

目录

环形相遇及追及	/1
行程进阶（二）	/4
流水行船（一）	/7
流水行船（二）	/10
计算（三）	/15
博弈趣题	/21
还原问题（一）	/24
还原问题（二）	/27
抽屉原理	/30
蜗牛爬井问题	/35
数列进阶	/40
格点与割补	/44
加乘原理（一）	/48
加乘原理（二）	/54
逻辑推理基础	/58
参考答案	/64



环形相遇及追及

内容要点

同起点的环形相遇与追及、不同起点的环形相遇与追及

一 同起点的环形相遇与追及

例 1 操场一圈长 400 米，两人同时同地出发跑步，速度分别是每秒 4 米和每秒 6 米。

(1) 如果两人同向跑步，多久会第一次相遇？多久会第二次相遇？

(2) 如果两人反向跑步，多久会第一次相遇？多久会第二次相遇？

总结 | 环形相遇与追及问题，本质上还是相遇和追及，关注路程和（差）、速度和（差）以及时间。



例 2 操场一圈长 400 米，两人同时同地出发跑步。如果两人同向跑步，200 秒相遇；如果两人反向跑步，50 秒相遇。两人速度分别是多少？

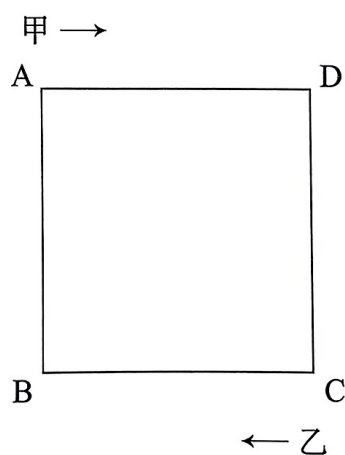
二 不同起点的环形相遇与追及

例 3 操场一圈长 400 米，甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发，同向行走。4 分钟后，甲第一次追上乙。又经过 10 分钟后，甲第二次追上乙。已知甲的速度是每分钟 70 米，问出发时甲在乙前方多少米？



例 4 操场一圈 400 米，甲、乙两人相距 100 米，同时出发跑步，速度分别是每秒 4 米和每秒 6 米。两人多久会相遇？

例 5 如图，一个正方形房屋的边长为 10 米，甲、乙两人分别从房屋的两个墙角同时出发，沿顺时针方向前进。甲每秒行 5 米，乙每秒行 3 米。问，出发后经过多长时间，甲第一次看见乙？



行程进阶

内容要点

多人行程问题、多次相遇进阶

多人的行程问题

例 1 甲、乙、丙三人绕操场步行，同时同地出发。甲、乙两人的速度分别是每分钟 90 米和每分钟 70 米，他们两人同方向行走。丙与两人反向行走，半个小时后甲、丙相遇，再过 5 分钟，乙、丙相遇。问，操场一圈有多长？



例 2 甲、乙、丙三人，速度分别是每分钟 40 米、每分钟 50 米和每分钟 60 米。A、B 两地相距 2700 米，甲、乙两人分别从 A、B 两地同时出发相向而行，他们出发 15 分钟后，丙从 B 地出发去追赶乙。请问：

(1) 甲在与乙相遇后多少分钟又与丙相遇？

(2) 甲和丙相遇后，又过了多少分钟，丙才追上乙？



二 多次相遇进阶

例 3 甲、乙辆车分别从 A、B 两地同时出发，在 A、B 两地间不断地往返行驶。甲车每小时行 20 千米，乙车每小时行 50 千米。已知两车第 10 次与第 18 次迎面相遇的地点相距 60 千米。问两地的路程是多少千米？



流水行船 一

内容要点

流水行船基础、流水行船多次相遇

一 流水行船基础

四个基础速度：① 船在静水中的速度，记为“ $V_{\text{静}}$ ”；② 水的速度，记为“ $V_{\text{水}}$ ”；③ 船在逆水中的行驶速度，记为“ $V_{\text{逆}}$ ”；④ 船在顺水中的行驶速度，记为“ $V_{\text{顺}}$ ”。它们之间的关系为： $V_{\text{逆}} = V_{\text{静}} - V_{\text{水}}$ 、 $V_{\text{顺}} = V_{\text{静}} + V_{\text{水}}$ 。这四个量“知二求二”。其中“ $V_{\text{逆}}$ 、 $V_{\text{静}}$ 、 $V_{\text{顺}}$ ”组成一个公差为“ $V_{\text{水}}$ ”的等差数列。

例 1 一只船静水速度是每小时 8 千米，水流速度是每小时 2 千米，船只顺流而下 1 小时可以跑多远？逆流而上 5 小时可以跑多远？



例 2 一只船顺水航行时每小时行 20 千米，逆水航行时，每小时行 12 千米。请问静水船速和水速分别是多少？

例 3 乙船顺水航行 2 小时，行了 120 千米，返回原地用了 4 小时。甲船顺水航行同一段路，用了 3 小时。甲船返回原地要用几小时？



例 4 某船在两码头之间来回航行，顺水速度每小时 30 千米，逆水速度每小时 20 千米，往返一次的平均速度是多少？

例 5 甲、乙两船分别从相距 120 千米的 A、B 码头同时出发，在两个码头之间往返。A 在 B 的上游。两船静水速度均为 25 千米每小时，水流速度为 5 千米每小时。问两船第二次相遇的地点距 A 多少千米？



流水行船 二

内容要点

流水行船相遇与追及问题

二 流水行船相遇与追及问题

例 1 A、B 两码头相距 40 千米，甲、乙两艘船的静水船速分别为每小时 5 千米和每小时 15 千米，甲、乙同时从 A、B 码头出发，相向而行。

(1) 在静水中，两船需要多久相遇？



(2) 如果 A 在 B 的上游, 水速是每小时 2 千米, 两船需要多久相遇?

总结 I 根据“和不变”的性质, 例 1 两小问中的“速度和”相等, 又“路程和”相等, 因此“静水”与“非静水”情况下的“相遇时间”相同。

例 2 A、B 两码头相距 40 千米, 甲、乙两艘船的静水船速分别为每小时 5 千米和每小时 15 千米, 甲、乙两船都从 A 码头驶向 B 码头, 甲船航行了 10 千米后, 乙船再出发。

(1) 在静水中, 乙船要多久可以追上甲船?



(2) 如果 A 在 B 的上游，车速是每小时 2 千米，乙船要多久可以追上甲船？

总结 I 由“差不变”性质，故例 2 两小问中的“速度差”相等，又“路程和”相等，因此“静水”与“非静水”情况下的“追及时间”相等。

总结 I 在处理“流水行船”问题时，对于“同时出发”的相遇（追及）问题、与相遇（追及）时间相关的问题，常可放到静水中来处理。对于该结论注意以下三点：

① 相遇、追及问题中，我们始终关注“路程和（差）”、“速度和（差）”、“相遇或追及时间”，基本的公式是不变的。

② 流水行船中，相遇问题的“速度和”以及追及问题的“速度差”，是不受车速影响的，可以放到静水中处理，这里的根源是“和不变”与“差不变”。

③ 放到静水中处理后，若要时间不变，则需要确保两者是同时出发的。



例 3 A、B 两码头相距 40 千米，甲、乙两艘船的静水船速分别为每小时 5 千米和每小时 15 千米，甲、乙两船都从 A 码头驶向 B 码头，甲船航行了 2 小时后，乙船再出发。在顺水、静水、逆水 3 种情况中，哪种情况乙船会先追上甲船？

例 4 某人在河里游泳，逆流而上。他在 A 处丢失了一只水壶，向前又游了 20 分钟后，才发现丢了水壶，立即返回寻找，在离 A 处 2 千米的地方追到，求水流速度。



例 5 A 码头在 B 码头上游 50 千米处，甲船和乙船的静水船速相同，分别从 A、B 两码头同时出发向上游行驶。甲船出发时掉落一个木筏，1 小时后木筏离甲船 5 千米。甲船在行驶了 20 千米后掉头追赶木筏，在追上木筏时正好和乙船相遇。求水流速度。



计算 三

内容要点

小数加减法基础、凑整、分组

一 小数加减法基础

- ①小数的认知；
“小数”比大小：依据“位值原理”；
- ②整数运算的技巧；

二 凑整

例 1 计算： $1.1 + 7.2 + 8.9$ 。

例 2 计算： $3.3 + 5.4 + 6.7 + 4.6$ 。

例 3 计算： $12.76 + 50.49 - 3.76 - 24.49$ 。

例 4 计算： $(12.74 + 23.2) + (21.8 - 3.74)$ 。



例 5 计算： $20.67 - (12.8 + 4.67) + 13.8$ 。

例 6 计算： $34.6 + 35.4$ 。

例 7 计算： $34.7 + 35.4$ 。



例 8 计算： $42.4 + 42.2 + 41.6 + 41.9$ 。

例 9 计算： $0.9 + 9.9 + 99.9 + 999.9$ 。

例 10 计算： $9.9 + 9.99 + 9.999 + 9.9999$ 。



分组

例 11 计算: $0.8 - 0.7 + 0.6 - 0.5 + 0.4 - 0.3 + 0.2 - 0.1$ 。

例 12 计算: $0.8 - 0.7 - 0.6 + 0.5 + 0.4 - 0.3 - 0.2 + 0.1$ 。



例 13 计算：

$$1 - 0.99 - 0.98 + 0.97 + 0.96 - 0.95 - 0.94 + 0.93 + \cdots + 0.04 - 0.03。$$

例 14 计算：

$$(0.01 + 0.03 + 0.05 + 0.07 + \cdots + 0.19) - (0.02 + 0.04 + 0.06 + 0.08 + \cdots + 0.16 + 0.18)。$$



博弈趣题

内容要点

构造对称求解必胜策略、逆推归纳求解必胜策略

一 构造对称求解必胜策略

例 1 有 2 堆棋子，每堆 10 个，两人轮流行动，每人每次可以从其中一堆中取出若干颗（至少一颗），取到最后一颗的胜利。谁有必胜策略？



例 2 有 2 堆棋子，1 堆 10 个，1 堆 15 个，两人轮流行动，每人每次可以从其中一堆中取出若干颗（至少一颗），取到最后一颗的胜利。谁有必胜策略？

例 3 有 11 个棋子排成一排，编号为 1 到 11，两人轮流行动，每人每次可以取一个棋子或者编号相邻的两个棋子，取走最后一颗棋子为胜，谁有必胜策略？



逆推归纳求解必胜策略

例 4 从 1 到 30 依次报数，每人可以报 1 个或 2 个数（需要接着前一个人报的数继续报），谁报到 30 胜利，谁有必胜策略？

例 5 从 1 到 30 依次报数，每人可以报 1 个或 2 个或 3 个数（需要接着前一个人报的数继续报），谁报到 30 胜利，谁有必胜策略？



还原问题 一

内容要点

单个量的还原问题、多个量的还原问题

一 单个量的还原问题

例 1 一个数加 5 之后，除以 3 的商是 5，余数是 2，这个数原来是多少？

例 2 胡老师买饮料花了 5 元，然后把剩下的钱的一半给了太太，还剩 20 元。胡老师原来有多少钱？



例 3 胡老师有一些零花钱，第一天花掉一半，第二天花掉剩下的一半多 1 块，第三天花掉 3 块，还剩 5 块，胡老师本来有多少零花钱？

总结 | 还原问题通常可以借助流程图来梳理思路，从后往前与从前往后的运算符号“互逆”：加变减，减变加，乘变除，除变乘。

二 多个量的还原问题

例 4 小明和小红共有 18 元零花钱，如果小明给小红 4 元钱，两人的零花钱就一样多了，两人本来各有多少钱？

总结 | 来回给，和不变。



例 5 甲、乙、丙共有 24 元零花钱，甲给乙 3 元，乙再给丙 5 元后，3 人的零花钱就一样多了，问三人本来各有多少钱？

例 6 甲、乙各有一些零花钱。甲的零花钱比乙多，甲给了乙和乙原来一样多的零花钱后，两人都剩 20 元零花钱。问两人本来各有多少零花钱？



还原问题 二

内容要点

还原问题进阶

三 还原问题进阶

例 7 甲、乙各有一些零花钱。甲的零花钱比乙多，甲给了乙和乙原来一样多的钱，然后乙再给甲和甲剩下的一样多的钱，然后甲再给乙和乙剩下的一样多的钱，最后两人都剩下 40 元零花钱。问两人本来各有多少零花钱？



例 8 口渴的三个和尚分别捧着一个水罐，最初，老和尚的水最多，并且有一个和尚没水喝，于是，老和尚把自己的水全部平均分给了大、小两个和尚；接着，大和尚又把自己的水全部平均分给了老、小两个和尚；然后，小和尚又把自己的水全部平均分给了另外两个和尚。就这样，三人轮流谦让了一阵，结果太阳落山时，老和尚的水罐里有 10 升水，小和尚的水罐里则装着 20 升水。请问：最初大和尚的水罐里有多少升水？

总结 I 多次操作的问题，往往可以找到规律，用周期性结合还原思想解决。



例 9 甲和乙各有若干块糖，甲的糖数比乙少，每次操作由糖多的人给糖少的人一些糖，使其糖数增加一倍。经过 2023 次这样的操作以后，甲有 10 块糖，乙有 8 块糖。请问：两个人原来分别有多少块糖？



抽屉原理

内容要点

抽屉原理与最不利原则、抽屉原理与最不利原则的应用

一 抽屉原理与最不利原则

例 1 4 个苹果放进 3 个抽屉，苹果数量最多的抽屉有可能放几个苹果？

总结 | 例 1 中，一定有一个抽屉有两个苹果，苹果数量最多的抽屉至少有 2 个苹果。

思考 | 若干苹果放进若干抽屉，怎样安排能使苹果数量最多的抽屉里的苹果最少？



例 2 老师有一根木棒要分成两段，要让最长的那段最短需要怎么分呢？

例 3 如果有 1 个蛋糕要给 3 个人吃，你来把蛋糕 1 切 3，但是切好以后，是另两个小朋友先选。你怎么保证自己吃到的蛋糕最多？



例 4 4 个苹果放进 3 抽屉，苹果数量最多的抽屉里，至少有几个苹果？

结论 $n+1$ 个苹果放到 n 个抽屉里，必定有一个抽屉至少有 2 个苹果。

例 5 6 个苹果放进 4 抽屉，苹果数量最多的抽屉里，至少有几个苹果？



例 6 8 个苹果放进 3 抽屉，苹果数量最多的抽屉里，至少有几个苹果？

总结 | 要想让放苹果最多的抽屉放的苹果尽可能的少，应尽可能去进行平均，即要去考虑最不利情况，平均思想就是最不利原则的解决方案。

二 抽屉原理与最不利原则的应用

例 7 某校有 35 人在 2010 年 1 月出生，试说明，他们中一定有 2 人在同一天出生，但不一定有 3 人在同一天出生。



例 8 有 10 块巧克力，不论怎么分，一定有一个小朋友至少分到 4 块巧克力，请问最多有多少个小朋友？

例 9 一个布袋里有大小相同、颜色不同的一些木球，其中红色的有 10 个，黄色的有 8 个，蓝色的有 3 个，绿色的有 1 个。请问：

(1) 一次至少要取出多少个球，才能保证取出的球至少有 3 种颜色？

(2) 一次至少要取出多少个球，才能保证其中必有红色球和黄色球？



蜗牛爬井问题

内容要点

蜗牛爬井问题、蜗牛爬井问题变形

例 1 井底有一只小蜗牛，井深 16 米，小蜗牛每 8 分钟可以爬 4 米，爬 8 分钟后要休息 2 分钟再爬，问小蜗牛几分钟可以爬出井口？

总结 | 例 1 中，10 分钟本质上为一个周期。



例 2 小猴子爬树，白天爬 5 米，晚上滑 2 米，第 24 天爬了 4 米后爬到顶，树多高？

总结 | 例 2 中，一个周期爬 3 米。

例 3 井底有一只小蜗牛，井深 4 米，小蜗牛白天往上爬 2 米，晚上往下滑 1 米，几天可以爬出来？



例 4 井底有一只小蜗牛，井深 50 米，小蜗牛白天往上爬 4 米，晚上往下滑 2 米，几天可以爬出来？

例 5 井底有一只小蜗牛，井深 40 米，小蜗牛白天往上爬 5 米，晚上往下滑 2 米，几天可以爬出来？

总结 I “蜗牛爬井”本质上是一个特殊的周期问题：前面每天有“上”有“下”，最后一天只“上”不“下”。处理思路：

- ① 去掉最后一天能爬的值（留出“井口”）；
- ② 计算剩余部分要爬的天数（有“上”有“下”）；
- ③ 再处理一个小规模数据（可列举）；



例 6 小猴子爬树，树高 25 米，白天向上爬若干米，晚上下滑 3 米，第 8 个白天向上爬了 4 米后到达树顶，每次向上爬多少米？

例 7 有 20 根胡萝卜，小兔子第一天吃 5 根，第二天不吃，并且拿到两根新的；第三天再吃 5 根，第四天不吃，并且再拿到 2 根新的……第几天时，小兔子会把胡萝卜吃完？



例 8 原有 18 根胡萝卜，小兔子第一天没吃，并且又拿到 2 根新的，第二天吃掉 5 根；第三天没吃，又拿到 2 根新的，第四天吃掉 5 根……第几天时，小兔子会把胡萝卜吃完？

总结 关于“例 8”，可以将其化归为例 7，也可以作为一个常规的周期问题（不用考虑“井口”的）来处理。



数列进阶

内容要点

简单的等比数列求和、数组与数表问题

一 简单的等比数列求和

等差数列：如果一个数列的后一项与前一项的差都相等，就称这个数列为等差数列。

后一项与前一项的差，称为这个等差数列的公差。

等差数列的求和公式： $(\text{首项} + \text{末项}) \times \text{项数} \div 2$ 。

等比数列：如果一个数列的后一项与前一项的商都相等，就称这个数列为等比数列。

例 1 计算： $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ 。



例 2 计算： $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$ 。

总结 I 错位相减求等比数列的和。



数组与数表问题

例 3 有一组数组， $(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), \dots$ 求
(1) 第 10 组中三个数的和；

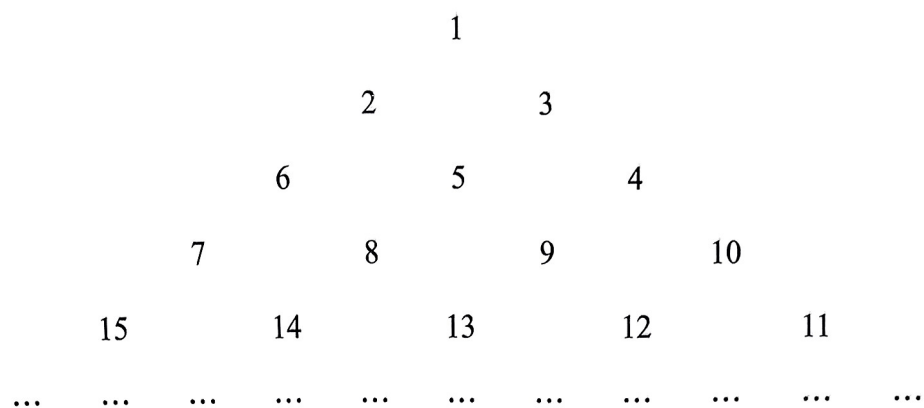


(2) 前 10 组中所有数的和;

例 4 自然数如图排列, 请问
(1) 100 在第几行左起第几个数?



(2) 第 25 行左起第 5 个数是多少?



总结 I 寻找与发现规律，估算确定范围。



格点与割补

内容要点

格点多边形面积、等分图形

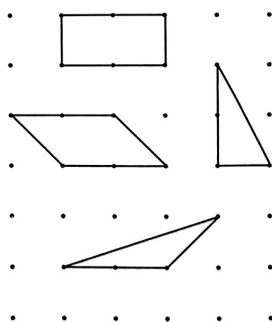
一 格点多边形面积

格点：两组不同方向的平行线的交点。

多边形：由三条或三条以上的线段首尾顺次连接所组成的平面图形叫做多边形。

格点多边形：顶点都在格点上的多边形。

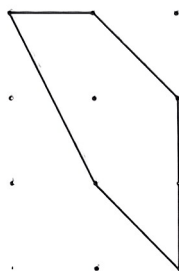
例 1 每个小正方形面积都是 1 平方厘米，求各图形的面积。



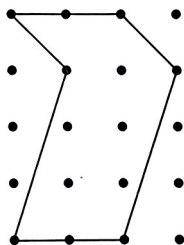
总结 | 例 1 中，我们可以通过“数格子”、“面积公式”、“分割”、“添补”，“拼接”的方法来计算多边形面积。



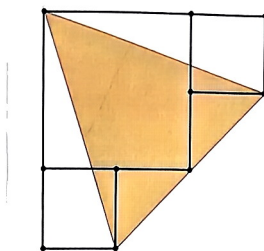
例 2 每个小正方形面积都是 1 平方厘米，求多边形的面积。



例 3 每个小正方形面积都是 2 平方厘米，求多边形的面积。



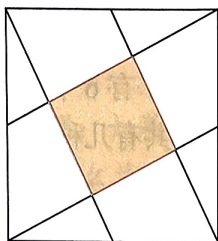
例 4 图中大正方形边长是 2，2 个小正方形边长是 1，求阴影部分三角形的面积。



等分图形

取三角形各边的中点，连结可得四个相同的小三角形，即将三角形的面积进行了 4 等分。同样，取三角形各边的三等分点，连结可得九个相同的小三角形，即将三角形的面积进行了 9 等分。这种构造方法的本质是把原来图形的面积分成了相同的小块，这其实源于除法的意义。

例 5 在一个边长为 10 厘米的正方形中，分别连接顶点与对应边中点，围成的阴影部分面积是多少平方厘米？



加乘原理 一

内容要点

加法原理、乘法原理

一 加乘原理

例 1 (1) 上海到北京，火车有 6 个班次，飞机有 7 个航班，小明要坐火车或飞机从上海到北京，一共有几种选择？



(2) 从 A 村到 B 村有 2 条路, 从 B 村到 C 村有 3 条路, 从 A 村出发, 经过 B 村, 到 C 村, 有几种走法?

总结 I 比较例 1 中的两小问, 可知: 分类用加法 (加法原理), 分步用乘法 (乘法原理)。加法原理: 如果完成一件事情有几类办法, 每一类办法中又各有几种方法, 那么总的方法数就是每一类办法中的方法数的和。

乘法原理: 如果完成一件事情有几个步骤, 每一个步骤各有几种方法, 那么总的方法数就是每个步骤的方法数的积。

利用“加法原理”时, 确保每一类方法中的每一种方法, 都能单独地完成了最终的任务, 不同的方法可相互替代; 而利用“乘法原理”时, 每一步结束, 都不能完成整个任务, 不同的步骤不能相互替代。

例 2 某班级有男三好学生 5 人, 女三好学生 4 人。

(1) 从中任选一人去领奖, 有多少种不同的选法?



(2) 从中任选男、女三好学生各一人去参加座谈会, 有多少种不同的选法?

例 3 一个礼堂有四个门, 若从一个门进, 然后从另一门出, 共有多少种不同走法?



例 4 4 个人跑 4×100 ，有几种不同的顺序可以安排？

例 5 4 个不同的小球，放到 3 个不同的盒子里，有几种放法？（允许有空盒）



例 6 一个三位密码锁，各位上数字由 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 十个数字组成。

(1) 可以设置多少种三位数的密码（各位上的数字允许重复）？

(2) 首位数字不为 0 的密码数有多少种？

(3) 首位数字是 0 的密码数有多少种？



例 7 (1) 由数字 1, 2, 3 可以组成多少个数字允许重复的三位数?

(2) 由数字 1, 2, 3 可以组成多少个数字不允许重复的三位数?

(3) 由数字 0, 1, 2 可以组成多少个数字不允许重复的三位数?

总结 I 利用“乘法原理”时，前一步尽量不要影响后一步的方法数。为了避免分类讨论，有特殊的元素或者位置时，往往优先考虑特殊的元素或者位置。



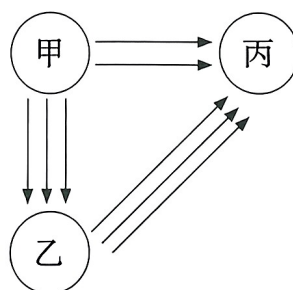
加乘原理 二

内容要点

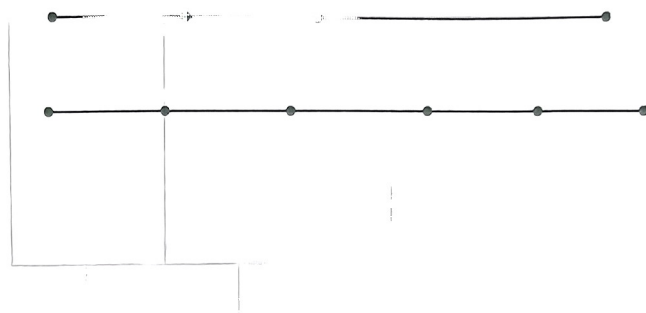
加乘原理混合应用

二 加乘原理混合运用

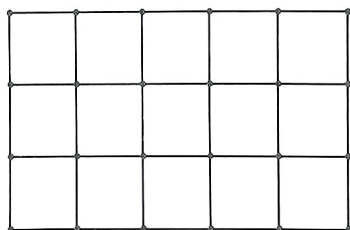
例 8 乙之间有 3 条路，乙丙之间有 3 条路，甲丙之间有 2 条路，如果走回头路，从甲到丙有几种走法？



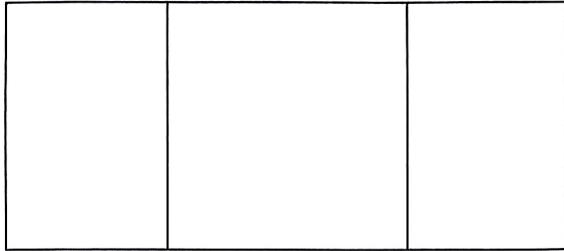
例 9 两条直线上分别有 4 个点和 6 个点，以这些点为顶点，一共可以做出多少个三角形？



例 10 图中有几个长方形（包括正方形）？



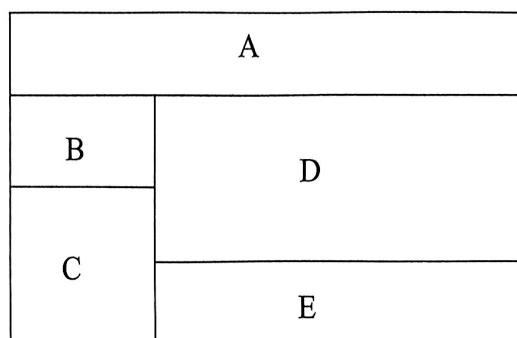
例 11 下面三个小长方形用三种不同颜色涂色，要求相邻的部分不能同色，有多少种不同的涂法？



总结 处理“涂色问题”时，为了尽量避免分类讨论，优先涂两两互相接触的部分。



例 12 把 A、B、C、D、E 五部分用 4 种不同颜色涂色，相邻的部分不能使用同一种颜色，请问共有多少种涂色方法？



逻辑推理基础

内容要点

逻辑推理基础、假设法求解逻辑推理问题、列表法求解逻辑推理问题

一 逻辑推理基础

例 1 判断：如果“甲和乙都是男生”这句话是错的，那么可以得到结论：“甲和乙都是女生”。



例 2 判断：如果“她既聪明又漂亮”这句话是错的，那么可以得到结论：“她不聪明也不漂亮”。

例 3 如果“全班同学都会打篮球”这句话是错的，那么以下哪个结论是对的？

- A：班里至少有一个同学不会打篮球
- B：全班同学都不会打篮球



例 4 判断：如果“小明喜欢数学，或者，小明喜欢语文”这句话是错的，那么可以得到结论：

A：小明不喜欢数学，或者，不喜欢语文

B：小明不喜欢数学，并且，小明不喜欢语文

例 5 (1) 如果要说明“班里至少有一个人期末数学考到了 90 分”这句话是对的，可以怎么说明？



(2) 如果要说明“班里至少有一个人期末数学考到了 90 分”这句话是错的, 可以怎么说明?

例 6 “如果天上下雨, 那么操场会湿。”这说明:

A: 如果天上不下雨, 那么操场不会湿。

B: 如果操场湿了, 说明一定下雨了。

C: 如果操场没湿, 说明一定没下雨。



二 假设法求解逻辑推理问题

例 7 甲、乙、丙三人中，一个是牧师，一个是骗子，还有一个是小丑。牧师从不说谎，骗子总说谎，小丑有时说真话有时说谎话。甲说：“我是牧师。”乙说：“我是骗子。”丙说：“我是小丑。”请问谁是牧师，谁是骗子，谁是小丑？

例 8 甲、乙、丙、丁 4 位同学的运动衫上印上了不同的号码。赵说：“甲是 2 号，乙是 3 号。”钱说：“丙是 4 号，乙是 2 号。”孙说：“丁是 2 号，丙是 3 号。”李说：“丁是 1 号、乙是 3 号。”已知赵、钱、孙、李每人都只说对了一半，请问：丙的号码是几号？

总结 | 使用假设法时，如果推理的过程正确，但是推出的结果出现矛盾，则说明一开始的假设错误。

