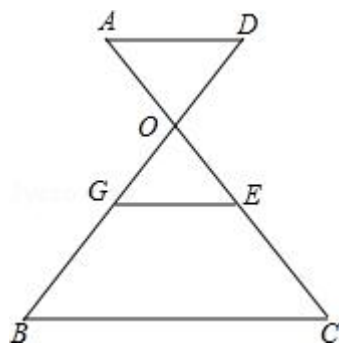


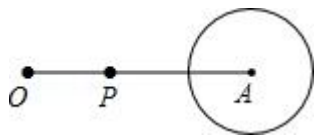
2014 年上海市崇明县中考数学一模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{a}{a+b}$ 的值为 ()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
2. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = \beta$, $AB = a$, 那么 BC 的长为 ()
 A. $a \sin \beta$ B. $a \cos \beta$ C. $\frac{a}{\cos \beta}$ D. $a \tan \beta$
3. (4 分) 如果两个相似三角形的面积比是 1:2, 那么它们的周长比是 ()
 A. 1:2 B. 1:4 C. $1:\sqrt{2}$ D. 2:1
4. (4 分) 在平面直角坐标系中, 将抛物线 $y = 2x^2$ 向下平移 2 个单位, 那么所得抛物线的表达式为 ()
 A. $y = 2x^2 - 2$ B. $y = 2x^2 + 2$ C. $y = 2(x-2)^2$ D. $y = 2(x+2)^2$
5. (4 分) 如图, 已知 $AD \parallel BC$, AC 与 BD 相交于点 O , 点 G 是 BD 的中点, 过 G 作 $GE \parallel BC$ 交 AC 于点 E , 如果 $AD = 1$, $BC = 3$, $GE:BC$ 等于 ()



- A. 1:2 B. 1:3 C. 1:4 D. 2:3
6. (4 分) 如图, 点 O 在 $\odot A$ 外, 点 P 在线段 OA 上运动, 以 OP 为半径的 $\odot O$ 与 $\odot A$ 的位置关系不可能是 ()



- A. 外切 B. 相交 C. 外离、 D. 内含
- 二、填空题（本大题共 12 题，每小题 4 分，满分 48 分）
7. (4 分) 化简: $3(\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(\vec{a} + \vec{b}) =$ _____.
8. (4 分) 线段 $AB = 10$, 点 P 是 AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$, 则 $AP =$ _____ (用

根式表示).

9. (4分) 如果抛物线 $y = (k+1)x^2 - 2x + 3$ 的开口向上, 那么 k 的取值范围为_____.

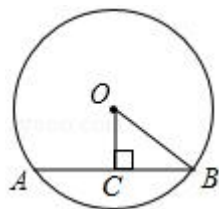
10. (4分) 抛物线 $y = x^2 - 4x + 5$ 的对称轴是直线_____.

11. (4分) 在中国地图册上, 联结上海、香港、台湾三地构成一个三角形, 用刻度尺测得它们之间的距离如图所示. 飞机从台湾直飞上海的距离约为 1290 千米, 那么飞机从台湾绕道香港再到上海的空中飞行距离是_____千米.



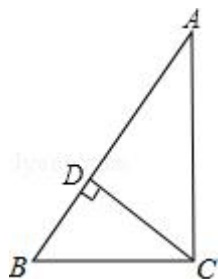
12. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, 若中线 AD 和中线 CE 相交于 G , 且 $GC = 6$, 那么 EC = _____.

13. (4分) 如图, 在 $\odot O$ 中, $OC \perp$ 弦 AB 于点 C , $AB = 4$, $OC = 1$, 则 OB 的长是_____.

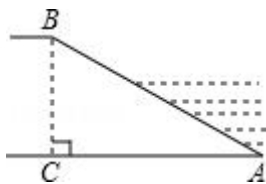


14. (4分) 正多边形的一个外角等于 20° , 则这个正多边形的边数是_____.

15. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 垂足为 D , 若 $AC = 2$, $AB = 3$, 那么 $\cos \angle BCD$ 的值为_____.



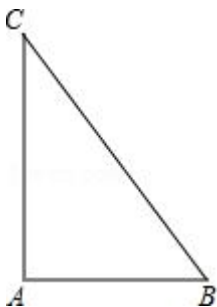
16. (4分) 河堤横截面如图所示, 堤高 BC 为 4 米, 迎水坡 AB 的坡比为 $1: \sqrt{3}$, 那么 AB 的长为_____米.



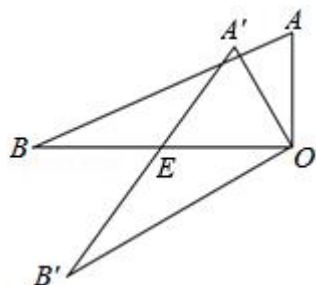
17. (4分) 根据三角形外心的概念, 我们可引入下一个新定义:

定义: 到三角形的两个顶点距离相等的点, 叫做此三角形的准外心.

根据准外心的定义, 探究如下问题: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $BC = 10$, $AB = 6$, 如果准外心 P 在 AC 边上, 那么 PA 的长为_____.



18. (4分) 如图, $\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$, $AO = 3$, $BO = 6$, $\triangle AOB$ 绕顶点 O 逆时针旋转到 $\triangle A'OB'$ 处, 此时线段 $A'B'$ 与 BO 的交点 E 为 BO 的中点, 则线段 $B'E$ 的长度为_____.



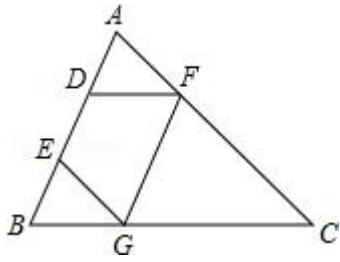
三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{\tan 60^\circ \cdot \cot 45^\circ}{2\cos 30^\circ} - \sin 60^\circ \cdot \cot 30^\circ$

20. (10分) 如图, D 、 E 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上的点, F 、 G 分别是边 AC 、 BC 上的点, 且满足 $AD = DE = EB$, $DF \parallel BC$, $EG \parallel AC$.

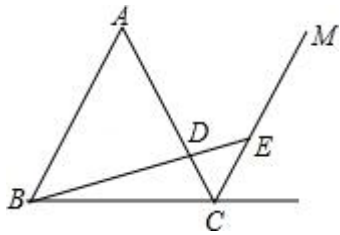
(1) 求证: $FG \parallel AB$;

(2) 设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, 请用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{GF}$.



21. (10分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB = 6$, 点 D 在 AC 上, $AD = 2CD$, CM 是 $\angle ACB$ 的外角平分线, 连接 BD 并延长与 CM 交于点 E .

- (1) 求 CE 的长;
- (2) 求 $\angle EBC$ 的正切值.

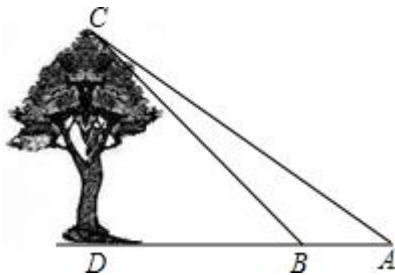


22. (10分) 在数学活动课上, 九年级(1)班数学兴趣小组的同学们测量校园内一棵大树(如图)的高度, 设计的方案及测量数据如下:

- (1) 在大树前的平地上选择一点 A , 测得由点 A 看大树顶端 C 的仰角为 35° ;
- (2) 在点 A 和大树之间选择一点 B (A, B, D 在同一直线上), 测得由点 B 看大树顶端 C 的仰角恰好为 45° ;
- (3) 量出 A, B 两点间的距离为4.5米.

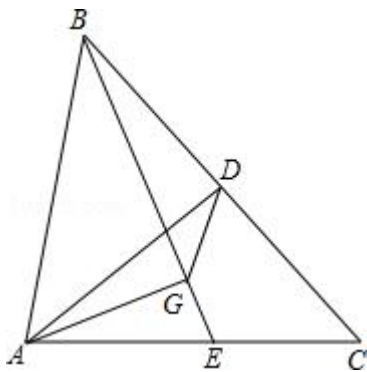
请你根据以上数据求出大树 CD 的高度.(精确到0.1米)(可能用到的参考数据:

$$\sin 35^\circ \approx 0.57, \cos 35^\circ \approx 0.82, \tan 35^\circ \approx 0.70)$$



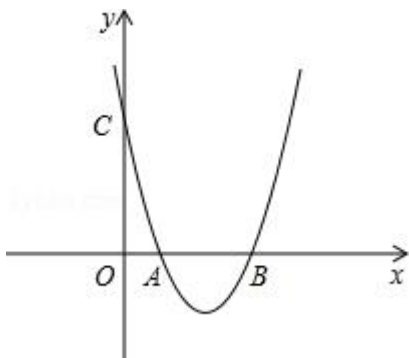
23. (12分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在 BC 和 AC 边上, 点 G 是 BE 边上一点, 且 $\angle BAD = \angle BGD = \angle C$, 联结 AG .

- (1) 求证: $BD \cdot BC = BG \cdot BE$;
- (2) 求证: $\angle BGA = \angle BAC$.



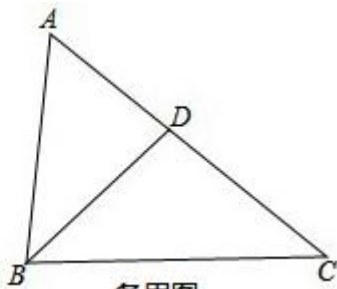
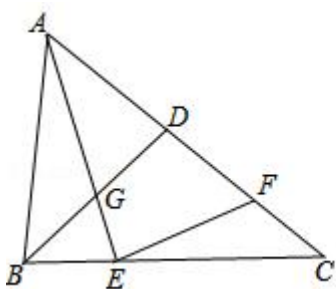
24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 点 B 的坐标为 $(3, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 顶点为 D .

- (1) 求抛物线的解析式及顶点 D 的坐标;
- (2) 联结 AC , BC , 求 $\angle ACB$ 的正切值;
- (3) 点 P 抛物线的对称轴上一点, 当 $\triangle PBD$ 与 $\triangle CAB$ 相似时, 求点 P 的坐标.



25. (14分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 8$, $BC = 10$, $\cos C = \frac{3}{4}$, $\angle ABC = 2\angle C$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 边于点 D , 点 E 是 BC 边上的一个动点 (不与 B 、 C 重合), F 是 AC 边上一点, 且 $\angle AEF = \angle ABC$, AE 与 BD 相交于点 G .

- (1) 求证: $\frac{AB}{CE} = \frac{BG}{CF}$;
- (2) 设 $BE = x$, $CF = y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;
- (3) 当 $\triangle AEF$ 是以 AE 为腰的等腰三角形时, 求 BE 的长.



2014 年上海市崇明县中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{a}{a+b}$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

【考点】65: 分式的基本性质.

【分析】由题知, 我们可得出 $2a = b$, 让等式两边都加上 a , 那么 $3a = a+b$, 得出 $\frac{a}{a+b}$ 的值.

【解答】解: 由 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, 得出 $2a = b$,

等式两边都加上 a , 那么 $3a = a+b$,

故 $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}$.

故选: C.

【点评】解题的关键是正确运用分式的基本性质. 本题中要先确定 a 与 b 的关系, 再确定 a 与 $a+b$ 的关系.

2. (4 分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = \beta$, $AB = a$, 那么 BC 的长为 ()

A. $a\sin\beta$

B. $a\cos\beta$

C. $\frac{a}{\cos\beta}$

D. $a\tan\beta$

【考点】T1: 锐角三角函数的定义.

【分析】根据余弦定义可得 $\cos\beta = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{a}$, 然后变形可得答案.

【解答】解: $\because \cos\beta = \frac{CB}{AB} = \frac{CB}{a}$,

$\therefore BC = a\cos\beta$,

故选: B.

【点评】此题主要考查了锐角三角函数, 关键是掌握余弦 = $\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$.

3. (4 分) 如果两个相似三角形的面积比是 1: 2, 那么它们的周长比是 ()

A. 1: 2

B. 1: 4

C. 1: $\sqrt{2}$

D. 2: 1

【考点】S7: 相似三角形的性质.

【分析】由两个相似三角形的面积比是 $1:2$ ，根据相似三角形的面积比等于相似比的平方，即可求得它们的相似比，又由相似三角形周长的比等于相似比，即可求得它们的周长比．

【解答】解：∵两个相似三角形的面积比是 $1:2$ ，

∴这两个相似三角形的相似比是 $1:\sqrt{2}$ ，

∴它们的周长比是 $1:\sqrt{2}$ ．

故选：C．

【点评】此题考查了相似三角形的性质．此题比较简单，解题的关键是掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方与相似三角形周长的比等于相似比性质的应用．

4. (4分) 在平面直角坐标系中，将抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 2 个单位，那么所得抛物线的表达式为 ()

A. $y=2x^2-2$ B. $y=2x^2+2$ C. $y=2(x-2)^2$ D. $y=2(x+2)^2$

【考点】H6：二次函数图象与几何变换．

【专题】46：几何变换．

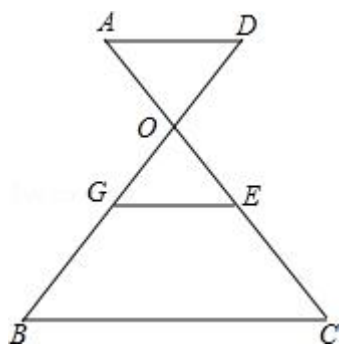
【分析】由于原抛物线的顶点坐标为 $(0, 0)$ ，则将抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 2 个单位所得抛物线的顶点坐标为 $(0, -2)$ ，然后根据顶点式写出平移后抛物线的解析式．

【解答】解：抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 2 个单位，所得抛物线的表达式为 $y=2x^2-2$ ．

故选：A．

【点评】本题考查了二次函数与几何变换：由于抛物线平移后的形状不变，故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式．

5. (4分) 如图，已知 $AD\parallel BC$ ， AC 与 BD 相交于点 O ，点 G 是 BD 的中点，过 G 作 $GE\parallel BC$ 交 AC 于点 E ，如果 $AD=1$ ， $BC=3$ ， $GE:BC$ 等于 ()



A. 1: 2

B. 1: 3

C. 1: 4

D. 2: 3

【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 由 $AD \parallel BC$, $GE \parallel BC$, 易证得 $\triangle AOD \sim \triangle COB$, $\triangle OGE \sim \triangle OBC$, 又由 $AD = 1$, $BC = 3$, 点 G 是 BD 的中点, 根据相似三角形的对应边成比例, 易得 $OG = OD$, 继而求得答案.

【解答】 解: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB,$$

$$\because AD = 1, BC = 3,$$

$$\therefore OD: OB = AD: BC = 1: 3,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{4}BD,$$

$$\because \text{点 } G \text{ 是 } BD \text{ 的中点},$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OD = OG,$$

$$\because GE \parallel BC,$$

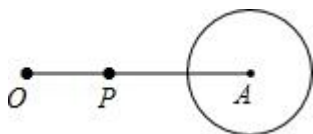
$$\therefore \triangle OGE \sim \triangle OBC,$$

$$\therefore GE: BC = OG: OB = OD: OB = 1: 3.$$

故选: B.

【点评】 此题考查了相似三角形的判定与性质. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

6. (4分) 如图, 点 O 在 $\odot A$ 外, 点 P 在线段 OA 上运动, 以 OP 为半径的 $\odot O$ 与 $\odot A$ 的位置关系不可能是 ()



A. 外切 B. 相交 C. 外离、 D. 内含

【考点】MJ：圆与圆的位置关系.

【分析】根据圆心距 PA 不可能两圆的半径之差进行判断.

【解答】解： $\because$ 圆心距 PA 不可能小于两圆的半径之差，

$\therefore$ 以 OP 为半径的 $\odot O$ 与 $\odot A$ 的位置关系不可能内含.

故选：D.

【点评】本题考查了圆与圆的位置关系：若两圆的圆心距、半径分别为 d 、 R 、 r ，

则①两圆外离 $\Leftrightarrow d > R+r$ ；②两圆外切 $\Leftrightarrow d = R+r$ ；③两圆相交 $\Leftrightarrow R-r < d < R+r$

($R \geq r$)；④两圆内切 $\Leftrightarrow d = R-r$ ($R > r$)；⑤两圆内含 $\Leftrightarrow d < R-r$ ($R > r$).

二、填空题（本大题共 12 题，每小题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 化简： $3(\vec{a}+2\vec{b})-2(\vec{a}+\vec{b}) = \underline{\vec{a}+4\vec{b}}$.

【考点】LM：*平面向量.

【分析】直接利用平面向量的加减运算法则求解即可求得答案，注意去括号法则.

【解答】解： $3(\vec{a}+2\vec{b})-2(\vec{a}+\vec{b}) = 3\vec{a}+6\vec{b}-2\vec{a}-2\vec{b} = \vec{a}+4\vec{b}$.

故答案为： $\vec{a}+4\vec{b}$.

【点评】此题考查了平面向量的加减运算. 此题难度不大，注意掌握运算法则是关键.

8. (4 分) 线段 $AB = 10$ ，点 P 是 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，则 $AP = \underline{(5\sqrt{5}-5)}$
(用根式表示).

【考点】S3：黄金分割.

【分析】根据黄金分割点的定义和 $AP > BP$ 得出 $AP = AB \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，再进行计算即可.

【解答】解： $\because$ 点 P 是 AB 的黄金分割点， $AP > BP$ ，

$$\therefore AP = AB \times \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$\because$ 线段 $AB = 10$ ，

$$\therefore AP = 10 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 5\sqrt{5} - 5;$$

故答案为： $5\sqrt{5} - 5$.

【点评】此题考查了黄金分割，关键是理解黄金分割点的概念，要熟记黄金比的值，计算时要注意 $AP > BP$ 的条件.

9. (4分) 如果抛物线 $y = (k+1)x^2 - 2x + 3$ 的开口向上，那么 k 的取值范围为 $k > -1$.

【考点】H3：二次函数的性质.

【分析】根据抛物线的开口向上列出关于 k 的不等式，求出 k 的取值范围即可.

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = (k+1)x^2 - 2x + 3$ 的开口向上，

$\therefore k+1 > 0$,

解得 $k > -1$.

故答案为： $k > -1$.

【点评】本题考查的是二次函数的性质，熟知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 中，当 $a > 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的开口向上是解答此题的关键.

10. (4分) 抛物线 $y = x^2 - 4x + 5$ 的对称轴是直线 $x = 2$.

【考点】H3：二次函数的性质.

【专题】31：数形结合.

【分析】首先把 $y = x^2 - 4x + 5$ 进行配方，然后就可以确定抛物线的对称轴，也可以利用公式 $x = -\frac{b}{2a}$ 确定.

【解答】解： $y = x^2 - 4x + 5$,

$= x^2 - 4x + 4 + 1$,

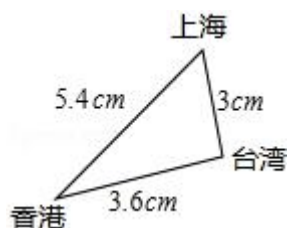
$= (x - 2)^2 + 1$,

$\therefore$ 对称轴是直线 $x = 2$.

故答案为： $x = 2$.

【点评】此题主要考查了二次函数的性质，解题的关键是会配方法或对称轴的公式 $x = -\frac{b}{2a}$.

11. (4分) 在中国地图册上，联结上海、香港、台湾三地构成一个三角形，用刻度尺测得它们之间的距离如图所示. 飞机从台湾直飞上海的距离约为 1290 千米，那么飞机从台湾绕道香港再到上海的空中飞行距离是 3870 千米.



【考点】S2：比例线段．

【分析】根据图中数据可以发现，飞机从台湾绕道香港再到上海的飞行的图上距离是飞机从台湾直飞上海的图上距离的 3 倍，根据题意列出比例式求解即可得出结果．

【解答】解：根据图上距离，发现：飞机从台湾绕道香港再到上海的飞行的图上距离是飞机从台湾直飞上海的图上距离的 3 倍，所以飞机从台湾绕道香港再到上海的飞行的实际距离设为 x （千米），则 $\frac{x}{5.4+3.6} = \frac{1290}{3}$ ，

解得 $x = 3870$ ．

故答案为：3870．

【点评】考查了比例线段，注意：图上距离的比 = 实际距离的比．

12.（4 分）在 $\triangle ABC$ 中，若中线 AD 和中线 CE 相交于 G ，且 $GC = 6$ ，那么 $EC = \underline{9}$ ．

【考点】K5：三角形的重心．

【分析】直接根据三角形重心的性质解答即可．

【解答】解：∵ 在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD 和中线 CE 相交于 G ，

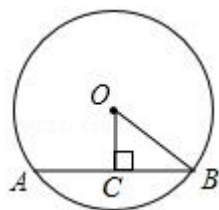
∴ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

∴ $GC = \frac{2}{3}EC = 6$ ，解得 $EC = 9$ ．

故答案为：9．

【点评】本题考查的是三角形的重心，熟知重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2：1 是解答此题的关键．

13.（4 分）如图，在 $\odot O$ 中， $OC \perp$ 弦 AB 于点 C ， $AB = 4$ ， $OC = 1$ ，则 OB 的长是 $\underline{\sqrt{5}}$ ．



【考点】KQ：勾股定理；M2：垂径定理．

【专题】11：计算题．

【分析】先根据垂径定理得到 $BC = AC = 2$ ，然后根据勾股定理可计算出 OB ．

【解答】解：∵ $OC \perp$ 弦 AB 于点 C ，

$$\therefore BC = AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中， $OC = 1$ ， $BC = 2$ ，

$$\therefore OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{5}.$$

故答案为 $\sqrt{5}$

【点评】本题考查了垂径定理：平分弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧．也考查了勾股定理．

14. (4 分) 正多边形的一个外角等于 20° ，则这个正多边形的边数是 18．

【考点】L3：多边形内角与外角．

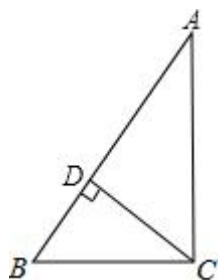
【分析】根据任何多边形的外角和都是 360 度，利用 360 除以外角的度数就可以求出外角和中外角的个数，即多边形的边数．

【解答】解：因为外角是 20 度， $360 \div 20 = 18$ ，则这个多边形是 18 边形．

故答案为：18

【点评】根据外角和的大小与多边形的边数无关，由外角和求正多边形的边数，是常见的题目，需要熟练掌握．

15. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为 D ，若 $AC = 2$ ， $AB = 3$ ，那么 $\cos \angle BCD$ 的值为 $\frac{2}{3}$ ．



【考点】T1：锐角三角函数的定义．

【分析】首先利用勾股定理计算出 BC 长，然后再利用直角三角形的面积公式计算出 CD 长，再用余弦定义可得答案．

【解答】解：∵ $AC = 2$ ， $AB = 3$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}AC \cdot BC,$$

$$\therefore 3CD = 2\sqrt{5},$$

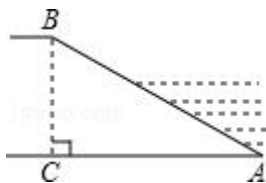
$$CD = \frac{2\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore \cos \angle BCD = \frac{DC}{BC} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3},$$

故答案为： $\frac{2}{3}$ ．

【点评】此题主要考查了锐角三角函数的定义，以及勾股定理的应用，关键是掌握余弦 = $\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$ ．

16. (4分) 河堤横截面如图所示，堤高 BC 为 4 米，迎水坡 AB 的坡比为 $1:\sqrt{3}$ ，那么 AB 的长为 8 米．



【考点】T9：解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题．

【分析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，根据坡面 AB 的坡比求得坡角的度数，然后解直角三角形即可．

【解答】解：∵ $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = 6$ 米，迎水坡 AB 的坡比为 $1:\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2BC = 2 \times 4 = 8,$$

故答案为：8．

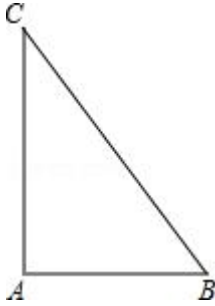
【点评】此题主要考查学生对坡度坡角的掌握及三角函数的运用能力，熟练运用勾股定理是解答本题的关键．

17. (4分) 根据三角形外心的概念, 我们可引入下一个新定义:

定义: 到三角形的两个顶点距离相等的点, 叫做此三角形的准外心.

根据准外心的定义, 探究如下问题: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $BC =$

10, $AB = 6$, 如果准外心 P 在 AC 边上, 那么 PA 的长为 4 或 $\frac{7}{4}$.



【考点】MA: 三角形的外接圆与外心.

【专题】23: 新定义.

【分析】根据勾股定理求出 AC 的值, 分三种情况进行讨论, 若 $PB = PC$, 连结 PB , 设 $PA = x$, 得出 $PB = PC = 8 - x$, 再根据勾股定理求出 PA 的值; 若 $PA = PC$, 得出 $PA = 4$; 若 $PA = PB$, 由图知, 不存在; 从而得出 PA 的长.

【解答】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\because \angle A = 90^\circ, BC = 10, AB = 6,$$

$$\therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

若 $PB = PC$, 连结 PB ,

设 $PA = x$, 则 $PB = PC = 8 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中,

$$\because PB^2 = AP^2 + AB^2,$$

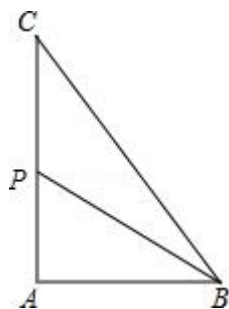
$$\therefore (8 - x)^2 = x^2 + 6^2,$$

$$\therefore x = \frac{7}{4}, \text{ 即 } PA = \frac{7}{4},$$

若 $PA = PC$, 则 $PA = 4$,

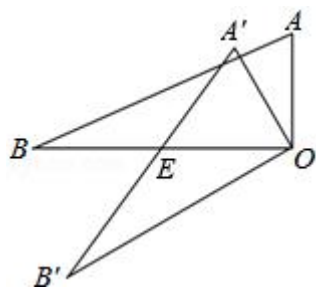
若 $PA = PB$, 由图知, 在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中, 不可能,

故 PA 的长为: 4 或 $\frac{7}{4}$.



【点评】 本题考查的是三角形的外接圆与外心，在解答此题时要注意进行分类讨论，不要漏解.

18. (4分) 如图， $\triangle AOB$ 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $AO = 3$ ， $BO = 6$ ， $\triangle AOB$ 绕顶点 O 逆时针旋转到 $\triangle A'OB'$ 处，此时线段 $A'B'$ 与 BO 的交点 E 为 BO 的中点，则线段 $B'E$ 的长度为 $\frac{9\sqrt{5}}{5}$.



【考点】 R2: 旋转的性质.

【专题】 16: 压轴题.

【分析】 利用勾股定理列式求出 AB ，根据旋转的性质可得 $AO = A'O$ ， $A'B' = AB$ ，再求出 OE ，从而得到 $OE = A'O$ ，过点 O 作 $OF \perp A'B'$ 于 F ，利用三角形的面积求出 OF ，利用勾股定理列式求出 EF ，再根据等腰三角形三线合一的性质可得 $A'E = 2EF$ ，然后根据 $B'E = A'B' - A'E$ 代入数据计算即可得解.

【解答】 解： $\because \angle AOB = 90^\circ$ ， $AO = 3$ ， $BO = 6$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

$\because \triangle AOB$ 绕顶点 O 逆时针旋转到 $\triangle A'OB'$ 处，

$$\therefore AO = A'O = 3, A'B' = AB = 3\sqrt{5},$$

$\because$ 点 E 为 BO 的中点，

$$\therefore OE = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore OE = A'O,$$

过点 O 作 $OF \perp A'B'$ 于 F ,

$$S_{\triangle A'OB'} = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \cdot OF = \frac{1}{2} \times 3 \times 6,$$

$$\text{解得 } OF = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

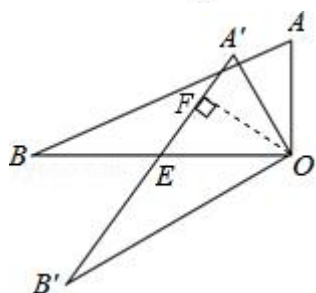
$$\text{在 Rt}\triangle EOF \text{ 中, } EF = \sqrt{OE^2 - OF^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\because OE = A'O, OF \perp A'B',$$

$$\therefore A'E = 2EF = 2 \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ (等腰三角形三线合一),}$$

$$\therefore B'E = A'B' - A'E = 3\sqrt{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$



【点评】 本题考查了旋转的性质，勾股定理的应用，等腰三角形三线合一的性质，以及三角形面积，熟练掌握旋转变换只改变图形的位置不改变图形的形状与大小是解题的关键．

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

$$19. (10 \text{ 分}) \text{ 计算: } \frac{\tan 60^\circ \cdot \cot 45^\circ}{2\cos 30^\circ} - \sin 60^\circ \cdot \cot 30^\circ$$

.

【考点】 T5: 特殊角的三角函数值．

【分析】 把特殊角的锐角三角函数值代入计算．

$$\text{【解答】 解: } \frac{\tan 60^\circ \cdot \cot 45^\circ}{2\cos 30^\circ} - \sin 60^\circ \cdot \cot 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times 1}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}$$

$$= 1 - \frac{3}{2}$$

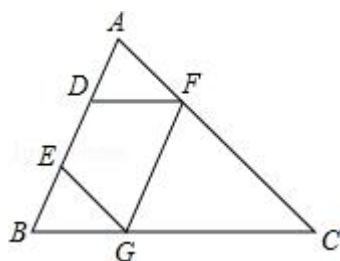
$$= -\frac{1}{2}.$$

【点评】此题考查了特殊角的锐角三角函数值的计算，要能够熟记各个数据.

20. (10分) 如图, D 、 E 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上的点, F 、 G 分别是边 AC 、 BC 上的点, 且满足 $AD = DE = EB$, $DF \parallel BC$, $EG \parallel AC$.

(1) 求证: $FG \parallel AB$;

(2) 设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, 请用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{GF}$.



【考点】LM: *平面向量.

【分析】(1) 由 $AD = DE = EB$, $DF \parallel BC$, $EG \parallel AC$, 根据平行线分线段成比例定理, 易得 $\frac{AF}{AC} = \frac{BG}{BC}$, 则可判定 $FG \parallel AB$;

(2) 由 $DF \parallel BC$, $FG \parallel AB$, 易得 $FG = \frac{2}{3}AB$, 又由 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, 即可求得答案.

【解答】(1) 证明: $\because AD = DE = EB$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{3},$$

$\because DF \parallel BC$, $EG \parallel AC$,

$$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}, \quad \frac{BG}{BC} = \frac{BE}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{BG}{BC},$$

$\therefore FG \parallel AB$;

(2) 解: $\because DF \parallel BC$, $FG \parallel AB$,

$$\therefore \frac{CF}{AC} = \frac{BD}{BA} = \frac{2}{3}, \quad \frac{FG}{AB} = \frac{CF}{AC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore FG = \frac{2}{3}AB,$$

$\because \overrightarrow{GF}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 同向,

$$\therefore \overrightarrow{GF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BA},$$

$$\because \overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b},$$

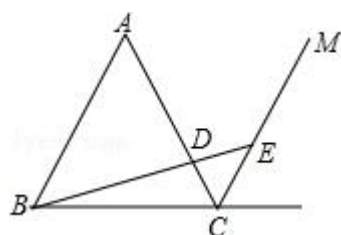
$$\therefore \overrightarrow{GF} = \frac{2}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}.$$

【点评】此题考查了平面向量的知识以及平行线分线段成比例定理. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

21. (10分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB = 6$, 点 D 在 AC 上, $AD = 2CD$, CM 是 $\angle ACB$ 的外角平分线, 连接 BD 并延长与 CM 交于点 E .

(1) 求 CE 的长;

(2) 求 $\angle EBC$ 的正切值.



【考点】KK: 等边三角形的性质; S4: 平行线分线段成比例; T7: 解直角三角形.

【分析】(1) 首先证明 $CE \parallel AB$, 则 $\triangle ABD \sim \triangle CED$, 根据相似三角形的对应边的比相等即可求解;

(2) 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H , 在直角 $\triangle CEH$ 中, 利用三角函数求得 CH 和 EH 的长度, 即可求得 BH 的大小, 即可求得三角函数值.

【解答】解: (1) 在 BC 延长线上取一点 F ,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ, AB = BC = 6, \angle ACF = 120^\circ,$$

$\because CM$ 是 $\angle ACB$ 的外角平分线,

$$\therefore \angle ECF = \frac{1}{2} \angle ACF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle ABC,$$

$$\therefore CE \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{CD}{AD},$$

又 $\because AD = 2CD, AB = 6,$

$$\therefore \frac{CE}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CE = 3.$$

(2) 过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H .

$\because \angle ECF = 60^\circ, \angle EHC = 90^\circ, CE = 3,$

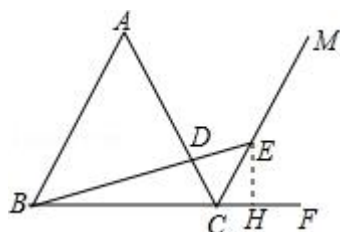
$$\therefore CH = 3, EH = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

又 $\because BC = 6,$

$$\therefore BH = BC + CH = \frac{15}{2},$$

$\because \angle EHB = 90^\circ,$

$$\therefore \tan \angle EBC = \frac{EH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质，以及三角函数值的求法，求三角函数值的问题常用的方法是转化为求直角三角形的边的问题.

22. (10分) 在数学活动课上，九年级(1)班数学兴趣小组的同学们测量校园内一棵大树(如图)的高度，设计的方案及测量数据如下：

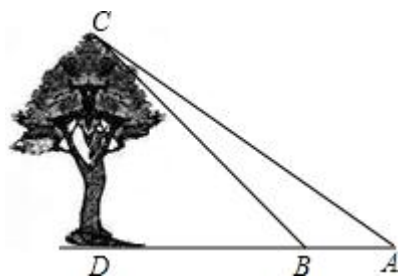
(1) 在大树前的平地上选择一点 A ，测得由点 A 看大树顶端 C 的仰角为 35° ；

(2) 在点 A 和大树之间选择一点 B (A, B, D 在同一直线上)，测得由点 B 看大树顶端 C 的仰角恰好为 45° ；

(3) 量出 A, B 两点间的距离为 4.5 米.

请你根据以上数据求出大树 CD 的高度.(精确到 0.1 米)(可能用到的参考数据：

$$\sin 35^\circ \approx 0.57, \cos 35^\circ \approx 0.82, \tan 35^\circ \approx 0.70)$$



【考点】TA：解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题.

【专题】16：压轴题；28：操作型.

【分析】首先分析图形：本题涉及到两个直角三角形 $\triangle DBC$ 、 $\triangle ADC$ ，应利用其公共边 CD 构造等量关系，借助 $AB = AD - DB = 4.5$ 构造方程关系式，进而可求出答案.

【解答】解：设 $CD = x$ 米；

$$\because \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\therefore DB = CD = x, AD = x + 4.5;$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } \tan \angle A = \frac{CD}{AD},$$

$$\therefore \tan 35^\circ = \frac{x}{x+4.5};$$

$$\text{解得: } x = 10.5;$$

所以大树的高为 10.5 米.

$$\text{解法 2: 在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } \tan \angle A = \frac{CD}{AD}, \therefore AD = \frac{CD}{\tan 35^\circ};$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \tan \angle CBD = \frac{CD}{BD}, \therefore BD = \frac{CD}{\tan 45^\circ};$$

$$\text{而 } AD - BD = 4.5,$$

$$\text{即 } \frac{CD}{\tan 35^\circ} - \frac{CD}{\tan 45^\circ} = 4.5,$$

$$\text{解得: } CD = 10.5;$$

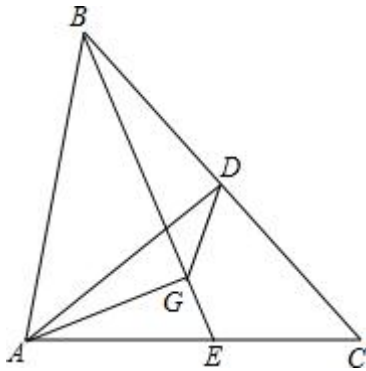
所以大树的高为 10.5 米.

【点评】本题考查俯角、仰角的定义，要求学生能借助俯角、仰角构造直角三角形，并结合图形利用三角函数解直角三角形.

23. (12 分) 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 BC 和 AC 边上，点 G 是 BE 边上一点，且 $\angle BAD = \angle BGD = \angle C$ ，联结 AG .

(1) 求证： $BD \cdot BC = BG \cdot BE$;

(2) 求证: $\angle BGA = \angle BAC$.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】14: 证明题.

【分析】(1) 由已知一对角相等, 以及一对公共角相等得到三角形 BDG 与三角形 BEC 相似, 由相似得比例即可得证;

(2) 由已知一对角相等, 以及一对公共角相等得到三角形 BDA 与三角形 ABC 相似, 由相似得比例, 结合第一问的结论, 得到三角形 GAB 与三角形 ABE 相似, 利用相似三角形对应角相等即可得证.

【解答】证明: (1) $\because \angle DBG = \angle EBC, \angle BGD = \angle C$,

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \frac{BD}{BE} = \frac{BG}{BC},$$

$$\text{则 } BD \cdot BC = BG \cdot BE;$$

$$(2) \because \angle DBA = \angle ABC, \angle BAD = \angle C,$$

$$\therefore \triangle DBA \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}, \text{ 即 } AB^2 = BD \cdot BC,$$

$$\because BD \cdot BC = BG \cdot BE,$$

$$\therefore AB^2 = BG \cdot BE, \text{ 即 } \frac{BG}{AB} = \frac{AB}{BE},$$

$$\because \angle GBA = \angle ABE,$$

$$\therefore \triangle GBA \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \angle BGA = \angle BAC.$$

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的判定与性

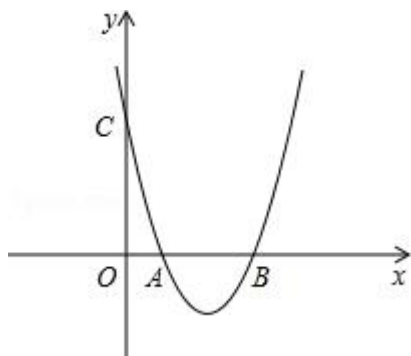
质是解本题的关键.

24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 点 B 的坐标为 $(3, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 顶点为 D .

(1) 求抛物线的解析式及顶点 D 的坐标;

(2) 联结 AC , BC , 求 $\angle ACB$ 的正切值;

(3) 点 P 抛物线的对称轴上一点, 当 $\triangle PBD$ 与 $\triangle CAB$ 相似时, 求点 P 的坐标.



【考点】HF: 二次函数综合题.

【分析】(1) 把点 B 与点 C 的坐标代入抛物线解析式, 利用待定系数法求解, 把解析式整理成顶点式即可写出顶点坐标;

(2) 首先得出 A 点坐标, 进而得出 $\angle OBC = 45^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$, 再过点 A 作 $AH \perp BC$, 垂足为 H , 利用 $\tan \angle ACB = \frac{AH}{CH}$ 求出即可;

(3) 先求出边 BD , BC 、 AB 的长度, 根据数据可得 $\angle B$ 与 $\angle D$ 都是 45° 角, 然后分 BD 与 AB 是对应边与 BD 与 BC 是对应边两种情况利用相似三角形对应边成比例列出比例式求出 DP 的长度, 从而点 P 的坐标便可求出.

【解答】解: (1) $\because$ 抛物线过点 $B(3, 0)$, 点 $C(0, 3)$,

$$\therefore \begin{cases} 3^2 + 3b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = -4 \\ c = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为: $y = x^2 - 4x + 3$,

又 $\because y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$,

$\therefore$ 顶点 D 的坐标是: $D(2, -1)$;

(2) $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 与 x 轴交于点 A 、 B 两点 (点 A 在 B 点的左侧),

$$\therefore A(1, 0),$$

又 $\because O(0, 0)$, $C(0, 3)$, $B(3, 0)$,

$$\therefore BO = CO = 3,$$

$$\therefore \angle COB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = 45^\circ, \quad BC = 3\sqrt{2},$$

过点 A 作 $AH \perp BC$, 垂足为 H ,

$$\therefore \angle AHB = 90^\circ,$$

$$\because AB = 2, \quad \therefore AH = BH = \sqrt{2},$$

$$\therefore CH = BC - BH = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AH}{CH} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2};$$

(3) 设对称轴与 x 轴相交于点 E , 则 $AE = 3 - 2 = 1$, $DE = |-1| = 1$,

$$\therefore BD = AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{2}, \quad \text{且 } \angle ADE = 45^\circ,$$

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3 - 1 = 2$,

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}, \quad \text{且 } \angle ABC = 45^\circ,$$

设点 P 的坐标是 $(2, y)$,

$\because \triangle BDP$ 与 $\triangle ABC$ 相似时,

$$\therefore \textcircled{1} \text{ 当 } BD \text{ 与 } AB \text{ 是对应边时, } \frac{DP}{BC} = \frac{BD}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{DP}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得 } DP = 3,$$

$$y - (-1) = 3,$$

$$\text{解得 } y = 2,$$

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(2, 2)$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } BD \text{ 与 } BC \text{ 是对应边时, } \frac{DP}{AB} = \frac{BD}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{DP}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}},$$

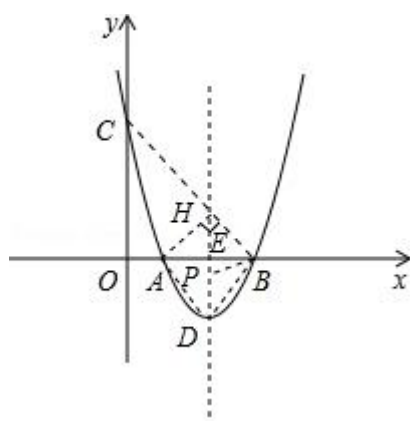
$$\text{解得 } DP = \frac{2}{3},$$

$$y - (-1) = \frac{2}{3},$$

$$\text{解得 } y = -\frac{1}{3},$$

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(2, -\frac{1}{3})$.

综上所述, 点 P 的坐标是 $(2, 2)$ 或 $(2, -\frac{1}{3})$.



【点评】 本题考查了二次函数综合题待定系数法求函数解析式, 顶点坐标, 三角形的面积, 相似三角形对应边成比例的性质, 综合性较强, (3) 中注意相似三角形的对应边不明确, 要分情况讨论求解, 避免漏解而导致出错.

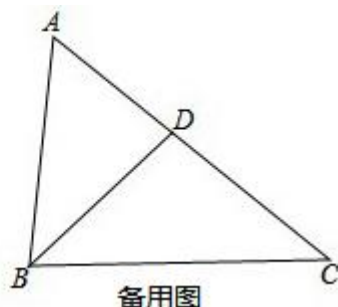
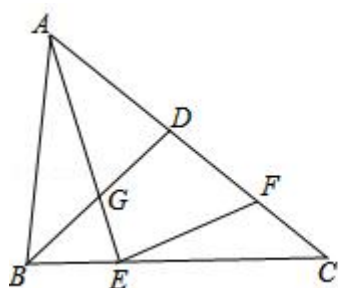
25. (14 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 8$, $BC = 10$, $\cos C = \frac{3}{4}$, $\angle ABC = 2\angle C$,

BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 边于点 D , 点 E 是 BC 边上的一个动点 (不与 B 、 C 重合), F 是 AC 边上一点, 且 $\angle AEF = \angle ABC$, AE 与 BD 相交于点 G .

(1) 求证: $\frac{AB}{CE} = \frac{BG}{CF}$;

(2) 设 $BE = x$, $CF = y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 当 $\triangle AEF$ 是以 AE 为腰的等腰三角形时, 求 BE 的长.



【考点】 A8: 解一元二次方程 - 因式分解法; K7: 三角形内角和定理; K8: 三角形的外角性质; KJ: 等腰三角形的判定与性质; S9: 相似三角形的判定与

性质；SO：相似形综合题；T1：锐角三角函数的定义．

【专题】16：压轴题．

【分析】（1）要证 $\frac{AB}{CE} = \frac{BG}{CF}$ ，只需证 $\triangle ABG \sim \triangle ECF$ ，只需证到 $\angle BAG = \angle CEF$ ，

$\angle ABG = \angle C$ ．由 $\angle ABC = 2\angle C$ ， BD 平分 $\angle ABC$ 可证到 $\angle ABG = \angle C$ ；由 $\angle AEF = \angle ABC$ 可证到 $\angle BAG = \angle CEF$ ，问题解决．

（2）作 FC 的垂直平分线交 BC 于点 M ，交 FC 于点 N ，易证 $\angle ABE = \angle FME$ ，从而可以证到 $\triangle ABE \sim \triangle EMF$ ，可得 $AB \cdot MF = BE \cdot EM$ ．只需用 x 、 y 表示出 FM 、 EM ，问题就得以解决．

（3）当 $\triangle AEF$ 是以 AE 为腰的等腰三角形时，可分 $AE = EF$ 和 $AE = AF$ 两种情况讨论．当 $AE = EF$ 时，由 $\triangle ABE \sim \triangle EMF$ 可得 $BE = MF$ ，从而可以得到 x 与 y 的等量关系，再结合（2）中的 y 与 x 的关系就可求出 x 的值；当 $AE = AF$ 时，易证 $FE = FC$ ，过点 F 作 $FH \perp BC$ ，垂足为 H ，则有 $HC = \frac{1}{2}EC$ ，结合 $\cos C = \frac{HC}{FC} = \frac{3}{4}$ ，就可得到 x 与 y 的等量关系，再结合（2）中的 y 与 x 的关系就可求出 x 的值．

【解答】（1）证明： $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle ABC = 2\angle ABD.$$

$$\because \angle ABC = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle C.$$

$$\because \angle BAE + \angle AEB + \angle ABE = 180^\circ,$$

$$\angle FEC + \angle AEB + \angle AEF = 180^\circ,$$

$$\angle AEF = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle FEC.$$

$$\because \angle BAG = \angle CEF, \angle ABG = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle ECF.$$

$$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{BG}{CF}.$$

（2）解：作 FC 的垂直平分线交 BC 于点 M ，交 FC 于点 N ，如图2，

$$\text{则有 } NC = FN = \frac{1}{2}FC = \frac{y}{2}.$$

在 $\text{Rt}\triangle MNC$ 中, $\cos C = \frac{NC}{MC} = \frac{3}{4}$, 则 $MC = \frac{2y}{3}$.

$\because MN$ 垂直平分 FC ,

$$\therefore MF = MC = \frac{2y}{3}.$$

$$\therefore \angle MFC = \angle C.$$

$$\therefore \angle FME = \angle MFC + \angle C = 2\angle C.$$

$$\because \angle ABC = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle FME.$$

$$\because \angle ABE = \angle FME, \quad \angle BAE = \angle FEM,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle EMF.$$

$$\therefore \frac{AB}{EM} = \frac{BE}{MF}.$$

$$\therefore AB \cdot MF = BE \cdot EM.$$

$$\because BE = x, \quad BC = 10, \quad MC = \frac{2y}{3},$$

$$\therefore EM = 10 - x - \frac{2y}{3}.$$

$$\text{又} \because AB = 8,$$

$$\therefore 8 \times \frac{2y}{3} = x \left(10 - x - \frac{2y}{3} \right).$$

$$\therefore y = \frac{30x - 3x^2}{2x + 16}. \quad (0 < x < 10)$$

(3) 解: ① $EA = EF$, 如图 3,

$$\because \triangle ABE \sim \triangle EMF \text{ (已证)},$$

$$\therefore \frac{BE}{MF} = \frac{AE}{EF}.$$

$$\because EA = EF,$$

$$\therefore BE = MF.$$

$$\because BE = x, \quad MF = \frac{2y}{3},$$

$$\therefore x = \frac{2y}{3}.$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x.$$

$$\therefore \frac{30x - 3x^2}{2x + 16} = \frac{3}{2}x.$$

整理得: $x^2+4x-5=0$.

则有 $(x+5)(x-1)=0$.

解得: $x_1=-5$ (舍), $x_2=1$.

② $AE=AF$,

过点 F 作 $FH \perp BC$, 垂足为 H , 如图 4,

$\because AE=AF$,

$\therefore \angle AEF = \angle AFE$.

$\because \angle AEF = \angle ABC$, $\angle ABC = 2\angle C$,

$\therefore \angle AFE = 2\angle C$.

$\because \angle AFE = \angle FEC + \angle C$,

$\therefore \angle FEC = \angle C$.

$\therefore FE = FC$.

$\because FH \perp EC$,

$\therefore EH = CH = \frac{1}{2}EC$.

$\because EC = 10 - x$,

$\therefore HC = \frac{10-x}{2}$.

在 $\text{Rt}\triangle FHC$ 中, $\cos C = \frac{HC}{FC} = \frac{3}{4}$.

$\therefore 4HC = 3FC$.

$\therefore 4 \times \frac{10-x}{2} = 3y$.

$\therefore y = \frac{20-2x}{3}$.

$\therefore \frac{30x-3x^2}{2x+16} = \frac{20-2x}{3}$.

整理得: $5x^2 - 82x + 320 = 0$.

则有 $(5x-32)(x-10)=0$.

$\therefore x_1=6.4$, $x_2=10$.

$\because 0 < x < 10$,

$\therefore x=6.4$.

综上所述: 当 $\triangle AEF$ 是以 AE 为腰的等腰三角形时, BE 的长为 1 或 6.4.

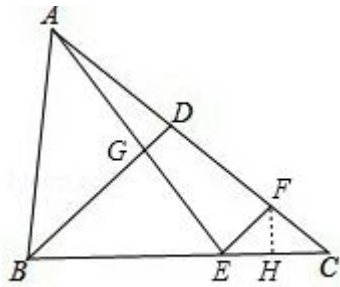


图4

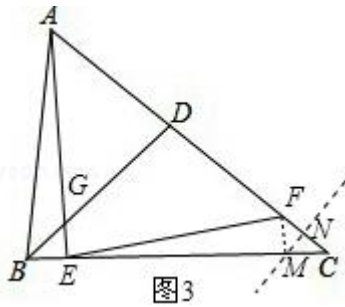


图3

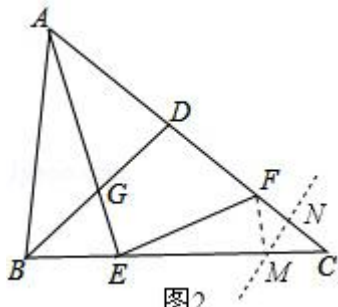


图2

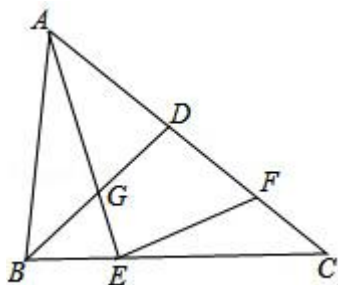


图1

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、用因式分解法解一元二次方程、锐角三角函数的定义、三角形内角和定理、三角形的外角性质、垂直平分线的性质等知识，综合性非常强．而作 FC 的垂直平分线交 BC 于点 M ，进而证到 $\triangle ABE \sim \triangle EMF$ 是解决第二小题和第三小题的关键．