

2014 年上海市学鼎教育中考数学一模试卷

一、单项选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1. (4 分) 下列四个函数中，一定是二次函数的是 ()

A. $y = -\frac{1}{x^2} + x$

B. $y = ax^2 + bx + c$

C. $y = x^2 - (x+7)^2$

D. $y = (x+1)(2x-1)$

2. (4 分) 下列说法中不正确的是 ()

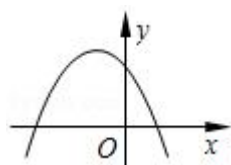
A. 如果 m, n 为实数，那么 $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

B. 如果 $k = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$ ，那么 $k\vec{a} = \vec{0}$

C. 长度为 1 的向量叫做单位向量

D. 如果 m 为实数，那么 $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

3. (4 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，那么 a, b, c 的符号为 ()



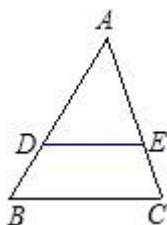
A. $a > 0, b > 0, c > 0$

B. $a < 0, b < 0, c < 0$

C. $a < 0, b > 0, c > 0$

D. $a < 0, b < 0, c > 0$

4. (4 分) 如图，能推得 $DE \parallel BC$ 的条件是 ()



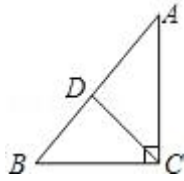
A. $AD:AB = DE:BC$

B. $AD:DB = DE:BC$

C. $AD:DB = AE:EC$

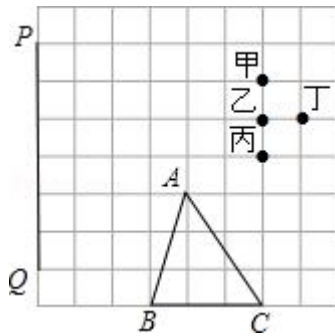
D. $AE:AC = AD:DB$

5. (4 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的中线，已知 $CD = 2$ ， $AC = 3$ ，则 $\sin B$ 的值是 ()



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

6. (4分) 如图, A 、 B 、 C 、 P 、 Q 、甲、乙、丙、丁都是方格纸中的格点, 如果 $\triangle RPQ \sim \triangle ABC$, 那么点 R 应是甲、乙、丙、丁四点中的 ()



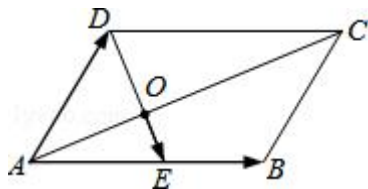
- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

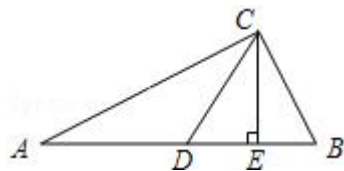
7. (4分) 已知抛物线的表达式是 $y = -2(x-1)^2$, 那么它的顶点坐标是_____.
8. (4分) 如果二次函数 $y = x^2 + 2ax + 3$ 的对称轴是直线 $x = 1$, 那么 a 的值是_____.
9. (4分) 在平面直角坐标系中, 如果把抛物线 $y = 3x^2 + 5$ 向右平移 4 个单位, 那么所得抛物线的表达式为_____.
10. (4分) 实际距离为 3000 米的两地, 在比例尺为 1: 100000 的地图上的距离为_____厘米.
11. (4分) 如果两个相似三角形的面积比为 1: 2, 那么它们的周长比为_____.
12. (4分) 已知点 M 是线段 AB 的黄金分割点 ($AM > MB$), 如果 $AM = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ cm}$, 那么 $AB = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$.
13. (4分) 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, AD 是中线, 如果 $AG = 6$, 那么 $AD = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. (4分) 已知一个二次函数的图象具有以下特征:
- (1) 经过原点;
 - (2) 在直线 $x = 1$ 左侧的部分, 图象下降, 在直线 $x = 1$ 右侧的部分, 图象上升.
- 试写出一个符合要求的二次函数解析式. _____.
15. (4分) 已知 A 、 B 是抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 上的两点 (A 在 B 的左侧), 且 AB

与 x 轴平行, $AB=4$, 则点 A 的坐标为_____.

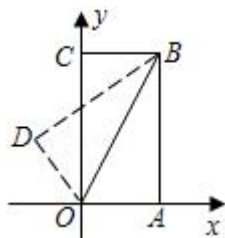
16. (4分) 如图, 已知平行四边形 $ABCD$, E 是边 AB 的中点, 联结 AC 、 DE 交于点 O . 记向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 则向量 $\overrightarrow{OE} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).



17. (4分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是边 AB 的中点, $CE \perp AB$, 垂足为点 E , 若 $\sin \angle DCE = \frac{3}{5}$, 则 $\cot A =$ _____.



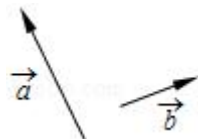
18. (4分) 如图, 平面直角坐标系中, 已知矩形 $OABC$, O 为原点, 点 A 、 C 分别在 x 轴、 y 轴上, 点 B 的坐标为 $(1, 2)$, 连接 OB , 将 $\triangle OAB$ 沿直线 OB 翻折, 点 A 落在点 D 的位置. 则点 D 的坐标为_____.



三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\frac{2}{\sqrt{2}+1} - (3.14 - \pi)^0 - 3\cos 45^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

20. (10分) 如图, 已知两个不平行的向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$. 先化简, 再求作: $2\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b})$. (不要求写作法, 但要指出图中表示结论的向量)

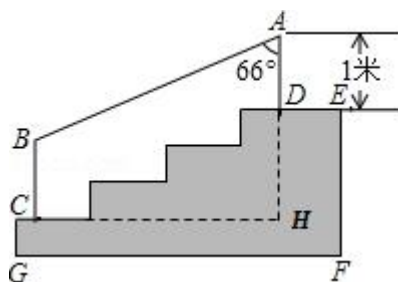


21. (10分) 已知一个二次函数的图象经过 $A(0, 1)$ 、 $B(1, 3)$ 、 $C(-1, 1)$ 三点, 求这个函数的解析式, 并用配方法求出图象的顶点坐标.

22. (10 分) 某学校体育场看台的侧面如图阴影部分所示, 看台有四级高度相等的小台阶, 每级小台阶都为 0.4 米. 现要做一个不锈钢的扶手 AB 及两根与 FG 垂直且长均为 l 米的不锈钢架杆 AD 和 BC (杆子的底端分别为 D , C), 且 $\angle DAB = 66^\circ$.

(1) 求点 D 与点 C 的高度差 DH 的长度;

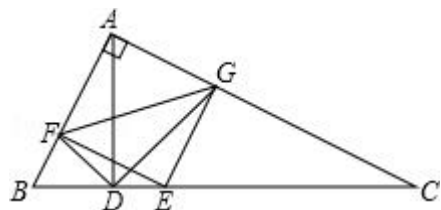
(2) 求所用不锈钢材料的总长度 l (即 $AD+AB+BC$, 结果精确到 0.1 米). (参考数据: $\sin 66^\circ \approx 0.91$, $\cos 66^\circ \approx 0.41$, $\tan 66^\circ \approx 2.25$, $\cot 66^\circ \approx 0.45$)



23. (12分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是 BC 边上的高, 点 E 在线段 DC 上, $EG \perp AC$, 垂足分别为 F, G .

求证: (1) $\frac{EG}{AD} = \frac{CG}{CD}$;

(2) $FD \perp DG$.

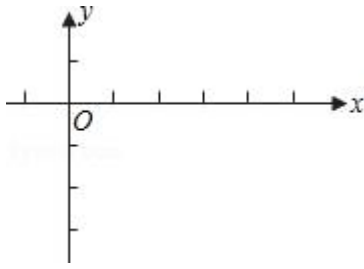


24. (12分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -2)$, 直线 $x = m$ ($m > 2$) 与 x 轴交于点 D .

(1) 求二次函数的解析式;

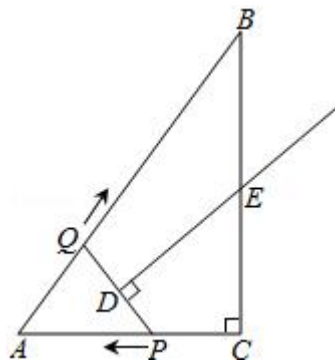
(2) 在直线 $x=m$ ($m>2$) 上有一点 E (点 E 在第四象限), 使得 E 、 D 、 B 为顶点的三角形与以 A 、 O 、 C 为顶点的三角形相似, 求 E 点坐标 (用含 m 的代数式表示);

(3) 在(2)成立的条件下, 抛物线上是否存在一点 F , 使得四边形 $ABEF$ 为平行四边形? 若存在, 请求出 m 的值及四边形 $ABEF$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.



25. (14分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$. 点 P 从点 C 出发沿 CA 以每秒 1 个单位长的速度向点 A 匀速运动, 到达点 A 后立刻以原来的速度沿 AC 返回; 点 Q 从点 A 出发沿 AB 以每秒 1 个单位长的速度向点 B 匀速运动. 伴随着 P 、 Q 的运动, DE 保持垂直平分 PQ , 且交 PQ 于点 D , 交折线 $QB - BC - CP$ 于点 E . 点 P 、 Q 同时出发, 当点 Q 到达点 B 时停止运动, 点 P 也随之停止. 设点 P 、 Q 运动的时间是 t 秒 ($t > 0$).

- (1) 当 $t = 2$ 时, $AP =$ _____, 点 Q 到 AC 的距离是 _____;
- (2) 在点 P 从 C 向 A 运动的过程中, 求 $\triangle APQ$ 的面积 S 与 t 的函数关系式; (不必写出 t 的取值范围)
- (3) 在点 E 从 B 向 C 运动的过程中, 四边形 $QBED$ 能否成为直角梯形? 若能, 求 t 的值; 若不能, 请说明理由;
- (4) 当 DE 经过点 C 时, 请直接写出 t 的值.



2014 年上海市学鼎教育中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、单项选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) [下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1. (4 分) 下列四个函数中, 一定是二次函数的是 ()

A. $y = -\frac{1}{x^2} + x$

B. $y = ax^2 + bx + c$

C. $y = x^2 - (x+7)^2$

D. $y = (x+1)(2x-1)$

【考点】H1: 二次函数的定义.

【专题】17: 推理填空题.

【分析】根据二次函数的定义解答.

【解答】解: A、未知数的最高次数不是 2, 故本选项错误;

B、二次项系数 $a = 0$ 时, $y = ax^2 + bx + c$ 不是二次函数, 故本选项错误;

C、 $\because y = x^2 - (x+7)^2 = -14x - 49$, 即 $y = -14x - 49$, 没有二次项, 故本选项错误;

D、由原方程得, $y = 2x^2 - x - 1$, 符合二次函数的定义, 故本选项正确.

故选: D.

【点评】本题主要考查了二次函数的定义. 二次函数是指未知数的最高次数为二次的多项式函数. 二次函数可以表示为 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

2. (4 分) 下列说法中不正确的是 ()

A. 如果 m, n 为实数, 那么 $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

B. 如果 $k = 0$ 或 $\vec{a} = \vec{0}$, 那么 $k\vec{a} = \vec{0}$

C. 长度为 1 的向量叫做单位向量

D. 如果 m 为实数, 那么 $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

【考点】LM: *平面向量.

【分析】由平面向量的性质, 即可得 A 与 D 正确, 又由长度为 1 的向量叫做单位向量, 可得 C 正确, 注意向量是有方向性的, 所以 B 错误.

【解答】解：A、 $\because m、n$ 为实数， $\therefore (m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$ ，故本选项正确；

B、 $\because$ 如果 $k=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$ ，那么 $k\vec{a}=\vec{0}$ ，故本选项错误；

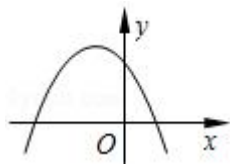
C、长度为 1 的向量叫做单位向量，故本选项正确；

D、 $\because$ 如果 m 为实数，那么 $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$ ，故本选项正确．

故选：B．

【点评】此题考查了平面向量的性质．题目比较简单，注意向量是有方向性的，掌握平面向量的性质是解此题的关键．

3. (4 分) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，那么 a, b, c 的符号为 ()



A. $a > 0, b > 0, c > 0$

B. $a < 0, b < 0, c < 0$

C. $a < 0, b > 0, c > 0$

D. $a < 0, b < 0, c > 0$

【考点】H4：二次函数图象与系数的关系．

【专题】17：推理填空题．

【分析】根据二次函数图象开口向下确定出 a 为负数，根据对称轴结合 a 为负数确定出 b 的正负情况，根据二次函数图象与 y 轴的交点即可确定出 c 的正负情况，从而最后得解．

【解答】解： $\because$ 二次函数图象开口向下，

$\therefore a < 0$ ，

$\because$ 对称轴 $x = -\frac{b}{2a} < 0$ ，

$\therefore b < 0$ ，

$\because$ 二次函数图象与 y 轴的正半轴相交，

$\therefore c > 0$ ，

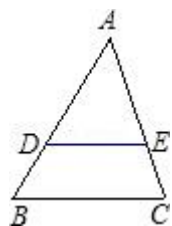
$\therefore a < 0, b < 0, c > 0$ ．

故选：D．

【点评】本题考查了二次函数图象与系数的关系，熟练掌握二次函数图象的开口

方向、对称轴、与 y 轴的交点与系数的关系是解题的关键.

4. (4 分) 如图, 能推得 $DE \parallel BC$ 的条件是 ()



A. $AD: AB = DE: BC$

B. $AD: DB = DE: BC$

C. $AD: DB = AE: EC$

D. $AE: AC = AD: DB$

【考点】S4: 平行线分线段成比例.

【专题】14: 证明题.

【分析】平行于三角形一边的直线截其他两边或延长线, 所得的对应线段成比例. 如果一条直线截三角形的两边 (或两边的延长线) 所得的对应线段成比例, 那么这条直线平行于三角形的第三边.

【解答】解: 设 $DE \parallel BC$,

那么 $AD: AB = AE: AC$, $AD: DB = AE: EC$, $DB: AB = EC: AC$,

选项 A、B、D、不符合平行线分段成比例定理.

如果一条直线截三角形的两边 (或两边的延长线) 所得的对应线段成比例, 那么这条直线平行于三角形的第三边.

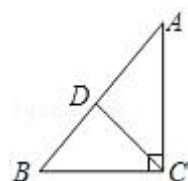
$$\because AD: DB = AE: EC,$$

$$\therefore DE \parallel BC.$$

故选: C.

【点评】此题主要考查学生对平行线分线段成比例的理解和掌握, 解答此题的关键的是明确哪些对应线段成比例. 学生初学, 容易出错.

5. (4 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的中线, 已知 $CD = 2$, $AC = 3$, 则 $\sin B$ 的值是 ()



A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

【考点】KP：直角三角形斜边上的中线；T1：锐角三角函数的定义．

【专题】11：计算题．

【分析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的中线，已知 $CD=2$ ，则斜边 $AB=2CD=4$ ，则即可求得 $\sin B$ 的值．

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的中线， $CD=2$ ，

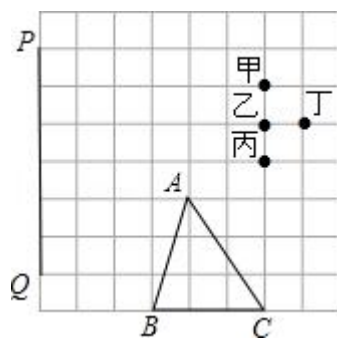
$$\therefore AB=2CD=4.$$

$$\therefore \sin B = \frac{3}{4}.$$

故选：C．

【点评】本题主要运用了直角三角形的性质（斜边上的中线等于斜边的一半），并考查了正弦函数的定义．

6.（4分）如图， A 、 B 、 C 、 P 、 Q 、甲、乙、丙、丁都是方格纸中的格点，如果 $\triangle RPQ \sim \triangle ABC$ ，那么点 R 应是甲、乙、丙、丁四点中的（ ）



A. 甲

B. 乙

C. 丙

D. 丁

【考点】S7：相似三角形的性质．

【专题】24：网格型．

【分析】根据相似三角形的对应高的比等于相似比，代入数值即可求得结果．

【解答】解： $\because \triangle RPQ \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{\triangle RPQ \text{的高}}{\triangle ABC \text{的高}} = \frac{PQ}{BC},$$
$$\text{即 } \frac{\triangle RPQ \text{的高}}{3} = \frac{6}{3},$$

$$\therefore \triangle RPQ \text{的高为 } 6.$$

故点 R 应是甲、乙、丙、丁四点中的乙处．

故选：B．

【点评】此题考查了相似三角形的性质：相似三角形的对应高的比等于相似比．解

题的关键是数形结合思想的应用.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 已知抛物线的表达式是 $y = -2(x-1)^2$, 那么它的顶点坐标是 (1, 0).

【考点】H3: 二次函数的性质.

【分析】抛物线的表达式已经是顶点式的形式, 直接写出顶点坐标即可.

【解答】解: $\because$ 抛物线的表达式是 $y = -2(x-1)^2$,

$\therefore$ 它的顶点坐标是 (1, 0),

故答案为 (1, 0).

【点评】本题主要考查二次函数的性质的知识点, 此题比较简单.

8. (4 分) 如果二次函数 $y = x^2 + 2ax + 3$ 的对称轴是直线 $x = 1$, 那么 a 的值是 -1.

【考点】H3: 二次函数的性质.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标公式 ($-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}$) 求对称轴, 即可求出 a 的值.

【解答】解: $\because y = -x^2 + 2ax + 3$

$$= -(x^2 + 2ax + a^2) + a^2 + 3$$

$$= -(x+a)^2 + a^2 + 3,$$

由于对称轴是直线 $x = -1$,

$$\therefore a = -1,$$

故答案为 -1.

【点评】本题主要考查二次函数的性质, 解此题的关键是对二次函数的性质的理解和掌握, 知对称轴.

9. (4 分) 在平面直角坐标系中, 如果把抛物线 $y = 3x^2 + 5$ 向右平移 4 个单位, 那么所得抛物线的表达式为 $y = 3(x-4)^2 + 5$.

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】易得原抛物线的顶点及平移后新抛物线的顶点, 利用顶点式根据平移不改变二次项系数可得新抛物线解析式.

【解答】解：∵抛物线 $y = 3x^2 + 5$ 的顶点为 $(0, 5)$,

∴向右平移 4 个单位得到的顶点为 $(4, 5)$,

∴把抛物线 $y = 3x^2 + 5$ 向右平移 4 个单位,

那么所得抛物线的表达式为 $y = 3(x - 4)^2 + 5$.

故答案为 $y = 3(x - 4)^2 + 5$

【点评】考查二次函数的平移情况;用到的知识点为:二次函数的平移不改变二次项的系数;关键是根据左右平移只改变二次函数的顶点的横坐标得到新抛物线的顶点.

10. (4 分) 实际距离为 3000 米的两地, 在比例尺为 1: 100000 的地图上的距离为 3 厘米.

【考点】S2: 比例线段.

【专题】12: 应用题.

【分析】根据比例尺 = 图上距离: 实际距离, 依题意由实际距离乘以比例尺即可得出图上距离.

【解答】解: 根据比例尺 = 图上距离: 实际距离.

3000 米 = 300000 厘米得,

A, B 两地的图上距离为 $300000 \div 100000 = 3cm$.

故答案为: 3.

【点评】本题考查了比例线段, 能够根据比例尺正确进行计算, 注意单位的统一.

11. (4 分) 如果两个相似三角形的面积比为 1: 2, 那么它们的周长比为 $1: \sqrt{2}$.

【考点】S7: 相似三角形的性质.

【分析】由两个相似三角形的面积比是 1: 2, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方, 即可求得它们的相似比, 又由相似三角形周长的比等于相似比, 即可求得它们的周长比.

【解答】解: ∵两个相似三角形的面积比是 1: 2,

∴这两个相似三角形的相似比是 $1: \sqrt{2}$,

∴它们的周长比是 $1: \sqrt{2}$.

故答案为: $1: \sqrt{2}$.

【点评】此题考查了相似三角形的性质. 此题比较简单, 解题的关键是掌握相似

三角形的面积比等于相似比的平方与相似三角形周长的比等于相似比性质的应用.

12. (4分) 已知点 M 是线段 AB 的黄金分割点 ($AM > MB$), 如果 $AM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}cm$,

那么 $AB = \underline{1}cm$.

【考点】S3: 黄金分割.

【专题】34: 方程思想.

【分析】根据黄金分割点的定义, 知 AM 是较长线段; 则 $AM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$, 代入数据求解即可.

【解答】解: 由于 M 是线段 AB 的黄金分割点,

且 AM 为较长线段,

$$\text{则 } AM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB,$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB,$$

则 $AB = 1$.

故答案为: 1.

【点评】本题考查了黄金分割点的概念. 熟记黄金比的值列方程进行计算.

13. (4分) 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, AD 是中线, 如果 $AG = 6$, 那么 $AD = \underline{9}$.

【考点】K5: 三角形的重心.

【专题】11: 计算题.

【分析】根据 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 利用重心的性质求出 GD , 然后再将 $AG+GD$ 即可求出 AD .

【解答】解: $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心, AD 是中线, $AG = 6$,

$$\therefore GD = 3,$$

$$\therefore AD = AG + GD = 9.$$

故答案为: 9.

【点评】此题主要考查三角形重心的性质这一知识点, 比较简单, 要求同学们应熟练掌握.

14. (4分) 已知一个二次函数的图象具有以下特征:

(1) 经过原点;

(2) 在直线 $x = 1$ 左侧的部分, 图象下降, 在直线 $x = 1$ 右侧的部分, 图象上升. 试写出一个符合要求的二次函数解析式. $y = x^2 - 2x$.

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【专题】 26: 开放型.

【分析】 由于二次函数在直线 $x = 1$ 左侧的部分, 图象下降, 在直线 $x = 1$ 右侧的部分, 图象上升, 根据二次函数的性质得到抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 且开口向上,

加上抛物线过原点, 则二次函数解析式可为 $y = x^2 - 2x$.

【解答】 解: $\because$ 二次函数在直线 $x = 1$ 左侧的部分, 图象下降, 在直线 $x = 1$ 右侧的部分, 图象上升,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 且开口向上,

$\therefore$ 抛物线过原点,

$\therefore$ 满足条件的二次函数解析式可为 $y = x(x - 2) = x^2 - 2x$.

故答案为 $y = x^2 - 2x$.

【点评】 本题考查了二次函数的性质: 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$, 对称轴直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象具有如下性质: ①当 $a > 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的开口向上, $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小; $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大; $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 取得最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$, 即顶点是抛物线的最低点. ②当 $a < 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的开口向下, $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小; $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大; $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 取得最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$, 即顶点是抛物线的最高点.

15. (4分) 已知 A 、 B 是抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 上的两点 (A 在 B 的左侧), 且 AB 与 x 轴平行, $AB = 4$, 则点 A 的坐标为 $(-3, 2)$.

【考点】 A7: 解一元二次方程 - 公式法; H5: 二次函数图象上点的坐标特征; HF: 二次函数综合题.

【专题】 11: 计算题.

【分析】先求出已知抛物线的对称轴和抛物线与 X 轴的交点 C 、 D 的坐标，利用 CD 和 AB 的大小判断出 A 、 B 在 X 轴的上方，根据抛物线的对称性确定出 A 点的横坐标，代入解析式即可求出 A 的纵坐标，代入即可。

【解答】解： $y = x^2 + 2x - 1$ ，

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times 1} = -1,$$

对称轴是直线 $x = -1$ ，

当 $y = 0$ 时， $x^2 + 2x - 1 = 0$ ，

解得： $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ ， $x_2 = -1 - \sqrt{2}$ ，

$$x_1 - x_2 = 2\sqrt{2},$$

$\because a = 1$ ，开口向上，

设抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 于 x 轴交于 C 、 D ，

则 $CD = 2\sqrt{2} < 4$ ，

$\therefore$ 点 A 、 B 在 x 轴的上方，且关于抛物线的对称轴对称，

设 AB 交对称轴于 M ，则 $AM = BM = 2$ ，

$\because$ 已知 A 在 B 的左侧，

$\therefore A$ 点的横坐标是： -3 ，

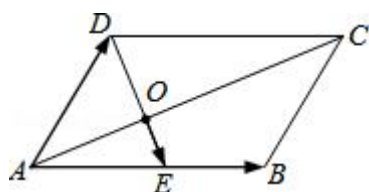
把 $x = -3$ 代入抛物线 $y = x^2 + 2x - 1$ 得： $y = 2$ ，

所以点 A 的坐标是 $(-3, 2)$ 。

故答案为： $(-3, 2)$ 。

【点评】本题主要考查了二次函数的性质，一元二次方程的解法等知识，利用抛物线的对称性正确求出 A 的横坐标是解此题的关键，注意应先确定点 AB 的位置。

16. (4 分) 如图，已知平行四边形 $ABCD$ ， E 是边 AB 的中点，联结 AC 、 DE 交于点 O 。记向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，则向量 $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)。



【考点】LM：*平面向量。

【分析】根据平行四边形法则，求出向量 $\overrightarrow{DE}$ 的表达式，再根据相似三角形的性质即可求出 $\overrightarrow{OE}$ 的表达式.

【解答】解： $\because \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$,

E 是边 AB 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}.$$

$\because \triangle DOC \sim \triangle EOA$,

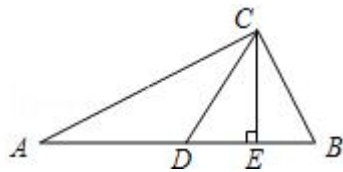
$$\therefore \frac{OE}{OD} = \frac{AE}{DC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}.$$

故答案为： $\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

【点评】此题结合平行四边形的性质考查了平面向量的相关概念，利用三角形法则和相似三角形的性质是解题的关键.

17. (4 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是边 AB 的中点， $CE \perp AB$ ，垂足为点 E ，若 $\sin \angle DCE = \frac{3}{5}$ ，则 $\cot A = \underline{2}$.



【考点】T7：解直角三角形.

【专题】11：计算题.

【分析】设 $DE = 3x$ ，又知， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是边 AB 的中点，故可知 $AD = DC$ ，根据勾股定理求出 AC 和 BC 的长，最后根据三角函数的定义求出 $\cot A$.

【解答】解：设 $DE = 3x$ ，

$\because CE \perp AB$ ，

$\therefore$ 三角形 CDE 为直角三角形，

$\therefore CE = 4x$ ， $CD = 5x$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， D 是边 AB 的中点，

$\therefore AD = DC = 5x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中， $AC = 4\sqrt{6}x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中, $BC = 2\sqrt{6}x$,

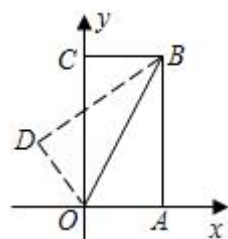
利用三角函数值的定义,

$$\cot A = \frac{AC}{BC} = 2,$$

故答案为 2.

【点评】 本题主要考查解直角三角形的知识点, 要熟练掌握好边角之间的关系.

18. (4 分) 如图, 平面直角坐标系中, 已知矩形 $OABC$, O 为原点, 点 A 、 C 分别在 x 轴、 y 轴上, 点 B 的坐标为 $(1, 2)$, 连接 OB , 将 $\triangle OAB$ 沿直线 OB 翻折, 点 A 落在点 D 的位置. 则点 D 的坐标为 $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.



【考点】 D5: 坐标与图形性质; PB: 翻折变换 (折叠问题).

【专题】 46: 几何变换.

【分析】 根据翻折不变性及勾股定理求出 GD 、 CG 的长, 再根据相似三角形的性质, 求出 DF 的长, 进而求出 D 点坐标.

【解答】 解: 作 $DF \perp y$ 轴于 F , $DE \perp x$ 轴于 E ,

$\because$ 在 $\triangle BCG$ 与 $\triangle ODG$ 中,

$$\begin{cases} \angle BCG = \angle ODF \\ OD = BC \\ \angle DOF = \angle GBC \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCG \cong \triangle ODG$,

$\therefore GO = GB$,

$\therefore$ 设 $GO = GB = x$,

则 $CG = GD = 2 - x$,

于是在 $\text{Rt}\triangle CGB$ 中, $(2 - x)^2 + 1^2 = x^2$;

解得 $x = \frac{5}{4}$.

$$GD = 2 - x = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4};$$

$\because BC \perp y$ 轴, $DF \perp y$ 轴,

$$\therefore \angle BCG = \angle DFG,$$

$$\because \angle BGC = \angle DGF,$$

$$\therefore \triangle CBG \sim \triangle FDG,$$

$$\therefore \frac{DF}{1} = \frac{DG}{BG},$$

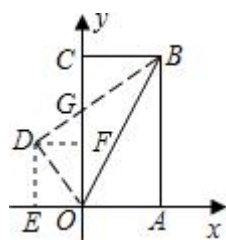
$$\therefore DF = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5};$$

$$\text{又} \because DO = 1,$$

$$\therefore OF = \sqrt{1^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

$$\text{故答案为: } \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$



【点评】此题将翻折变换与相似三角形和勾股定理相结合，考查了三角形与矩形的性质，有一定难度，是一道好题.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

$$19. (10 \text{ 分}) \text{ 计算: } \frac{2}{\sqrt{2}+1} - (3.14 - \pi)^0 - 3\cos 45^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

【考点】2F：分数指数幂；6E：零指数幂；79：二次根式的混合运算；T5：特殊角的三角函数值.

【专题】11：计算题.

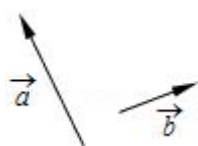
【分析】根据零指数幂、负整数指数幂以及特殊角的三角函数值得到原式 $= 2(\sqrt{2} - 1) - 1 - 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$ ，然后进行乘法运算后合并即可.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= 2(\sqrt{2} - 1) - 1 - 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} - 2 - 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} - 3.$$

【点评】 本题考查了二次根式的混合运算：先把各二次根式化为最简二次根式，在进行二次根式的乘除运算，然后合并同类二次根式．也考查了零指数幂、负整数指数幂以及特殊角的三角函数值．

20. (10 分) 如图，已知两个不平行的向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ．先化简，再求作： $2(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - \frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b})$ ．(不要求写作法，但要指出图中表示结论的向量)



【考点】 LM：*平面向量．

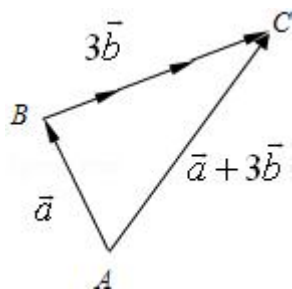
【专题】 13：作图题．

【分析】 首先将原式化简，再根据向量的意义画图即可．

【解答】 解：原式 $= 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} + 2\vec{b} = \vec{a} + 3\vec{b}$ ．

$$\therefore \vec{AC} = \vec{a} + 3\vec{b}.$$

$\therefore \vec{AC}$ 为所求向量



【点评】 此题考查了向量的计算与向量的意义．此题培养了学生的动手能力，要注意分析．

21. (10 分) 已知一个二次函数的图象经过 $A(0, 1)$ 、 $B(1, 3)$ 、 $C(-1, 1)$ 三点，求这个函数的解析式，并用配方法求出图象的顶点坐标．

【考点】 H3：二次函数的性质；H8：待定系数法求二次函数解析式．

【专题】 11：计算题．

【分析】 设所求的二次函数解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，将 $A(0, 1)$ 、 $B(1, 3)$ 、 $C(-1, 1)$ 代入，求 a 、 b 、 c 的值，再用配方法求出顶点式，从而得出顶点

坐标.

【解答】解：(1) 设所求的二次函数解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

由这个函数的图象过 $A(0, 1)$, 可知 $c = 1$. (1 分)

再由这个函数的图象过点 $B(1, 3)$ 、 $C(-1, 1)$, 得

$$\therefore \begin{cases} 3=a+b+1 \\ 1=a-b+1. \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=1. \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

所以这个二次函数的解析式为： $y = x^2 + x + 1$. (1 分)

(2) $y = x^2 + x + 1$ $y = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. (2分)

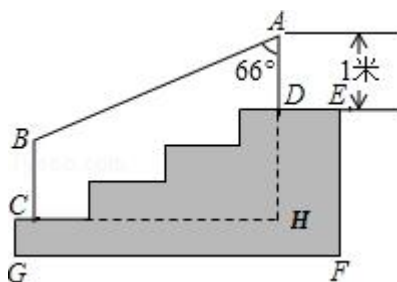
∴ 这个二次函数的顶点坐标为 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. (2 分)

【点评】 本题考查了二次函数的性质何用待定系数法求二次函数的解析式.

22. (10分) 某学校体育场看台的侧面如图阴影部分所示, 看台有四级高度相等的小台阶, 每级小台阶都为 0.4 米. 现要做一个不锈钢的扶手 AB 及两根与 FG 垂直且长均为 l 米的不锈钢架杆 AD 和 BC (杆子的底端分别为 D , C), 且 $\angle DAB = 66^\circ$.

(1) 求点 D 与点 C 的高度差 DH 的长度;

(2) 求所用不锈钢材料的总长度 l (即 $AD+AB+BC$, 结果精确到 0.1 米). (参考数据: $\sin 66^\circ \approx 0.91$, $\cos 66^\circ \approx 0.41$, $\tan 66^\circ \approx 2.25$, $\cot 66^\circ \approx 0.45$)



【考点】 T8: 解直角三角形的应用.

【专题】 12: 应用题.

【分析】 (1) 通过图观察可知 DH 高度包含 3 层台阶, 因而 $DH = \text{每级小台阶高度} \times \text{小台阶层数}$.

(2) 首先过点 B 作 $BM \perp AH$, 垂足为 M . 求得 AM 的长, 在 $\text{Rt}\triangle AMB$ 中,

根据余弦函数 $\cos A = \frac{AM}{AB}$ 即可求得 AB 的长, 那么根据不锈钢材料的总长度 $l =$

$AD+AB+BC$, 求得所用不锈钢材料的长.

【解答】 解：(1) $DH = 0.4 \times 3 = 1.2$ (米). (2分)

(2) 过点 B 作 $BM \perp AH$, 垂足为 M . (1 分)

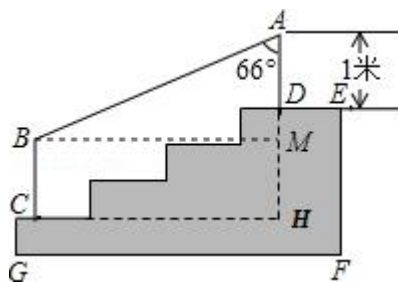
由题意得: $MH = BC = AD = 1$, $\angle A = 66^\circ$.

$$\therefore AM = AH - MH = 1 + 1.2 - 1 = 1.2. \quad (2 \text{ 分})$$

在 $\text{Rt}\triangle AMB$ 中,

$$\therefore \cos A = \frac{AM}{AB}, \quad (1 \text{ 分})$$
$$\therefore AB = \frac{AM}{\cos 66^\circ} \approx \frac{1.2}{0.41} = 2.92 \text{ (米)}. \quad (2 \text{ 分})$$
$$\therefore l = AD + AB + BC \approx 1 + 2.92 + 1 \approx 4.9 \text{ (米)}. \quad (1 \text{ 分})$$

答:点 D 与点 C 的高度差 DH 为 1.2 米;所用不锈钢材料的总长度约为 4.9 米.(1 分)

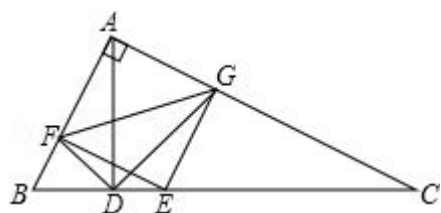


【点评】 此题考查了三角函数的基本概念，主要是在解题过程中作辅助线 BM ，利用余弦概念及运算，从而把实际问题转化为数学问题加以解决。

23. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是 BC 边上的高, 点 E 在线段 DC 上, $EG \perp AC$, 垂足分别为 F, G .

求证: (1) $\frac{EG}{AD} = \frac{CG}{CD}$;

(2) $FD \perp DG$.



【考点】 J3: 垂线; KN: 直角三角形的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】14：证明题.

【分析】(1) 小题利用两角对应相等证明 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EGC$ 相似即可；

(2) 小题先证四边形 $AFEG$ 是矩形，证出 $AF = EG$ ，进而证出两边成比例($\frac{AF}{CG} = \frac{AD}{CD}$)且夹角相等，推出 $\triangle AFD$ 和 $\triangle CGD$ 相似，证出 $\angle FDG = 90^\circ$ ，即可求出答案.

【解答】(1) 证明：在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EGC$ 中，

$\because AD$ 是 BC 边上的高， $EF \perp AB$ ， $EG \perp AC$ ，

$\therefore \angle ADC = \angle EGC = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle C$ 为公共角，

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle EGC$ ，

$$\therefore \frac{EG}{AD} = \frac{CG}{CD}.$$

(2) 证明：在四边形 $AFEG$ 中，

$\because \angle FAG = \angle AFE = \angle AGE = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFEG$ 为矩形，

$\therefore AF = EG$.

由(1)知 $\frac{EG}{AD} = \frac{CG}{CD}$ ，

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{CG}{CD},$$

$$\therefore \frac{AF}{CG} = \frac{AD}{CD},$$

$\because \triangle ABC$ 为直角三角形， $AD \perp BC$ ，

$\therefore \angle FAD = \angle C$ ，

$\therefore \triangle AFD \sim \triangle CGD$ ，

又 $\angle CDG + \angle ADG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ADF + \angle ADG = 90^\circ$ ，

即 $\angle FDG = 90^\circ$ ，

$\therefore FD \perp DG$.

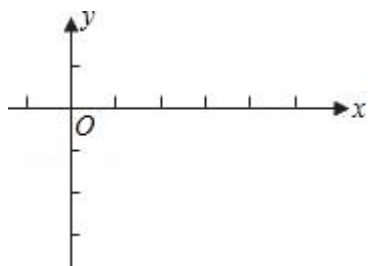
【点评】解此题的关键是检查对相似三角形的性质和判定的理解和掌握，难点是找出证明两三角形相似的条件，进而由相似推出新的结论．题型较好，难度适中．

24. (12分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -2)$, 直线 $x = m$ ($m > 2$) 与 x 轴交于点 D .

(1) 求二次函数的解析式;

(2) 在直线 $x = m$ ($m > 2$) 上有一点 E (点 E 在第四象限), 使得 E 、 D 、 B 为顶点的三角形与以 A 、 O 、 C 为顶点的三角形相似, 求 E 点坐标 (用含 m 的代数式表示);

(3) 在 (2) 成立的条件下, 抛物线上是否存在一点 F , 使得四边形 $ABEF$ 为平行四边形? 若存在, 请求出 m 的值及四边形 $ABEF$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.



【考点】HF: 二次函数综合题.

【专题】16: 压轴题; 26: 开放型; 32: 分类讨论.

【分析】(1) 已知函数的图象经过 A , B , C 三点, 把三点的坐标代入解析式就可以得到一个三元一次方程组, 就可以求出函数的解析式;

(2) E 、 D 、 B 为顶点的三角形与以 A 、 O 、 C 为顶点的三角形相似, 这两个三角形都是直角三角形, 因而应分 $\triangle AOC \sim \triangle EDB$ 和 $\triangle AOC \sim \triangle BDE$ 两种情况讨论. $\triangle AOC$ 的三边已知, $\triangle BDE$ 中, $BD = m - 2$, 而 $DE = -m$. 根据相似三角形的对应边的比相等, 就可以求出 m 的值;

(3) 四边形 $ABEF$ 是平行四边形, 因而 $EF = AB$, 且这两个点的纵坐标相同, E 点的纵坐标是 m , 把 $x = m$ 代入抛物线的解析式就可以求出点 F 的横坐标, 则 EF 的长就可以求出. 根据 $EF = AB$ 就可以得到一个关于 m 的方程, 解方程就可以求出 m 的值. 若 m 的值存在, 就可以求出四边形的面积.

【解答】解：（1）根据题意，得
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ c=-2 \end{cases}$$

解得 $a = -1$, $b = 3$, $c = -2$.

$$\therefore y = -x^2 + 3x - 2.$$

（2）当 $\triangle EDB \sim \triangle AOC$ 时，

$$\text{得 } \frac{AO}{ED} = \frac{CO}{BD} \text{ 或 } \frac{AO}{BD} = \frac{CO}{ED},$$

$$\because AO = 1, CO = 2, BD = m - 2,$$

$$\text{当 } \frac{AO}{ED} = \frac{CO}{BD} \text{ 时, 得 } \frac{1}{ED} = \frac{2}{m-2},$$

$$\therefore ED = \frac{m-2}{2},$$

$\because$ 点 E 在第四象限，

$$\therefore E_1 \left(m, \frac{2-m}{2} \right).$$

$$\text{当 } \frac{AO}{BD} = \frac{CO}{ED} \text{ 时, 得 } \frac{1}{m-2} = \frac{2}{ED},$$

$$\therefore ED = 2m - 4,$$

$\because$ 点 E 在第四象限，

$$\therefore E_2 (m, 4 - 2m).$$

（3）假设抛物线上存在一点 F ，使得四边形 $ABEF$ 为平行四边形，则 $EF = AB = 1$ ，点 F 的横坐标为 $m - 1$ ，

$$\text{当点 } E_1 \text{ 的坐标为 } \left(m, \frac{2-m}{2} \right) \text{ 时, 点 } F_1 \text{ 的坐标为 } \left(m - 1, \frac{2-m}{2} \right),$$

$\because$ 点 F_1 在抛物线的图象上，

$$\therefore \frac{2-m}{2} = -(m-1)^2 + 3(m-1) - 2,$$

$$\therefore 2m^2 - 11m + 14 = 0,$$

$$\therefore (2m - 7)(m - 2) = 0,$$

$$\therefore m = \frac{7}{2}, m = 2 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore F_1 \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4} \right),$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形} ABEF} = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

当点 E_2 的坐标为 $(m, 4 - 2m)$ 时, 点 F_2 的坐标为 $(m - 1, 4 - 2m)$,

$\because$ 点 F_2 在抛物线的图象上,

$$\therefore 4 - 2m = - (m - 1)^2 + 3(m - 1) - 2,$$

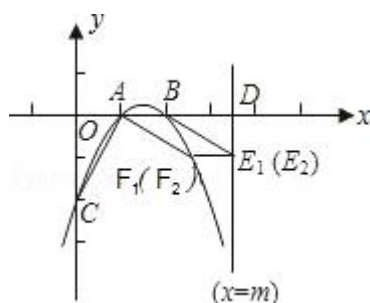
$$\therefore m^2 - 7m + 10 = 0,$$

$$\therefore (m - 2)(m - 5) = 0,$$

$$\therefore m = 2 \text{ (舍去)}, m = 5,$$

$$\therefore F_2(4, -6),$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形} ABEF} = 1 \times 6 = 6.$$



【点评】 本题主要考查了待定系数法求函数的解析式, 以及平行四边形的判定方法, 是一个存在性问题, 在中考中经常出现.

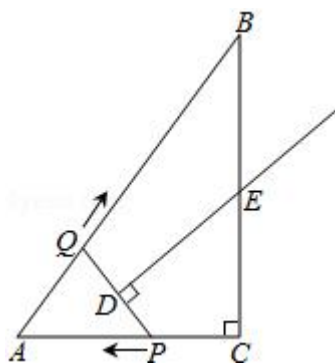
25. (14 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$. 点 P 从点 C 出发沿 CA 以每秒 1 个单位长的速度向点 A 匀速运动, 到达点 A 后立刻以原来的速度沿 AC 返回; 点 Q 从点 A 出发沿 AB 以每秒 1 个单位长的速度向点 B 匀速运动. 伴随着 P 、 Q 的运动, DE 保持垂直平分 PQ , 且交 PQ 于点 D , 交折线 $QB - BC - CP$ 于点 E . 点 P 、 Q 同时出发, 当点 Q 到达点 B 时停止运动, 点 P 也随之停止. 设点 P 、 Q 运动的时间是 t 秒 ($t > 0$).

(1) 当 $t = 2$ 时, $AP = \underline{1}$, 点 Q 到 AC 的距离是 $\underline{\frac{8}{5}}$;

(2) 在点 P 从 C 向 A 运动的过程中, 求 $\triangle APQ$ 的面积 S 与 t 的函数关系式; (不必写出 t 的取值范围)

(3) 在点 E 从 B 向 C 运动的过程中, 四边形 $QBED$ 能否成为直角梯形? 若能, 求 t 的值; 若不能, 请说明理由;

(4) 当 DE 经过点 C 时, 请直接写出 t 的值.



【考点】HF：二次函数综合题；KH：等腰三角形的性质；KU：勾股定理的应用；S9：相似三角形的判定与性质.

【专题】16：压轴题.

【分析】(1) 先求 PC ，再求 AP ，然后求 AQ ，再由三角形相似求 Q 到 AC 的距离；

(2) 作 $QF \perp AC$ 于点 F ，先求 BC ，再用 t 表示 QF ，然后得出 S 的函数解析式；

(3) 当 $DE \parallel QB$ 时，得四边形 $QBED$ 是直角梯形，由 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ ，由线段的对应比例关系求得 t ，由 $PQ \parallel BC$ ，四边形 $QBED$ 是直角梯形， $\triangle AQP \sim \triangle ABC$ ，由线段的对应比例关系求 t ；

(4) ①第一种情况点 P 由 C 向 A 运动， DE 经过点 C 、连接 QC ，作 $QG \perp BC$ 于点 G ，由 $PC^2 = QC^2$ 解得 t ；

②第二种情况，点 P 由 A 向 C 运动， DE 经过点 C ，由图列出相互关系，求解 t .

【解答】解：(1) 做 $QF \perp AC$ ，

$\because AC = 3$ ，点 P 从点 C 出发沿 CA 以每秒 1 个单位长的速度向点 A 匀速运动，

$\therefore$ 当 $t = 2$ 时， $AP = 3 - 2 = 1$ ；

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $AB = 5$.

$\therefore BC = 4$ ，

$\because QF \perp AC$ ， $BC \perp AC$ ，

$\therefore QF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle ACB \sim \triangle AFQ$ ，

$$\therefore \frac{AQ}{AB} = \frac{QF}{BC},$$

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{QF}{4},$$

解得： $QF = \frac{8}{5}$;

故答案为： $1, \frac{8}{5}$;

(2) 作 $QF \perp AC$ 于点 F ,

如图 1, $AQ = CP = t$,

$$\therefore AP = 3 - t.$$

由 $\triangle AQF \sim \triangle ABC$,

$$\text{得 } \frac{QF}{4} = \frac{t}{5}.$$

$$\therefore QF = \frac{4}{5}t.$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} (3 - t) \cdot \frac{4}{5}t,$$

$$\text{即 } S = -\frac{2}{5}t^2 + \frac{6}{5}t;$$

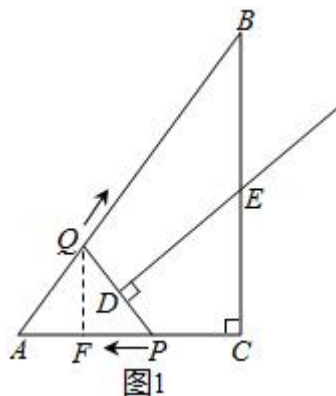


图1

(3) 能.

①当由 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, $DE \parallel QB$ 时, 如图 2.

$$\because DE \perp PQ,$$

$\therefore PQ \perp QB$, 四边形 $QBED$ 是直角梯形,

此时 $\angle AQP = 90^\circ$.

由 $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, 得 $\frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB}$,

$$\text{即 } \frac{t}{3} = \frac{3-t}{5}.$$

$$\text{解得 } t = \frac{9}{8};$$

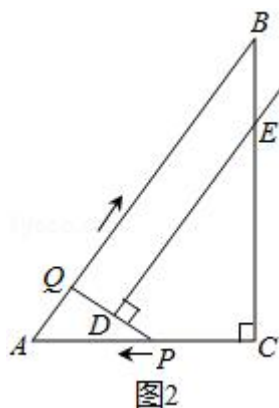


图2

②如图 3，当 $PQ \parallel BC$ 时， $DE \perp BC$ ，四边形 $QBED$ 是直角梯形．

此时 $\angle APQ = 90^\circ$ ．

由 $\triangle AQP \sim \triangle ABC$ ，得 $\frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{AC}$ ，

$$\text{即 } \frac{t}{5} = \frac{3-t}{3}.$$

$$\text{解得 } t = \frac{15}{8},$$

综上：在点 E 从 B 向 C 运动的过程中，当 $t = \frac{15}{8}$ 或 $\frac{9}{8}$ 时，四边形 $QBED$ 能成为直角梯形；

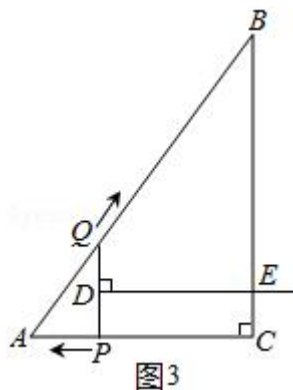


图3

$$(4) \quad t = \frac{5}{2} \text{ 或 } t = \frac{45}{14}.$$

①点 P 由 C 向 A 运动， DE 经过点 C ．

连接 QC ，作 $QG \perp BC$ 于点 G ，如图 4．

$$\because \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = \frac{QG}{BQ},$$

$$\therefore QG = \frac{3}{5} (5 - t),$$

$$\text{同理 } BG = \frac{4}{5} (5 - t),$$

$$\therefore CG = 4 - \frac{4}{5}(5 - t),$$

$$\therefore PC = t, \quad QC^2 = QG^2 + CG^2 = \left[\frac{3}{5}(5 - t)\right]^2 + \left[4 - \frac{4}{5}(5 - t)\right]^2.$$

$\because CD$ 是 PQ 的中垂线,

$$\therefore PC = QC$$

则 $PC^2 = QC^2$,

$$\text{得 } t^2 = \left[\frac{3}{5}(5 - t)\right]^2 + \left[4 - \frac{4}{5}(5 - t)\right]^2,$$

$$\text{解得 } t = \frac{5}{2};$$

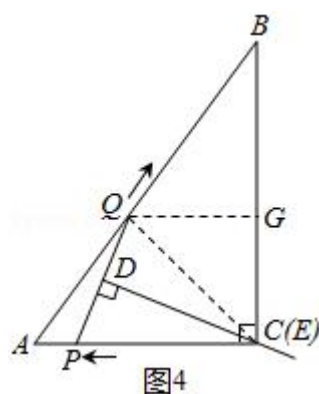


图4

②点 P 由 A 向 C 运动, DE 经过点 C , 如图 5.

$PC = 6 - t$, 可知由 $PC^2 = QC^2$ 可知,

$$QC^2 = QG^2 + CG^2$$

$$(6 - t)^2 = \left[\frac{3}{5}(5 - t)\right]^2 + \left[4 - \frac{4}{5}(5 - t)\right]^2,$$

$$\text{即 } t = \frac{45}{14}.$$

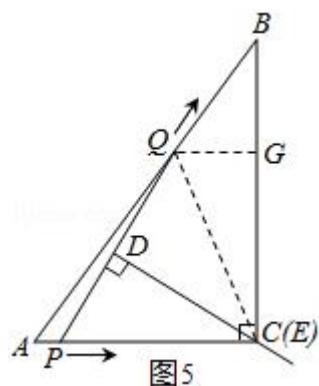


图5

【点评】 本题考查了相似三角形的判定定理, 线段比的有关知识, 利用二次函数的相关知识以及实际应用相结合, 同时考生要注意巧妙利用辅助线的帮助解

答，难度较大.