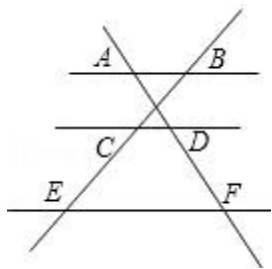


2009 年上海市中考数学试卷

一、选择题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

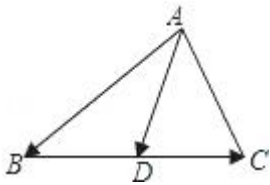
1. (2009•上海) 抛物线 $y=2(x+m)^2+n$ (m, n 是常数) 的顶点坐标是 ()
A. (m, n) B. $(-m, n)$ C. $(m, -n)$ D. $(-m, -n)$
2. (2009•上海) 下列正多边形中, 中心角等于内角的是 ()
A. 正六边形 B. 正五边形 C. 正四边形 D. 正三角形
3. (2009•上海) 如图, 已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, 那么下列结论正确的是 ()



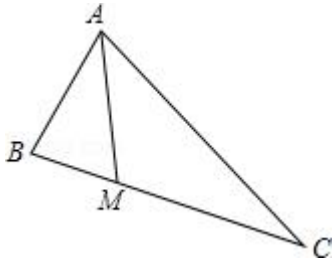
- A. $\frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CE}$ B. $\frac{BC}{CE} = \frac{DF}{AD}$ C. $\frac{CD}{EF} = \frac{BC}{BE}$ D. $\frac{CE}{EF} = \frac{AD}{AF}$
4. 计算 $(a^3)^2$ 的结果是 ()
A. a^5 B. a^6 C. a^8 D. a^{-1}
5. (2009•上海) 不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 < 1 \end{cases}$ 的解集是 ()
A. $x > -1$ B. $x < 3$ C. $-1 < x < 3$ D. $-3 < x < 1$
6. (2009•上海) 用换元法解分式方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{x-1} + 1 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x-1}{x} = y$, 将原方程化为关于 y 的整式方程, 那么这个整式方程是 ()
A. $y^2 + y - 3 = 0$ B. $y^2 - 3y + 1 = 0$ C. $3y^2 - y + 1 = 0$ D. $3y^2 - y - 1 = 0$

二、填空题 (共 12 小题, 每小题 4 分, 满分 48 分)

7. (2009•上海) 某商品的原价为 100 元, 如果经过两次降价, 且每次降价的百分率都是 m , 那么该商品现在的价格是_____元 (结果用含 m 的代数式表示).
8. (2009•上海) 如果从小明等 6 名学生中任选 1 名作为“世博会”志愿者, 那么小明被选中的概率是_____.
9. (2009•上海) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 上的中线, 设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 如果用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$, 那么 $\overrightarrow{AD} =$ _____.



10. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=3$ ， M 为 BC 上的点，连接 AM ，如果将 $\triangle ABM$ 沿直线 AM 翻折后，点 B 恰好落在边 AC 的中点处，求点 M 到 AC 的距离。



11. (2009•上海) 在圆 O 中，弦 AB 的长为 6，它所对应的弦心距为 4，那么半径 $OA=$ _____.

12. (2009•上海) 将抛物线 $y=x^2-2$ 向上平移一个单位后，得以新的抛物线，那么新的抛物线的表达式是_____.

13. (2009•上海) 方程 $\sqrt{x-1}=1$ 的根是 $x=$ _____.

14. (2009•上海) 分母有理化: $\frac{1}{\sqrt{5}}=$ _____.

15. (2009•上海) 如果关于 x 的方程 $x^2-x+k=0$ (k 为常数) 有两个相等的实数根，那么 $k=$ _____.

16. 反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 图象的两分支分别在第_____象限.

17. (2009•上海) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ ，那么 $f(3)=$ _____.

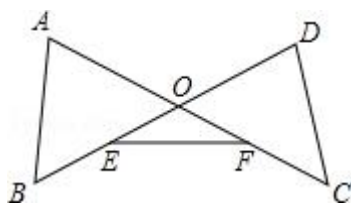
18. (2009•上海) 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 互相平分，交点为 O 。在不添加任何辅助线的前提下，要使四边形 $ABCD$ 成为矩形，还需添加一个条件，这个条件可以是_____.

三、解答题 (共 7 小题，满分 78 分)

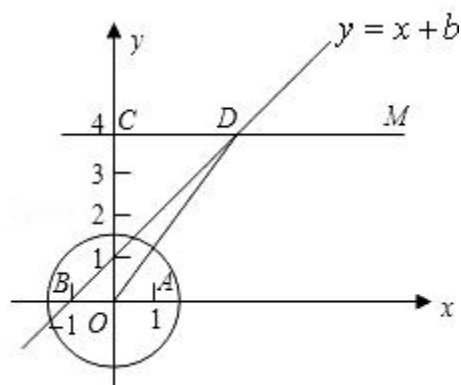
19. (2009•上海) 已知线段 AC 与 BD 相交于点 O ，连接 AB 、 DC ， E 为 OB 的中点， F 为 OC 的中点，连接 EF (如图所示).

(1) 添加条件 $\angle A=\angle D$ ， $\angle OEF=\angle OFE$ ，求证: $AB=DC$.

(2) 分别将“ $\angle A=\angle D$ ”记为①，“ $\angle OEF=\angle OFE$ ”记为②，“ $AB=DC$ ”记为③，添加条件①、③，以②为结论构成命题 1，添加条件②、③，以①为结论构成命题 2. 命题 1 是_____命题，命题 2 是_____命题 (选择“真”或“假”填入空格).



20. (2009•上海) 在直角坐标平面内, O 为原点, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, 4)$, 直线 $CM \parallel x$ 轴 (如图所示). 点 B 与点 A 关于原点对称, 直线 $y=x+b$ (b 为常数) 经过点 B , 且与直线 CM 相交于点 D , 连接 OD .
- (1) 求 b 的值和点 D 的坐标;
 - (2) 设点 P 在 x 轴的正半轴上, 若 $\triangle POD$ 是等腰三角形, 求点 P 的坐标;
 - (3) 在 (2) 的条件下, 如果以 PD 为半径的圆 P 与圆 O 外切, 求圆 O 的半径.



21. (2009•上海) 已知 $\angle ABC=90^\circ$, $AB=2$, $BC=3$, $AD \parallel BC$, P 为线段 BD 上的动点, 点 Q 在射线 AB 上, 且满足 $\frac{PQ}{PC} = \frac{AD}{AB}$ (如图 1 所示).

(1) 当 $AD=2$, 且点 Q 与点 B 重合时 (如图 2 所示), 求线段 PC 的长;

(2) 在图 1 中, 连接 AP . 当 $AD=\frac{3}{2}$, 且点 Q 在线段 AB 上时, 设点 B 、 Q 之间的距离为 x , $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle PBC}}=y$, 其中 $S_{\triangle APQ}$

表示 $\triangle APQ$ 的面积, $S_{\triangle PBC}$ 表示 $\triangle PBC$ 的面积, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出函数定义域;

(3) 当 $AD < AB$, 且点 Q 在线段 AB 的延长线上时 (如图 3 所示), 求 $\angle QPC$ 的大小.

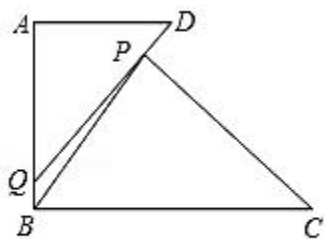


图 1

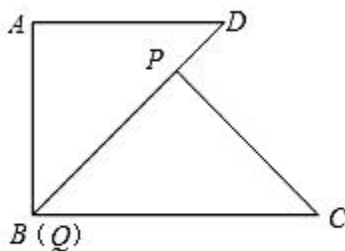


图 2

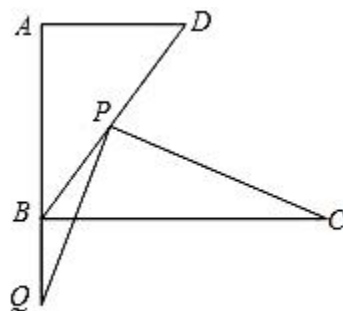


图 3

22. (2009•上海) 为了了解某校初中男生的身体素质状况, 在该校六年级至九年级共四个年级的男生中, 分别抽取部分学生进行“引体向上”测试. 所有被测试者的“引体向上”次数情况如表一所示; 各年级的被测试人数占所有被测试人数的百分率如图所示 (其中六年级相关数据未标出).

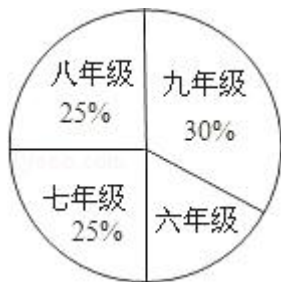
次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人数	1	1	2	2	3	4	2	2	2	0	1

根据上述信息, 回答下列问题 (直接写出结果):

- (1) 六年级的被测试人数占所有被测试人数的百分率是_____;
- (2) 在所有被测试者中, 九年级的人数是_____;

(3) 在所有被测试者中, “引体向上”次数不小于 6 的人数所占的百分率是_____;

(4) 在所有被测试者的“引体向上”次数中, 众数是_____.



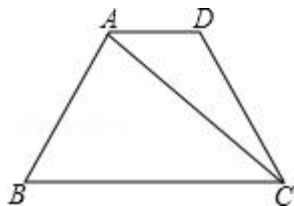
23. (2009•上海) 计算: $\frac{2a+2}{a-1} \div (a+1) - \frac{a^2-1}{a^2-2a+1}$

24. (2009•上海) 解方程组:
$$\begin{cases} y-x=1 & \text{①} \\ 2x^2-xy-2=0 & \text{②} \end{cases}$$

25. (2009•上海) 如图, 在梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $AB=DC=8$, $\angle B=60^\circ$, $BC=12$, 连接 AC.

(1) 求 $\tan \angle ACB$ 的值;

(2) 若 M、N 分别是 AB、DC 的中点, 连接 MN, 求线段 MN 的长.



2009 年上海市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1. (2009•上海) 抛物线 $y=2(x+m)^2+n$ (m, n 是常数) 的顶点坐标是 ()

- A. (m, n) B. $(-m, n)$ C. $(m, -n)$ D. $(-m, -n)$

考点: 二次函数的性质.

专题: 配方法.

分析: 本题比较容易, 考查根据二次函数解析式确定抛物线的顶点坐标.

解答: 解: 因为抛物线 $y=2(x+m)^2+n$ 是顶点式, 根据顶点式的坐标特点, 它的顶点坐标是 $(-m, n)$.

故选 B.

点评: 抛物线的顶点式定义的应用.

2. (2009•上海) 下列正多边形中, 中心角等于内角的是 ()

- A. 正六边形 B. 正五边形 C. 正四边形 D. 正三角形

考点: 多边形内角与外角.

分析: 正 n 边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 则它的内角是等于 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$, n 边形的中心角等于 $\frac{360^\circ}{n}$,

根据中心角等于内角就可以得到一个关于 n 的方程, 解方程就可以解得 n 的值.

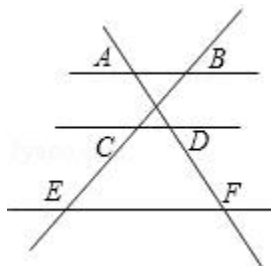
解答: 解: 根据题意, 得 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{n}$,

解得: $n=4$, 即这个多边形是正四边形.

故选 C.

点评: 本题比较容易, 考查正多边形的中心角和内角和的知识, 也可以对每个结果分别进行验证.

3. (2009•上海) 如图, 已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, 那么下列结论正确的是 ()



- A. $\frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CE}$ B. $\frac{BC}{CE} = \frac{DF}{AD}$ C. $\frac{CD}{EF} = \frac{BC}{BE}$ D. $\frac{CE}{EF} = \frac{AD}{AF}$

考点: 平行线分线段成比例.

分析: 已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, 根据平行线分线段成比例定理, 对各项进行分析即可.

解答: 解: $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CE}.$$

故选 A.

点评: 本题考查平行线分线段成比例定理, 找准对应关系, 避免错选其他答案.

4. 计算 $(a^3)^2$ 的结果是 ()

- A. a^5 B. a^6 C. a^8 D. a^{-1}

考点: 幂的乘方与积的乘方.

分析：根据幂的乘方 $(a^m)^n = a^{mn}$ ，即可求解.

解答：解：原式 $= a^{3 \times 2} = a^6$.

故选 B.

点评：本题主要考查了幂的乘方法则，正确理解法则是解题关键.

5. (2009•上海) 不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 < 1 \end{cases}$ 的解集是 ()

- A. $x > -1$ B. $x < 3$ C. $-1 < x < 3$ D. $-3 < x < 1$

考点：解一元一次不等式组.

分析：本题比较容易，考查不等式组的解法.

解答：解：解不等式①，得 $x > -1$ ，解不等式②，得 $x < 3$ ，所以不等式组的解集为 $-1 < x < 3$ ，故选 C.

点评：本题考查一元一次不等式组的解法，属于基础题. 求不等式组的解集，要遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，小大大小中间找，大大小小解不了.

6. (2009•上海) 用换元法解分式方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{x-1} + 1 = 0$ 时，如果设 $\frac{x-1}{x} = y$ ，将原方程化为关于 y 的整式方程，那么这个整式方程是 ()

- A. $y^2 + y - 3 = 0$ B. $y^2 - 3y + 1 = 0$ C. $3y^2 - y + 1 = 0$ D. $3y^2 - y - 1 = 0$

考点：换元法解分式方程.

专题：换元法.

分析：换元法即是整体思想的考查，解题的关键是找到这个整体，此题的整体是 $\frac{x-1}{x}$ ，设 $\frac{x-1}{x} = y$ ，换元后整理即可求得.

解答：解：把 $\frac{x-1}{x} = y$ 代入方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{x-1} + 1 = 0$ ，得： $y - \frac{3}{y} + 1 = 0$.

方程两边同乘以 y 得： $y^2 + y - 3 = 0$. 故选 A.

点评：用换元法解分式方程时常用方法之一，它能够把一些分式方程化繁为简，化难为易，对此应注意总结能用换元法解的分式方程的特点，寻找解题技巧.

二、填空题 (共 12 小题，每小题 4 分，满分 48 分)

7. (2009•上海) 某商品的原价为 100 元，如果经过两次降价，且每次降价的百分率都是 m，那么该商品现在的价格是 $100(1-m)^2$ 元 (结果用含 m 的代数式表示).

考点：列代数式.

分析：现在的价格 = 第一次降价后的价格 $\times$ (1 - 降价的百分率).

解答：解：第一次降价后价格为 $100(1-m)$ ，第二次降价是在第一次降价后完成的，所以应为 $100(1-m)(1-m)$ ，即 $100(1-m)^2$.

点评：本题难度中等，考查根据实际问题情景列代数式. 根据降低率问题的一般公式可得：某商品的原价为 100 元，如果经过两次降价，且每次降价的百分率都是 m，那么该商品现在的价格是 $100(1-m)^2$.

8. (2009•上海) 如果从小明等 6 名学生中任选 1 名作为“世博会”志愿者，那么小明被选中的概率是 $\frac{1}{6}$.

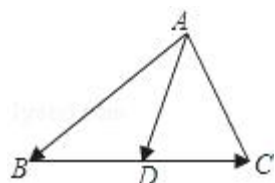
考点：概率公式.

分析：本题考查了概率的简单计算能力，是一道列举法求概率的问题，属于基础题，可以直接应用求概率的公式.

解答：解：因为从小明等 6 名学生中任选 1 名作为“世博会”志愿者，可能出现的结果有 6 种，选中小明的可能性有一种，所以小明被选中的概率是 $\frac{1}{6}$.

点评：此题考查概率的求法：如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

9. (2009•上海) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是边 BC 上的中线，设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，如果用向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ ，那么 $\overrightarrow{AD} = \underline{a + \frac{1}{2}b}$.



考点：*平面向量。

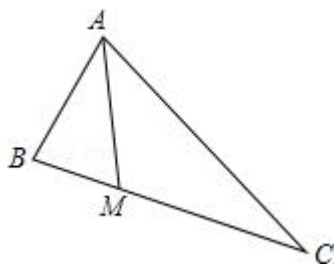
分析：此题主要用到了平行四边形法则，在向量 AB ， BC 已知的情况下，可求出向量 AC ，又题中 AD 为中线，所以只要准确把 CD 表示出来，向量 AD 即可解决。

解答：解：因为向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，根据平行四边形法则，可得： $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ ，又因为在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线，所以 $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ ，用向量 a ， b 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ ，那么 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

故答案为： $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

点评：本题难度中等，考查向量的知识。

10. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， M 为 BC 上的点，连接 AM ，如果将 $\triangle ABM$ 沿直线 AM 翻折后，点 B 恰好落在边 AC 的中点处，求点 M 到 AC 的距离。



考点：翻折变换（折叠问题）。

专题：操作型。

分析：利用图形翻折前后图形不发生变化，从而得出 $AB = AB' = 3$ ， $DM = MN$ ，再利用三角形面积分割前后不发生变化，求出点 M 到 AC 的距离即可。

解答：解： $\because \triangle ABM$ 沿直线 AM 翻折后，点 B 恰好落在边 AC 的中点处，假设这个点是 B' ，作 $MN \perp AC$ ， $MD \perp AB$ ，垂足分别为 N ， D 。

又 $\because Rt\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ，

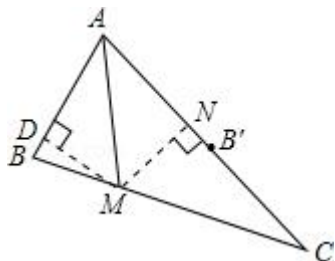
$\therefore AB = AB' = 3$ ， $DM = MN$ ， $AB' = B'C = 3$ ，

$$S_{\triangle BAC} = S_{\triangle BAM} + S_{\triangle MAC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 6$$

$$= \frac{1}{2} \times MD \times 3 + \frac{1}{2} \times 6 \times MN,$$

$\therefore$ 解得： $MD = 2$ ，

所以点 M 到 AC 的距离是 2。



点评: 此题主要考查了图形的翻折问题, 发现 $DM=MN$, 以及 $AB=AB'=B'C=3$, 结合面积不变得出等式是解决问题的关键.

11. (2009•上海) 在圆 O 中, 弦 AB 的长为 6, 它所对应的弦心距为 4, 那么半径 $OA=$ 5.

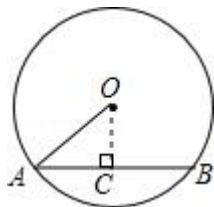
考点: 垂径定理; 勾股定理.

分析: 作出图象, 先求出弦的一半的长, 再利用勾股定理即可求出.

解答: 解: 作 $OC \perp AB$, 垂足为 C ,

可得: $OC=4$, $AC=\frac{1}{2}AB=3$,

根据勾股定理可得: $OA=\sqrt{OC^2+AC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$.



点评: 本题难度中等, 考查根据垂径定理求圆的半径.

12. (2009•上海) 将抛物线 $y=x^2-2$ 向上平移一个单位后, 得以新的抛物线, 那么新的抛物线的表达式是 $y=x^2-1$.

考点: 二次函数图象与几何变换.

分析: 根据二次函数图象的平移规律“上加下减, 左加右减”.

解答: 解: 由“上加下减”的原则可知, 将抛物线 $y=x^2-2$ 向上平移一个单位后, 得以新的抛物线, 那么新的抛物线的表达式是, $y=x^2-2+1$, 即 $y=x^2-1$.

故答案为: $y=x^2-1$.

点评: 本题比较容易, 考查二次函数图象的平移.

13. (2009•上海) 方程 $\sqrt{x-1}=1$ 的根是 $x=$ 2.

考点: 无理方程.

分析: 1 的算术平方根是 1, 故 $x-1=1$, 解得 $x=2$.

解答: 解: 由题意知 $x-1=1$, 解得 $x=2$.

点评: 算术平方根的被开方数必须大于或等于 0, 求此类方程的解必须满足这一条件.

14. (2009•上海) 分母有理化: $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

考点: 分母有理化.

分析: 根据分母有理化的方法, 分子、分母同乘以 $\sqrt{5}$.

解答: 解: $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

点评: 本题比较容易, 考查分母有理化的方法.

15. (2009•上海) 如果关于 x 的方程 $x^2 - x + k = 0$ (k 为常数) 有两个相等的实数根, 那么 $k = -\frac{1}{4}$.

考点: 根的判别式.

分析: 根据根的判别式为零时, 有两个相等的实数根, 就可以求出 k 的值.

解答: 解: $\because a=1, b=-1, c=k,$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times k = 1 - 4k = 0$, 解得 $k = \frac{1}{4}$.

点评: 本题比较容易, 考查一元二次方程根的判别式为零时有两个相等的实数根的应用.

16. 反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象的两分支分别在第 一、三 象限.

考点: 反比例函数的性质.

分析: 根据反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的性质进行解答, 当 $k > 0$ 时, 图象分别位于第一、三象限; 当 $k < 0$ 时, 图象分别位于第二、四象限.

解答: 解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的系数 $k = 6 > 0$,

$\therefore$ 图象两个分支分别位于第一、三象限,

故答案为一、三.

点评: 本题主要考查反比例函数图象的性质: (1) $k > 0$ 时, 图象是位于一、三象限; (2) $k < 0$ 时, 图象是位于二、四象限.

17. (2009•上海) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 那么 $f(3) = -\frac{1}{2}$.

考点: 函数值.

专题: 计算题.

分析: 把 $x=3$ 直接代入函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 即可求出函数值.

解答: 解: 因为函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

所以当 $x=3$ 时, $f(x) = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$.

点评: 本题比较容易, 考查求函数值.

(1) 当已知函数解析式时, 求函数值就是求代数式的值;

(2) 函数值是唯一的, 而对应的自变量可以是多个.

18. (2009•上海) 在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 互相平分, 交点为 O . 在不添加任何辅助线的前提下, 要使四边形 $ABCD$ 成为矩形, 还需添加一个条件, 这个条件可以是 $AC=BD$ 或有个内角等于 90° .

考点: 矩形的判定.

专题: 开放型.

分析: 因为在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 互相平分, 所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 根据矩形的判定条件, 可得在不添加任何辅助线的前提下, 要使四边形 $ABCD$ 成为矩形, 还需添加一个条件, 这个条件可以是一个角是直角或者对角线相等, 从而得出答案.

解答: 解: $\because$ 对角线 AC 与 BD 互相平分,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

要使四边形 $ABCD$ 成为矩形,

需添加一个条件是: $AC=BD$ 或有个内角等于 90° 度.

点评: 矩形的判定定理有:

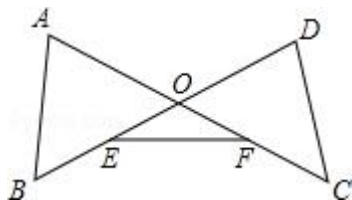
(1) 有一个角是直角的平行四边形是矩形;

- (2) 有三个角是直角的四边形是矩形;
 (3) 对角线互相平分且相等的四边形是矩形.

三、解答题 (共 7 小题, 满分 78 分)

19. (2009·上海) 已知线段 AC 与 BD 相交于点 O, 连接 AB、DC, E 为 OB 的中点, F 为 OC 的中点, 连接 EF (如图所示).

- (1) 添加条件 $\angle A = \angle D$, $\angle OEF = \angle OFE$, 求证: $AB = DC$.
 (2) 分别将“ $\angle A = \angle D$ ”记为①, “ $\angle OEF = \angle OFE$ ”记为②, “ $AB = DC$ ”记为③, 添加条件①、③, 以②为结论构成命题 1, 添加条件②、③, 以①为结论构成命题 2. 命题 1 是____命题, 命题 2 是____命题 (选择“真”或“假”填入空格).



考点: 全等三角形的判定与性质.

专题: 证明题; 开放型.

分析: (1) 要证 $AB = DC$, 可考虑证 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$.

(2) 根据已知及全等三角形的判定方法对两个命题进行分析, 从而判断其真假.

解答: 证明: (1) $\because E$ 为 OB 的中点, F 为 OC 的中点,

$$\therefore OB = 2OE, OC = 2OF.$$

$$\because \angle OEF = \angle OFE,$$

$$\therefore OE = OF.$$

$$\therefore OB = OC.$$

在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle DOC$ 中,

$$\angle A = \angle D, \angle AOB = \angle DOC, OB = OC,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC \text{ (AAS)}.$$

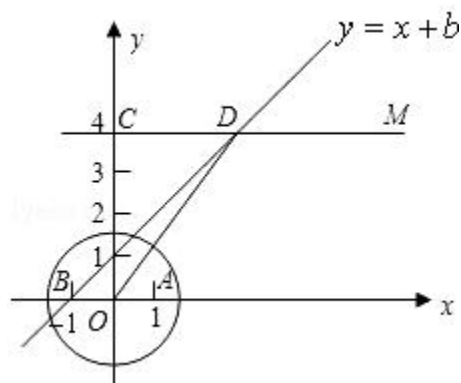
$$\therefore AB = DC.$$

(2) 对于命题 1, 可证 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ 得到 $OB = OC$, 再得 $OE = OF$, 从而能得到 $\angle OEF = \angle OFE$, 故其是真命题; 对于命题 2, 由所给的条件不能证明 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$, 因此其是假命题.

点评: 本题考查的是全等三角形的判定, 要牢记全等三角形的判定条件, 要记住 SSA 和 AAA 是不能证得两三角形全等的.

20. (2009·上海) 在直角坐标平面内, O 为原点, 点 A 的坐标为 (1, 0), 点 C 的坐标为 (0, 4), 直线 $CM \parallel x$ 轴 (如图所示). 点 B 与点 A 关于原点对称, 直线 $y = x + b$ (b 为常数) 经过点 B, 且与直线 CM 相交于点 D, 连接 OD.

- (1) 求 b 的值和点 D 的坐标;
 (2) 设点 P 在 x 轴的正半轴上, 若 $\triangle POD$ 是等腰三角形, 求点 P 的坐标;
 (3) 在 (2) 的条件下, 如果以 PD 为半径的圆 P 与圆 O 外切, 求圆 O 的半径.



考点: 切线的性质; 坐标与图形性质; 勾股定理; 相似三角形的判定与性质.

专题：综合题；分类讨论。

分析：(1) 先求出点 B 的坐标，由直线过点 B，把点 B 的坐标代入解析式，可求得 b 的值；点 D 在直线 CM 上，其纵坐标为 4，利用求得的解析式确定该点的横坐标即可；

(2) $\triangle POD$ 为等腰三角形，有三种情况： $PO=OD$ ， $PO=PD$ ， $DO=DP$ ，故需分情况讨论，要求点 P 的坐标，只要求出点 P 到原点 O 的距离即可；

(3) 结合 (2)，可知 $\odot O$ 的半径也需根据点 P 的不同位置进行分类讨论。

解答：解：(1) $\because B$ 与 $A(1, 0)$ 关于原点对称

$$\therefore B(-1, 0)$$

$$\because y=x+b \text{ 过点 } B$$

$$\therefore -1+b=0, \quad b=1$$

$$\therefore y=x+1$$

$$\text{当 } y=4 \text{ 时, } x+1=4, \quad x=3$$

$$\therefore D(3, 4);$$

(2) 作 $DE \perp x$ 轴于点 E，则 $OE=3$ ， $DE=4$ ，

$$\therefore OD = \sqrt{OE^2 + DE^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

若 $\triangle POD$ 为等腰三角形，则有以下三种情况：

①以 O 为圆心，OD 为半径作弧交 x 轴的正半轴于点 P_1 ，则 $OP_1=OD=5$ ，

$$\therefore P_1(5, 0).$$

②以 D 为圆心，DO 为半径作弧交 x 轴的正半轴于点 P_2 ，则 $DP_2=DO=5$ ，

$$\because DE \perp OP_2$$

$$\therefore P_2E=OE=3,$$

$$\therefore OP_2=6,$$

$$\therefore P_2(6, 0).$$

③取 OD 的中点 N，过 N 作 OD 的垂线交 x 轴的正半轴于点 P_3 ，则 $OP_3=DP_3$ ，

易知 $\triangle ONP_3 \sim \triangle DCO$ 。

$$\therefore \frac{OP_3}{OD} = \frac{ON}{DC}.$$

$$\therefore \frac{OP_3}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{3}, \quad OP_3 = \frac{25}{6}.$$

$$\therefore P_3\left(\frac{25}{6}, 0\right).$$

综上所述，符合条件的点 P 有三个，分别是 $P_1(5, 0)$ ， $P_2(6, 0)$ ， $P_3\left(\frac{25}{6}, 0\right)$ 。

(3) ①当 $P_1(5, 0)$ 时， $P_1E=OP_1-OE=5-3=2$ ， $OP_1=5$ ，

$$\therefore P_1D = \sqrt{P_1E^2 + DE^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore \odot P \text{ 的半径为 } 2\sqrt{5}.$$

$\because \odot O$ 与 $\odot P$ 外切，

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5 - 2\sqrt{5}.$$

②当 $P_2(6, 0)$ 时， $P_2D=DO=5$ ， $OP_2=6$ ，

$$\therefore \odot P \text{ 的半径为 } 5.$$

$\because \odot O$ 与 $\odot P$ 外切，

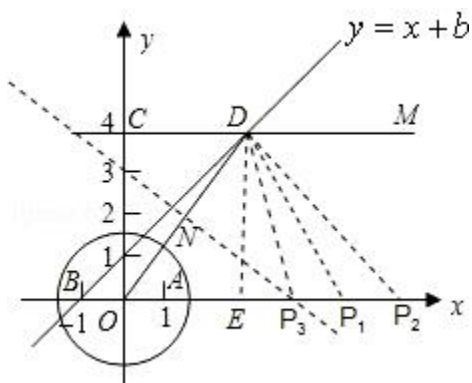
$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 1.$$

$$\text{③当 } P_3\left(\frac{25}{6}, 0\right) \text{ 时, } P_3D=OP_3=\frac{25}{6},$$

$\therefore \odot P$ 的半径为 $\frac{25}{6}$.

$\therefore \odot O$ 与 $\odot P$ 外切,

$\therefore \odot O$ 的半径为 0, 即此圆不存在.



点评: 本题考查了待定系数法求函数解析式, 注意到分情况讨论是解决本题的关键.

21. (2009•上海) 已知 $\angle ABC=90^\circ$, $AB=2$, $BC=3$, $AD \parallel BC$, P 为线段 BD 上的动点, 点 Q 在射线 AB 上, 且满足 $\frac{PQ}{PC} = \frac{AD}{AB}$ (如图 1 所示).

(1) 当 $AD=2$, 且点 Q 与点 B 重合时 (如图 2 所示), 求线段 PC 的长;

(2) 在图 1 中, 连接 AP . 当 $AD=\frac{3}{2}$, 且点 Q 在线段 AB 上时, 设点 B 、 Q 之间的距离为 x , $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle PBC}} = y$, 其中 $S_{\triangle APQ}$

表示 $\triangle APQ$ 的面积, $S_{\triangle PBC}$ 表示 $\triangle PBC$ 的面积, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出函数定义域;

(3) 当 $AD < AB$, 且点 Q 在线段 AB 的延长线上时 (如图 3 所示), 求 $\angle QPC$ 的大小.

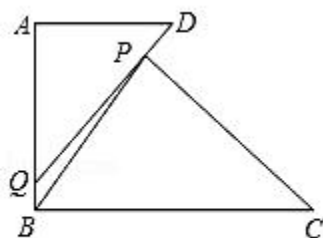


图 1

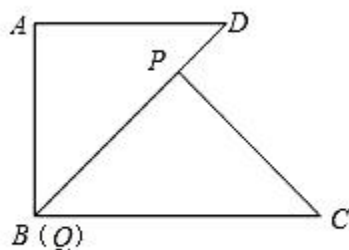


图 2

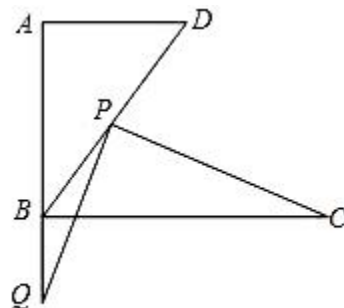


图 3

考点: 解直角三角形; 矩形的性质; 相似三角形的判定与性质.

专题: 动点型; 数形结合.

分析: (1) 当 $AD=2$ 时, $AD=AB$, 此时 $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形, 易证 $\triangle BPC$ 也是等腰直角三角形, BC 长已知, 则 PC 的长可求;

(2) 易知点 P 到 AB 的距离与到 BC 的距离的比与 BA 、 AD 长度的比相等, 即 $\triangle APQ$ 中 AQ 边上的高与 $\triangle PBC$ 中 BC 边上的高的比可求; $AQ=2-x$, $BC=3$, 则 $\triangle APQ$ 与 $\triangle BPC$ 的面积可表示出来, 利用其面积比为 y , 可得函数关系式;

(3) 作 $PE \perp AB$ 于 E , $PF \perp BC$ 于 F , 由已知条件可证 $Rt\triangle PCF \sim Rt\triangle PQE$, 则 $\angle EPQ = \angle FPC$, 利用角的和差关系可求得 $\angle QPC = 90^\circ$.

解答: 解: (1) $\because AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle ABC = 90^\circ$.

当 $AD=2$ 时, $AD=AB$,

$\therefore \angle D = \angle ABD = 45^\circ$,

$\therefore \angle PBC = \angle D = 45^\circ$.

$$\therefore \frac{PQ}{PC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\therefore PQ = PC,$$

$$\therefore \angle C = \angle PQC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = 90^\circ.$$

$$\therefore PC = BC \cdot \sin 45^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

(2) 如图, 作 $PE \perp AB$ 于 E , $PF \perp BC$ 于 F ,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EBFP$ 是矩形.

$$\therefore PF = BE.$$

$$\text{又 } \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore PE \parallel AD,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle BEP \sim \text{Rt} \triangle BAD.$$

$$\therefore \frac{BE}{EP} = \frac{BA}{AD} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

设 $BE = 4k$, 则 $PE = 3k$,

$$\therefore PF = BE = 4k.$$

$$\therefore BQ = x,$$

$$\therefore AQ = AB - BQ = 2 - x.$$

$$\therefore S_{\triangle AQP} = \frac{1}{2} AQ \cdot PE = \frac{1}{2} (2 - x) \cdot 3k, \quad S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2} BC \cdot PF = \frac{1}{2} \times 3 \times 4k = 6k.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AQP}}{S_{\triangle BPC}} = y,$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2} (2 - x) \cdot 3k}{6k} = y,$$

$$\text{即 } y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

当 P 在 D 点时, x 最大, 过 D 作 BC 的垂线, 可计算出 $PC = \frac{5}{2}$, 而 $\frac{PQ}{PC} = \frac{AD}{AB}$, 得 $DQ = \frac{15}{8}$, 利用勾股定理得到 $AQ = \frac{9}{8}$,

$$\text{所以此时 } BQ = \frac{7}{8}$$

$$\therefore 0 \leq x \leq \frac{7}{8}.$$

(3) 如图, 作 $PE \perp AB$ 于 E , $PF \perp BC$ 于 F ,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EBFP$ 是矩形.

$$\therefore PF = BE, \quad \angle EPF = 90^\circ.$$

$$\text{又 } \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore PE \parallel AD.$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle BEP \sim \text{Rt} \triangle BAD.$$

$$\therefore \frac{BE}{EP} = \frac{BA}{AD}.$$

$$\therefore \frac{PF}{EP} = \frac{AB}{AD},$$

$$\text{又} \because \frac{PC}{PQ} = \frac{BA}{AD},$$

$$\therefore \frac{PF}{PE} = \frac{PC}{PQ},$$

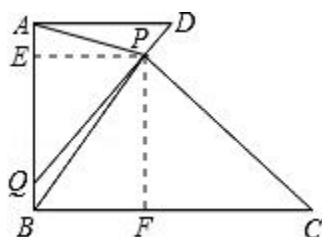
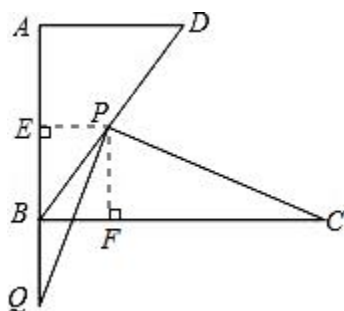
$$\therefore \text{Rt}\triangle PCF \sim \text{Rt}\triangle PQE,$$

$$\therefore \angle EPQ = \angle FPC.$$

$$\because \angle EPQ + \angle QPF = \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FPC + \angle QPF = 90^\circ.$$

$$\text{即} \angle QPC = 90^\circ.$$



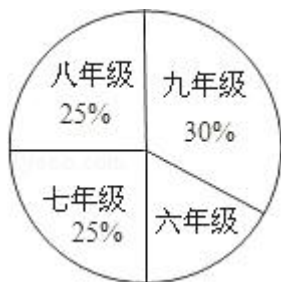
点评： 本题考查相似三角形的判定与性质的实际应用及分析问题、解决问题的能力。利用数学知识解决实际问题中学数学的重要内容。解决此问题的关键在于正确理解题意的基础上建立数学模型，把实际问题转化为数学问题。

22. (2009•上海) 为了了解某校初中男生的身体素质状况，在该校六年级至九年级共四个年级的男生中，分别抽取部分学生进行“引体向上”测试。所有被测试者的“引体向上”次数情况如表一所示；各年级的被测试人数占所有被测试人数的百分率如图所示（其中六年级相关数据未标出）。

次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人数	1	1	2	2	3	4	2	2	2	0	1

根据上述信息，回答下列问题（直接写出结果）：

- (1) 六年级的被测试人数占所有被测试人数的百分率是 20%；
- (2) 在所有被测试者中，九年级的人数是 6；
- (3) 在所有被测试者中，“引体向上”次数不小于 6 的人数所占的百分率是 35%；
- (4) 在所有被测试者的“引体向上”次数中，众数是 5。



考点： 扇形统计图；众数。

专题： 应用题。

分析： (1) 由所有百分比之和等于 1 计算六年级占的比例；

(2) 由表格中得到总测试人数，乘以九年级的百分比即为九年级的测试人数；

(3) 从表格中得到不小于 6 的人数，除以总测试人数即为不小于 6 的人数所占的百分率；

(4) 由众数的概念知，众数是 5.

解答：解：

(1) 六年级的被测试人数占所有被测试人数的百分率 $= 1 - 25\% - 25\% - 30\% = 20\%$ ；

(2) 从表格中得到总测试人数 $= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 = 20$ 人，九年级的人数 $= 20 \times 30\% = 6$ 人；

(3) 在所有被测试者中，“引体向上”次数不小于 6 的人数 7 人，故所占的百分率 $= 7 \div 20 = 35\%$ ；

(4) 在所有被测试者的“引体向上”次数中，做 5 次的人数为 4 人，故众数是 5.

故填 20%；6；35%；5.

点评：读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键.

23. (2009•上海) 计算: $\frac{2a+2}{a-1} \div (a+1) - \frac{a^2-1}{a^2-2a+1}$

考点：分式的混合运算.

专题：计算题.

分析：分式分母能约分的先约分，然后把除法运算转化成乘法运算，再进行加减运算.

解答：解： $\frac{2a+2}{a-1} \div (a+1) - \frac{a^2-1}{a^2-2a+1}$

$$= \frac{2(a+1)}{a-1} \cdot \frac{1}{a+1} - \frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}$$
$$= \frac{2}{a-1} - \frac{a+1}{a-1}$$
$$= \frac{2-a-1}{a-1} = -1.$$

点评：点拨：本题按照分式化简的步骤，本着化除为乘、先分解后约分、化异为同的思想来解答.

24. (2009•上海) 解方程组: $\begin{cases} y-x=1 \text{ ①} \\ 2x^2-xy-2=0 \text{ ②} \end{cases}$

考点：高次方程.

专题：计算题.

分析：本题考查二元二次方程组的解法，在解题时观察本题的特点，可用代入法先消去未知数 y，求出未知数 x 的值后，进而求得这个方程组的解.

解答：解：由①得： $y=x+1$ ③

把③代入②，得 $2x^2 - x(x+1) - 2 = 0$

解这个方程，得 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 2$.

当 $x_1 = -1$ 时， $y_1 = -1 + 1 = 0$

当 $x_2 = 2$ 时， $y_2 = 2 + 1 = 3$

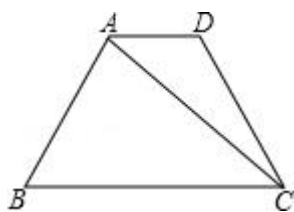
$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$.

点评：二元一次方程组有两组解，在解答时不要漏解.

25. (2009•上海) 如图，在梯形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $AB=DC=8$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $BC=12$ ，连接 AC.

(1) 求 $\tan \angle ACB$ 的值；

(2) 若 M、N 分别是 AB、DC 的中点，连接 MN，求线段 MN 的长.



考点：解直角三角形；全等三角形的判定；三角形中位线定理。

专题：计算题；压轴题。

分析：(1) 作梯形的一条高 AE，发现 30° 的直角三角形 ABE，根据锐角三角函数求得 BE，AE 的长，再进一步求得 CE 的长，从而完成求解过程；

(2) 显然 MN 是梯形的中位线，主要是求得上底的长即可。再作梯形的另一条高，根据全等三角形和矩形的性质求得梯形的上底。

解答：解：(1) 如图，作 $AE \perp BC$ 于点 E。

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，

$$BE = AB \cdot \cos B = 8 \times \cos 60^\circ = 4,$$

$$AE = AB \cdot \sin B = 8 \times \sin 60^\circ = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore CE = BC - BE = 12 - 4 = 8.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中，

$$\tan \angle ACB = \frac{AE}{EC} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 作 $DF \perp BC$ 于 F，则四边形 AEFD 是矩形。

$$\therefore AD = EF, \quad DF = AE.$$

$$\because AB = DC, \quad \angle AEB = \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle DCF \quad (\text{HL})$$

$$\therefore CF = BE = 4,$$

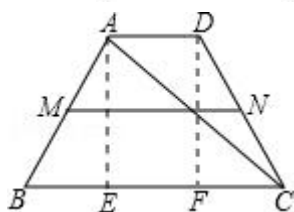
$$EF = BC - BE - CF = 12 - 4 - 4 = 4,$$

$$\therefore AD = 4.$$

又 $\because M$ 、 N 分别是 AB 、 DC 的中点，

$\therefore MN$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线，

$$\therefore MN = \frac{1}{2} (AD + BC) = \frac{1}{2} (4 + 12) = 8.$$



点评：(1) 结合等腰梯形的特点，构造直角三角形，然后根据三角函数的定义来求 $\angle ACB$ 的正切值。

(2) 在等腰梯形上添加辅助线，将等腰梯形划分为两个全等的直角三角形和一个矩形，然后求得 AD 的长，再由梯形的中位线的性质求线段 MN 的长。