



2. 已知 $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{x}}}}} = \frac{67}{96}$, 求 x .

3. 若 $1 - \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5}}}$ $\frac{1}{\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square}}}}$,

那么四个 $\square$ 中的数的乘积是多少?

三、自我挑战

1. $\frac{20\frac{1}{5} - \frac{7}{25}}{10\frac{3}{8} + 15\frac{9}{16}}$.

2. $\frac{1978 \times 1979 + 1979 \times 1980}{1 + 2 + 3 + \dots + 1978 + 1979}$.

$$3. \frac{0.1 + 13\frac{1}{3} + 4\frac{2}{7} + 1\frac{1}{4}}{\frac{1}{100} + \frac{1}{8} + \frac{3}{7} + 1\frac{1}{3}}.$$

$$4. \frac{4\frac{1}{2} \div 2\frac{4}{7} + \frac{1}{6}}{13 + \frac{1}{3} - 3.75 \times 3\frac{1}{5}}.$$

$$5. \frac{\frac{2}{3} + \left(1\frac{2}{3} - \frac{7}{12}\right)}{0.25 + \frac{2}{7} \times 4}.$$

$$6. 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}.$$

$$7. \frac{1}{4 - \frac{1}{3 + \frac{1}{2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}.$$



8. $\frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1992 \times 1993}{\underbrace{6 \times 6 \times \cdots \times 6}_{993 \text{个} 6}}$ 化简后分母是多少?

9. $\frac{1 \times 3 \times 24 + 2 \times 6 \times 48 + 3 \times 9 \times 72}{1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12}.$

10. $\frac{\frac{1}{13} \times \left\{ 1 - \frac{1}{5} \times \left[1 - \frac{1}{7} \times \left(1 - \frac{1}{11} \right) \right] \right\}}{\frac{451}{493} \times \frac{377}{943} \div \frac{429}{391} - \frac{38}{455}}.$

11. 解方程 $\frac{5x+3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 4\frac{1}{2}.$

$$12. \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{9}}{\left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{9}\right)} + \frac{\frac{1}{16}}{\left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{9}\right) \times \left(1 + \frac{1}{16}\right)}.$$

$$13. \frac{1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5} + \dots + 1992\frac{1993}{1994}}{3\frac{1}{3} + 5\frac{2}{4} + 7\frac{3}{5} + \dots + 3985\frac{1992}{1994}}.$$



循环小数与分数

一、解题妙招

纯循环小数化为分数的方法是：分子是一个循环节的数；分母的各位上的数字都是9，9的个数与一个循环节的数个数相同。所得分数可约分要约分，化成最简分数。

如：把 $0.\dot{7}$ 化成分数：

$$0.\dot{7} = 0.777\cdots, 0.\dot{7} \times 10 = 7.777\cdots,$$

将以上两式相减，即得 $0.\dot{7} \times (10 - 1) = 7.777\cdots - 0.777\cdots = 7$ ，

$$\text{所以 } 0.\dot{7} = \frac{7}{9}.$$

混循环小数化为分数的方法是：分子是小数点后面第一个数字到第一个循环节的末位数字组成的数，减去不循环部分几个数字所组成的数所得的差；分母的前几位上的数字都是9，后几位上的数字都是0，其中9的个数与一个循环节的数个数相同，0的个数与不循环部分的数个数相同。所得分数可约分要约分，化成最简分数。如：

$$0.1\dot{2}\dot{3} \times 10 = 1.2323\cdots,$$

$$0.1\dot{2}\dot{3} \times 1000 = 123.2323\cdots,$$

将以上两式相减，即 $0.1\dot{2}\dot{3} \times (1000 - 10) = 123 - 1$ ，

$$\text{所以 } 0.1\dot{2}\dot{3} = \frac{123 - 1}{990} = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}.$$

循环小数的四则运算和有限小数四则运算一样，可以先把循环小数化成分数，再按分数四则运算法则进行计算。

二、举一反三

例1 把下面的纯循环小数化为分数：

(1) $0.\dot{6}$;

(2) $3.\dot{1}\dot{2}$.



(1) 根据纯循环小数化为分数的方法，这个数的循环节是6，那么改写的这个分数的分子是6，分母是9，即 $\frac{6}{9}$ ，它不是最简分数，然后把它约分得 $\frac{2}{3}$ 。

(2) 可以先把 $0.\dot{1}\dot{2}$ 改写成 $\frac{12}{99}$ 后，再加上3。

解 (1) $0.\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$;

(2) $0.\dot{1}\dot{2} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$; $3.\dot{1}\dot{2} = 3\frac{4}{33}$.

(一) 我想试一试(把下面的纯循环小数化为分数)

1. $0.\dot{3}$.

2. $1.\dot{2}\dot{4}$.

3. $0.\dot{1}0\dot{2}$.

例2 把混循环小数化为分数： $0.2\dot{1}\dot{5}$.



根据混循环小数化为分数的方法，这个数的循环节是15，那么改写的这个分数的分子是 $215-2$ ，分母是990，即 $\frac{213}{990}$ ，它不是最简分数，然后把它约分得 $\frac{71}{330}$ 。

解 $0.2\dot{1}\dot{5} = \frac{213}{990} = \frac{71}{330}$.



(二) 我想试一试(把下面的循环小数化为分数)

1. $0.\dot{0}\dot{2}$.

2. $3.\dot{1}\dot{3}$.

3. $2.60\dot{9}$.

例3 计算: $2.\dot{4}\dot{5} + 3.\dot{1}\dot{3}$.

先把循环小数化成分数, 再按分数加分数的运算法则进行计算.

解

$$2.\dot{6} + 0.2\dot{1}\dot{5}$$

$$= 2\frac{6}{9} + \frac{213}{990}$$

$$= 2\frac{2}{3} + \frac{71}{330}$$

$$= 2\frac{220}{330} + \frac{71}{330}$$

$$= 2\frac{291}{330}$$

$$= 2\frac{97}{110}.$$

(三) 我想试一试

1. $2.60\dot{9} - 1.\dot{3}\dot{2}$.

2. $4.\dot{3} \times 2.\dot{4}$.

3. $1.\dot{2}\dot{4} \div 0.\dot{3}$.

三、自我挑战

1. 将下面循环小数化为分数：

(1) $0.\dot{8}$;

(2) $0.\dot{7}\dot{6}$;

(3) $9.\dot{1}2\dot{3}$;

(4) $3.\dot{1}\dot{3}$;

(5) $0.\dot{2}\dot{6}\dot{5}$;

(6) $1.6\dot{2}0\dot{3}$.

2. 计算：

(1) $2.\dot{4}\dot{5} + 3.\dot{1}\dot{3}$;

(2) $1.\dot{2}\dot{4} \div \frac{1}{\frac{1}{3}}$;



$$(3) (1.\dot{2} - 0.\dot{9}\dot{8}) \times 2.\dot{4}\dot{1};$$

$$(4) 1.\dot{8}\dot{1} - 0.\dot{8}\dot{1} - 0.81;$$

$$(5) 3.75 \times 0.\dot{3} + 3.75 \div 3 + 3.75 \times 0.\dot{6};$$

$$(6) 0.\dot{1}\dot{8} + \frac{1}{0.\dot{1}\dot{8} + \frac{1}{0.\dot{1}\dot{8}}}.$$

3. (1) 纯循环小数 $0.\dot{a}\dot{b}\dot{c}$ 写成最简分数时, 分子与分母之和是 58, 请你写出这个循环小数().

(2) 假设 n 是一个自然数, d 是 1 至 9 中的一个数字, 若 $\frac{n}{777} = 0.\dot{3}d\dot{1}$, 求 n 和 d 的值.

五

完全平方数

一、解题妙招

(一) 完全平方数的性质

1. 末位数字只能是：0, 1, 4, 5, 6, 9.
2. 两个相邻整数的平方之间不可能再有平方数.
3. 奇数的平方一定是奇数, 偶数的平方一定是偶数.
4. 末位若有 0, 0 的个数必为偶数个.
5. 因数个数为奇数个; 反之成立.
6. 如果个位上的数字是 6, 则它的十位数字是奇数; 反之也成立.
7. 如果个位上的数字是奇数, 则它的十位上的数字是偶数.
8. 奇数的平方被 4 除余 1, 偶数的平方是 4 的倍数.
9. 除以 3 余 0 或余 1.
10. 除以 5 余 0 或余 1 或余 4.

我们往往用平方数的一些性质来判断一个数是不是完全平方数, 也可以用
它来解决一些实际问题.

(二) 有关平方数的一些计算公式

平方差公式: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

完全平方和公式: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

完全平方差公式: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

二、举一反三

例1 计算：(1) $67^2 - 33^2$ ； (2) 103×97 ； (3) 11111111^2 .

(1) 和 (2) 根据数的特征，用平方差公式来计算比较简便. (3) 可以直接用竖式计算；也可以找规律来解答.



解

$$(1) 67^2 - 33^2$$

$$= (67 + 33) \times (67 - 33)$$

$$= 100 \times 34$$

$$= 3400;$$

$$(2) 103 \times 97$$

$$= (100 + 3) \times (100 - 3)$$

$$= 100^2 - 3^2$$

$$= 10000 - 9$$

$$= 9991;$$

$$(3) \text{ 因为: } 11 \times 11 = 121$$

$$111 \times 111 = 12321$$

$$1111 \times 1111 = 1234321$$

...

$$\text{所以 } 11111111^2 = 123456787654321.$$

(一) 我想试一试

1. $93^2 - 92^2$.

2. 207×193 .

3. 22222^2 .

4. $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + \cdots + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.

例 2 $1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 + \cdots + 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 49$ 这个算式的得数是不是某数的平方?

如果直接去计算这个算式, 再判断是不是平方数, 这样比较费时. 可以先计算各个加数的末位数字和的末位数字来判断, 我们知道连续的5个正整数的积的末位数字是0. 这个算式各个加数的末位数字之和为: $1+2+6+4+0+\cdots+0$; 即这个算式得数的末位数字是3. 根据平方数的性质, 平方数的末位数字只能是: 0, 1, 4, 5, 6, 9. 所以这个算式的得数不是某数的平方.



解

因为这个算式各个加数的末位数字之和为: $1+2+6+4+0+\cdots+0$; 即这个算式得数的末位数字是3. 根据平方数的性质, 平方数的末位数字只能是: 0, 1, 4, 5, 6, 9. 所以这个算式的得数不是某数的平方.

答

这个算式的得数不是某数的平方.