frac{2 \times (\frac{1}{2})^2 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9}{4}.$$

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值，解答本题的关键是掌握几个特殊角的三角函数值.

20. (10 分) 如图，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BA 、 CA 的延长线上，且 $DE \parallel BC$ ， $AE = \frac{1}{2}AC$ ， F 为 AC 的中点.

(1) 设 $\overrightarrow{BF} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，试用 $x\vec{a} + y\vec{b}$ 的形式表示 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{ED}$; (x 、 y 为实数)

(2) 作出 $\overrightarrow{BF}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 上的分向量. (保留作图痕迹，不写作法，写出结论)



【考点】 LM: *平面向量.

【分析】(1) 由 $DE \parallel BC$, $AE = \frac{1}{2}AC$, F 为 AC 的中点, 可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 然后由相似三角形的对应边成比例与三角形法则, 即可求得答案;

(2) 利用平行四边形法则, 即可作出 $\overrightarrow{BF}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 上的分向量. $\perp$

【解答】解: (1) $\because \overrightarrow{AC} = \vec{b}$, F 为 AC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{BF} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\because DE \parallel BC,$$

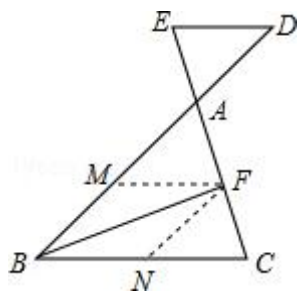
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore DE:BC = AE:AC,$$

$$\because AE = \frac{1}{2}AC,$$

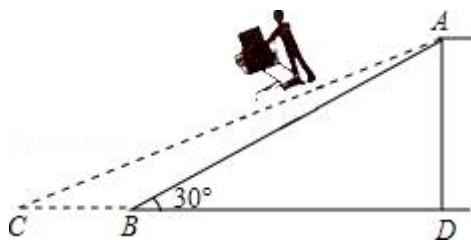
$$\therefore \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b};$$

(2) 如图: 过点 F 作 $FN \parallel AB$, 交 BC 于点 N , $FM \parallel AB$ 交 AB 于点 M , 则 $\overrightarrow{BM}$ 与 $\overrightarrow{BN}$ 即为所求.



【点评】此题考查了平面向量的知识. 此题难度适中, 注意掌握三角形法则与平行四边形法则的应用, 注意掌握数形结合思想的应用.

21. (10 分) 某商场为了方便顾客使用购物车, 将滚动电梯由坡角 30° 的坡面改为坡度为 1:2.4 的坡面. 如图, BD 表示水平面, AD 表示电梯的铅直高度, 如果改动后电梯的坡面 AC 长为 13 米, 求改动后电梯水平宽度增加部分 BC 的长 (结果保留根号).



【考点】T9：解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，已知了坡面 AC 的坡比以及坡面 AC 的值，通过勾股定理可求 AD ， DC 的值，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，根据坡角为 30° ，求出坡面 AC 的坡比可求 BD 的值，再根据 $BC = DC - BD$ 即可求解.

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，

$$\because AD:DC = 1:2.4, AC = 13,$$

$$\text{由 } AD^2 + DC^2 = AC^2, \text{ 得 } AD^2 + (2.4AD)^2 = 13^2.$$

$$\therefore AD = \pm 5 \text{ (负值不合题意, 舍去).}$$

$$\therefore DC = 12.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，

$$\because \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore AD:BD = \sqrt{3}:3,$$

$$\therefore BD = \frac{5 \times 3}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}.$$

$$\therefore BC = DC - BD = 12 - 5\sqrt{3}.$$

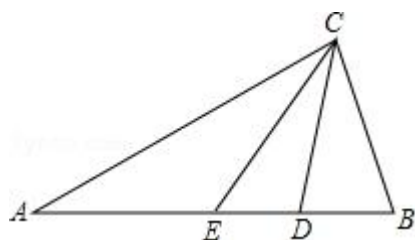
答：改动后电梯水平宽度增加部分 BC 的长为 $(12 - 5\sqrt{3})$ 米.

【点评】本题主要考查学生对坡度坡角的掌握及三角函数的运用能力，熟练运用勾股定理是解答本题的关键.

22. (10 分) 已知：如图， $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 是边 AB 上的点， CD 平分 $\angle ECB$ ，且 $BC^2 = BD \cdot BA$.

(1) 求证： $\triangle CED \sim \triangle ACD$;

(2) 求证： $\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{ED}$.



【考点】S9：相似三角形的判定与性质.

【专题】14：证明题.

【分析】(1) 由 $BC^2 = BD \cdot BA$, $\angle B$ 是公共角, 可证得 $\triangle BCD \sim \triangle BAC$, 又由 CD

平分 $\angle ECB$, 可得 $\angle ECD = \angle A$, 继而证得: $\triangle CED \sim \triangle ACD$;

(2) 由 $\triangle BCD \sim \triangle BAC$ 与 $\triangle CED \sim \triangle ACD$, 可得 $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}$, $\frac{CE}{ED} = \frac{AC}{CD}$, 继而证得

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CE}{ED}.$$

【解答】证明: (1) $\because BC^2 = BD \cdot BA$,

$$\therefore BD : BC = BC : BA,$$

$\because \angle B$ 是公共角,

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A,$$

$\because CD$ 平分 $\angle ECB$,

$$\therefore \angle ECD = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle A,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle CDA,$$

$$\therefore \triangle CED \sim \triangle ACD;$$

(2) $\because \triangle BCD \sim \triangle BAC$, $\triangle CED \sim \triangle ACD$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD}, \quad \frac{CE}{ED} = \frac{AC}{CD},$$

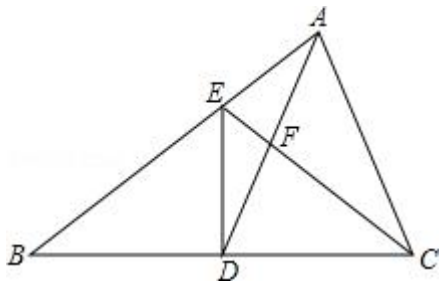
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{CE}{ED}.$$

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

23. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, 且 $AD = AC$, $DE \perp BC$, 与 AB 相交于点 E , EC 与 AD 相交于点 F .

(1) 求证: $\triangle ABC \sim \triangle FCD$;

(2) 若 $DE = 3$, $BC = 8$, 求 $\triangle FCD$ 的面积.



【考点】S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】(1) 由 $DE \perp BC$, D 是 BC 的中点, 根据线段垂直平分线的性质, 可得 $BE = CE$, 又由 $AD = AC$, 易得 $\angle B = \angle DCF$, $\angle FDC = \angle ACB$, 即可证得 $\triangle ABC \sim \triangle FCD$;

(2) 首先过 A 作 $AG \perp CD$, 垂足为 G , 易得 $\triangle BDE \sim \triangle BGA$, 可求得 AG 的长, 继而求得 $\triangle ABC$ 的面积, 然后由相似三角形面积比等于相似比的平方, 求得 $\triangle FCD$ 的面积.

【解答】(1) 证明: $\because D$ 是 BC 的中点, $DE \perp BC$,

$$\therefore BE = CE,$$

$$\therefore \angle B = \angle DCF,$$

$$\because AD = AC,$$

$$\therefore \angle FDC = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle FCD;$$

(2) 解: 过 A 作 $AG \perp CD$, 垂足为 G .

$$\because AD = AC,$$

$$\therefore DG = CG,$$

$$\therefore BD : BG = 2 : 3,$$

$$\because ED \perp BC,$$

$$\therefore ED \parallel AG,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BGA,$$

$$\therefore ED : AG = BD : BG = 2 : 3,$$

$$\because DE = 3,$$

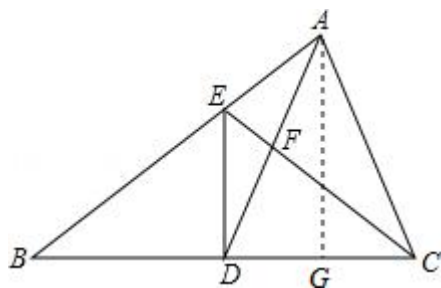
$$\therefore AG = \frac{9}{2},$$

$$\because \triangle ABC \sim \triangle FCD, BC = 2CD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle FCD}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{CD}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AG = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{9}{2} = 18,$$

$$\therefore S_{\triangle FCD} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{9}{2}.$$

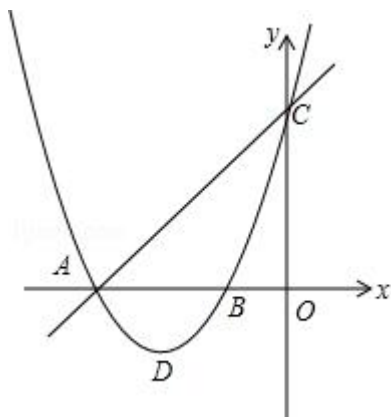


【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质以及等腰三角形的性质．此题难度适中，注意掌握辅助线的作法，注意掌握数形结合思想的应用．

24. (12分) 如图，直线 $y = x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 C ，经过 A 、 C 两点的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴的负半轴上另一交点为 B ，且 $\tan \angle CBO = 3$ ．

(1) 求该抛物线的解析式及抛物线的顶点 D 的坐标；

(2) 若点 P 是射线 BD 上一点，且以点 P 、 A 、 B 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，求点 P 的坐标．



【考点】HF：二次函数综合题．

【专题】16：压轴题．

【分析】(1) 利用直线解析式求出点 A 、 C 的坐标，从而得到 OA 、 OC ，再根据 $\tan \angle CBO = 3$ 求出 OB ，从而得到点 B 的坐标，然后利用待定系数法求出二次函数解析式，整理成顶点式形式，然后写出点 D 的坐标；

(2) 根据点 A 、 B 的坐标求出 AB ，判断出 $\triangle AOC$ 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质求出 AC ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，再根据点 B 、 D 的坐标求出 $\angle ABD = 45^\circ$ ，然后分① AB 和 BP 是对应边时， $\triangle ABC$ 和 $\triangle BPA$ 相似，利用相似三角形对应边成比例列式求出 BP ，过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E ，求出 BE 、 PE ，再求出 OE 的长度，然后写出点 P 的坐标即可；② AB 和 BA 是对应边时， $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAP$ 相似，利用相似三角形对应边成比例列式求出 BP ，过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E ，求出 BE 、 PE ，再求出 OE 的长度，然后写出点 P 的坐标即可。

【解答】 解：(1) 令 $y = 0$ ，则 $x+3 = 0$ ，

解得 $x = -3$ ，

令 $x = 0$ ，则 $y = 3$ ，

$\therefore$ 点 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 3)$ ，

$\therefore OA = OC = 3$ ，

$\therefore \tan \angle CBO = \frac{OC}{OB} = 3$ ，

$\therefore OB = 1$ ，

$\therefore$ 点 $B(-1, 0)$ ，

把点 A 、 B 、 C 的坐标代入抛物线解析式得，
$$\begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ a-b+c=0 \\ c=3 \end{cases}$$
，

解得
$$\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=3 \end{cases}$$
，

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y = x^2 + 4x + 3$ ，

$\therefore y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$ ，

$\therefore$ 顶点 $D(-2, -1)$ ；

(2) $\because A(-3, 0)$ ， $B(-1, 0)$ ，

$\therefore AB = -1 - (-3) = 2$ ，

$\because OA = OC$ ， $\angle AOC = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AOC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AC = \sqrt{2}OA = 3\sqrt{2}$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ，

$\because B(-1, 0)$ ， $D(-2, -1)$ ，

$$\therefore \angle ABD = 45^\circ,$$

① AB 和 BP 是对应边时, $\triangle ABC \sim \triangle BPA$,

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{AC}{BA},$$

$$\text{即 } \frac{2}{BP} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } BP = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E ,

$$\text{则 } BE = PE = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore OE = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right);$$

② AB 和 BA 是对应边时, $\triangle ABC \sim \triangle BAP$,

$$\therefore \frac{AB}{BA} = \frac{AC}{BP},$$

$$\text{即 } \frac{2}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{BP},$$

$$\text{解得 } BP = 3\sqrt{2},$$

过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E ,

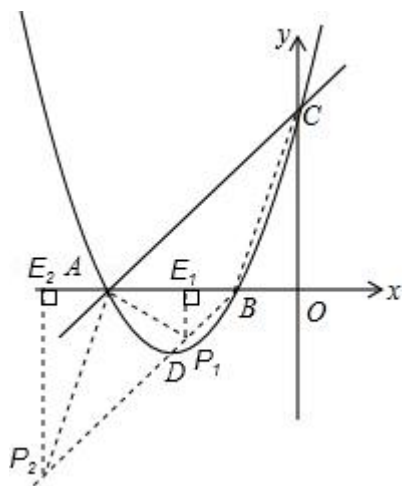
$$\text{则 } BE = PE = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3,$$

$$\therefore OE = 1 + 3 = 4,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (-4, -3),$$

综上所述, 点 P 的坐标为 $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 或 $(-4, -3)$ 时, 以点 P 、 A 、 B 为顶

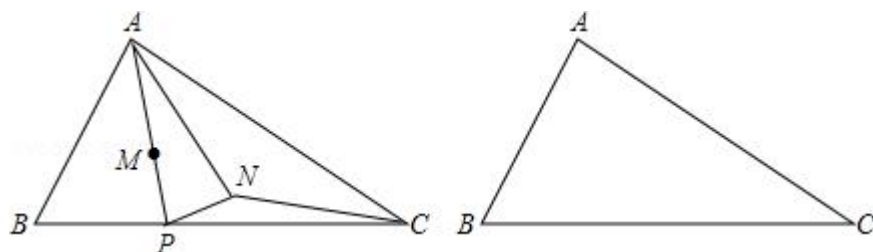
点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似.



【点评】 本题是二次函数综合题型，主要利用了直线与坐标轴交点的求解，待定系数法求二次函数解析式，等腰直角三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，难点在于（2）要分情况讨论．

25. (14 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 11$ ， $\cos B = \frac{3}{5}$ ，点 P 是 BC 边上的一个动点，联结 AP ，取 AP 的中点 M ，将线段 MP 绕点 P 顺时针旋转 90° 得到线段 PN ，联结 AN ， NC ．

- (1) 当点 N 恰好落在 BC 边上时，求 NC 的长；
- (2) 若点 N 在 $\triangle ABC$ 内部（不含边界），设 $BP = x$ ， $CN = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式，并求出函数的定义域；
- (3) 若 $\triangle PNC$ 是等腰三角形，求 BP 的长．



【考点】 SO：相似形综合题．

【分析】 (1) 根据三角函数和勾股定理可以求得答案．

(2) 过 A 、 N 作 BC 的垂线，垂足分别为 H 、 G ，证得 $\triangle APH \sim \triangle PGN$ ，得到对应边的比例式，构造方程求解即可．

(3) 分三种情况讨论：第一种情况：当 $PN = NC$ 时， $PG = CG$ ，即： $9 - x = 2$ ，解得： $x = 7$ ；第二种情况：当 $PN = PC$ 时， $PN = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2 + 16}$ ， $PC = 11 - x$ ， $(x - 3)^2 + 16 = 4(11 - x)^2$ ，整理得： $3x^2 - 82x + 459 = 0$ ，解得：

$$x_1 = \frac{41+4\sqrt{19}}{3} (\text{舍去}), x_2 = \frac{41-4\sqrt{19}}{3}; \text{第三种情况: 当 } NC = PC \text{ 时: } NC =$$

$$\sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + (9-x)^2} = \frac{\sqrt{5x^2 - 78x + 333}}{2}, PC = 11 - x, \text{ 所以 } = \frac{\sqrt{5x^2 - 78x + 333}}{2} =$$

$$11 - x, \text{ 即: } x^2 + 10x - 151 = 0, \text{ 解方程得, } x_1 = -5 - 4\sqrt{11} (\text{舍去}) x_2 = -5 + 4\sqrt{11}.$$

【解答】 解: (1) $\because \angle APN = 90^\circ$,

$$\therefore AP \perp BN,$$

$$\therefore \cos B = \frac{BP}{AB} = \frac{3}{5},$$

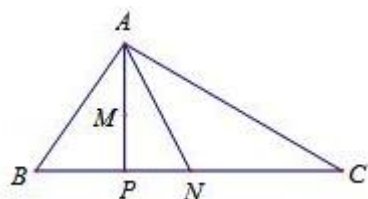
$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore BP = 3, AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = 4,$$

$$\therefore PN = MP = \frac{1}{2}AP,$$

$$\therefore PN = 2,$$

$$\therefore NC = 11 - 3 - 2 = 6;$$



(2) 过 A、N 作 BC 的垂线, 垂足分别为 H、G,

$$\therefore AB = 5, \cos B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BH = 3,$$

$$\therefore BP = x,$$

$$\therefore HP = x - 3, AH = 4,$$

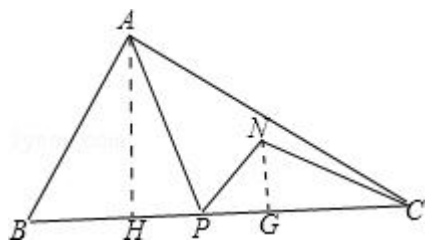
$$\therefore \triangle APH \sim \triangle PGN,$$

$$\therefore \frac{AP}{PN} = \frac{AH}{PG} = \frac{PH}{NG} = 2,$$

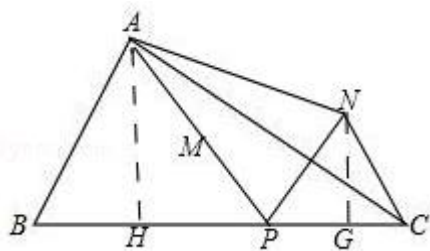
$$\therefore PG = 2, NG = \frac{x-3}{2}, CG = 11 - x - 2 = 9 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle NCG \text{ 中, } y = \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + (9-x)^2} = \frac{\sqrt{5x^2 - 78x + 333}}{2}, \text{ 取值范围为: } 3 < x <$$

6.



(3) 第一种情况：当 $PN = NC$ 时， $PG = CG$ ，即： $9 - x = 2$ ，解得： $x = 7$ ；

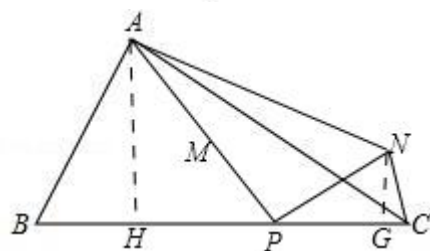


第二种情况：当 $PN = PC$ 时， $PN = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)^2 + 16}$ ， $PC = 11 - x$ ，

$$(x-3)^2 + 16 = 4(11-x)^2,$$

整理得： $3x^2 - 82x + 459 = 0$ ，

解得： $x_1 = \frac{41+4\sqrt{19}}{3}$ (舍去)， $x_2 = \frac{41-4\sqrt{19}}{3}$



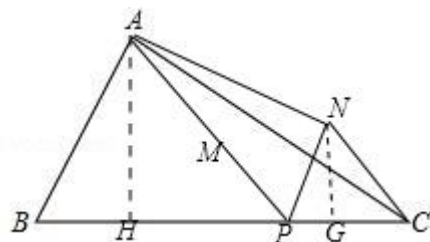
第三种情况：

当 $NC = PC$ 时： $NC = \sqrt{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + (9-x)^2} = \frac{\sqrt{5x^2 - 78x + 333}}{2}$ ， $PC = 11 - x$ ，

所以 $\frac{\sqrt{5x^2 - 78x + 333}}{2} = 11 - x$ ，

即： $x^2 + 10x - 151 = 0$ ，

解方程得， $x_1 = -5 - 4\sqrt{11}$ (舍去) $x_2 = -5 + 4\sqrt{11}$ 。



综上所述: $BP = 7$ 或 $\frac{41-4\sqrt{19}}{3}$ 或 $-5+4\sqrt{11}$ 时, $\triangle PNC$ 为等腰三角形.

【点评】 本题考查了线段长度的求法, 以及在几何问题中用方程思想求线段长度的转化方法, 同时注意分类讨论的思想的应用.