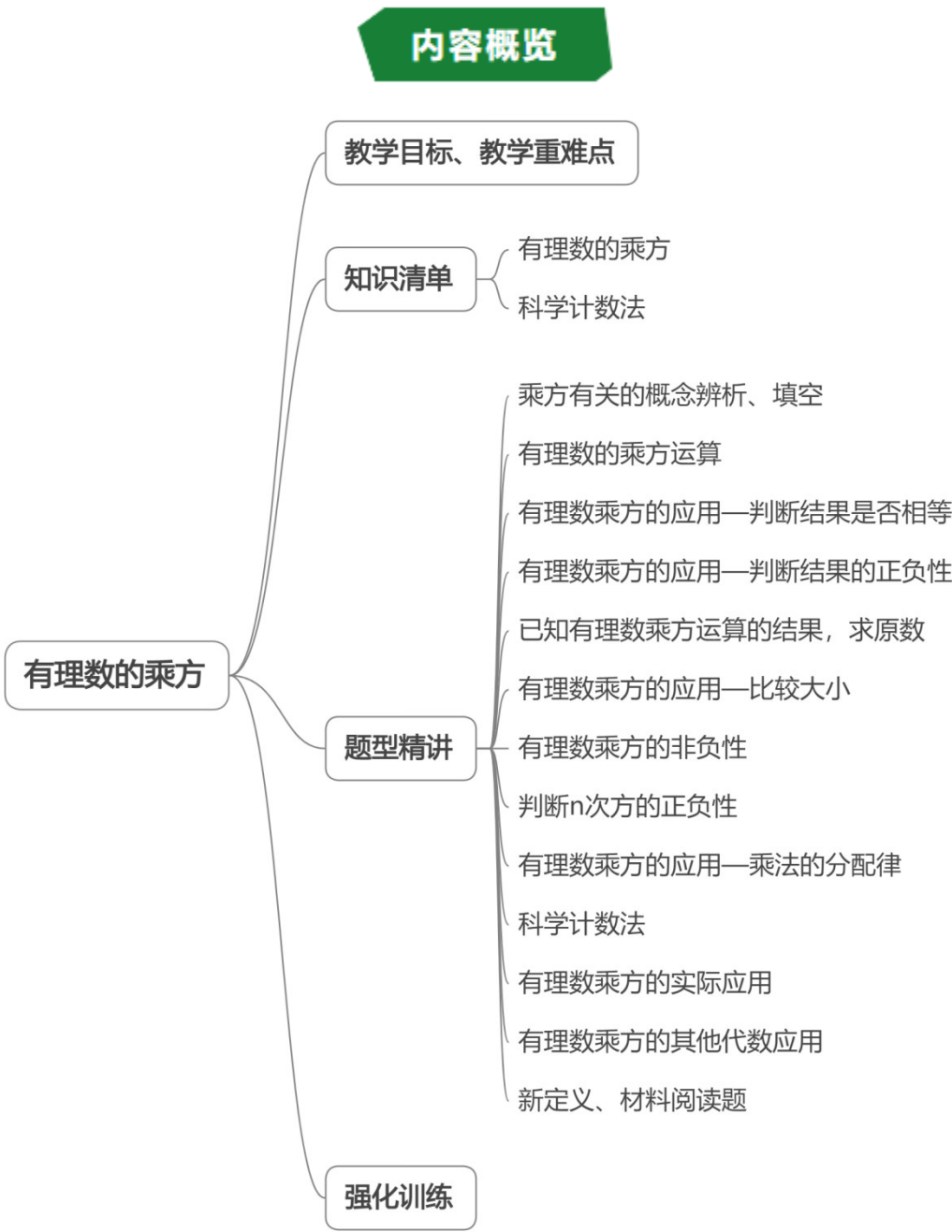


专题 1.6 有理数的乘方



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解有理数乘方的定义； 2. 掌握有理数乘方运算的符号法则，并能熟练进行乘方运算； 3. 掌握科学计数法。
教学重难点	1.重点

	(1) 知道有理数乘方的有关概念； (2) 掌握有理数的乘方运算，知道乘方运算后结果的符号； (3) 了解科学计数法。 2. 难点 (1) 有理数乘方的综合应用； (2) 有理数乘方有关的新定义题、材料阅读题等。
--	--

知识清单

知识点 1 有理数的乘方

1. 操作

将一张纸对折 1 次可以裁成 2 张，对折 2 次可以裁成 4 张，对折 3 次可以裁成几张？



可以知道，对折 2 次裁成 $2 \times 2 = 4$ (张)，对折 3 次裁成 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (张)。

2. 思考

想象一下，如果对折 5 次、10 次、20 次，那么可裁成几张呢？对折的结果又如何表示呢？

可表示为：

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2,$$

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2}_{10 \text{ 个 } 2},$$

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2}_{20 \text{ 个 } 2}.$$

20 个 2 相乘，能用较简洁的式子表示吗？

上面 2×2 ，也就是 2 个 2 相乘可以写成 2^2 。类似地， $2 \times 2 \times 2$ ，也就是 3 个 2 相乘可以写成 2^3 ， $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 可以写成 2^5 ， $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 可以写成 2^{10} 。一般地，我们将 n (n 为正整数) 个相同乘数 a 相乘，即

$$\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ 个 } a}$$

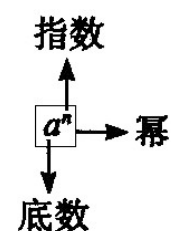
，记作“ a^n ”，读作“ a 的 n 次方”。在“ a^n ”中， a 叫做底数， n 称为指数 (当指数 n 为 1 时可以省略不写)。

求 n 个相同有理数的积的运算叫作有理数的乘方。

要点：

(1) 乘方的结果叫做幂。

(2) 乘方与幂不同，乘方是几个相同有理数的乘法运算，幂是乘方运算的结果。



(3) 底数一定是相同的有理数，当底数不是单纯的一个数时，要用括号括起来。

(4) 一个数可以看作这个数本身的一次方。例如，5 就是 5^1 ，指数 1 通常省略不写。

【即学即练】

1. (1) 4^4 的底数是_____，指数是_____；

(2) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ 的底数是_____，指数是_____；

(3) -6^2 的底数是_____，指数是_____。

【答案】 4 4 $-\frac{3}{4}$ / -0.75 3 6 2

【分析】 此题主要考查幂的含义，解题的关键是熟知 a^n 的含义： a 为底数， n 为指数，读作 a 的 n 次方，含义是 n 个 a 相乘。

(1) 根据幂的形式特点得出 4^4 的指数和底数即可；

(2) 根据幂的形式特点得出 $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ 的指数和底数即可；

(3) 根据幂的形式特点得出 -6^2 的指数和底数即可。

【详解】 解：(1) 4^4 的底数是 4，指数是 4；

故答案为：4；4；

(2) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ 的底数是 $-\frac{3}{4}$ ，指数是 3；

故答案为： $-\frac{3}{4}$ ；3；

(3) -6^2 的底数是 6，指数是 2。

故答案为：6；2。

2. 计算：

(1) $(-10)^3$ ；

(2) $\left(\frac{6}{5}\right)^2$ ；

(3) $-\frac{4^3}{7}$ ；

(4) $-(-1)^3$.

【答案】 (1) -1000

(2) $\frac{36}{25}$

(3) $-\frac{64}{7}$

(4) 1

【分析】 本题考查了乘方的运算，正数的任何次幂都是正数，负数的偶次幂是正数，负数的奇次幂是负数，0 的任何正整数次幂都等于 0 .

(1) (2) (3) (4) 根据乘方运算法则计算即可 .

【详解】 (1) 解： $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = -1000$

(2) 解： $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6}{5} \times \frac{6}{5} = \frac{36}{25}$

(3) 解： $-\frac{4^3}{7} = -\frac{4 \times 4 \times 4}{7} = -\frac{64}{7}$

(4) 解： $-(-1)^3 = -(-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

3 . 下列各组数中，相等的一组是 ()

A . 2^3 和 2^2

B . $(-2)^3$ 和 $(-3)^2$

C . $(-2)^3$ 和 -2^3

D . $(-2 \times 3)^2$ 和 $-(2 \times 3)^2$

【答案】 C

【分析】 本题考查了有理数的乘方，根据有理数的乘方法则逐项计算判断即可 . 熟练掌握运算法则是解题的关键 .

【详解】 解： A、 $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $8 \neq 4$, 故此选项不符合题意；

B、 $(-2)^3 = -8$, $(-3)^2 = 9$, $-8 \neq 9$, 故此选项不符合题意；

C、 $(-2)^3 = -8$, $-2^3 = -8$, 所以 $-2^3 = (-2)^3$, 故此选项符合题意；

D、 $(-2 \times 3)^2 = 36$, $-(2 \times 3)^2 = -36$, $36 \neq -36$, 故此选项不符合题意；

故选： C .

4 . 如果 $a^2 = (-3)^2$, 那么 a 等于 ()

A . 3

B . -3

C . 9

D . ± 3

【答案】D

【分析】 本题考查了有理数的乘方运算，熟练掌握有理数的运算法则是解题的关键。

由 $a^2 = (-3)^2 = 9$ ， $(\pm 3)^2 = 9$ 可得 $a^2 = (\pm 3)^2$ ，于是得解。

【详解】解： $\because a^2 = (-3)^2 = 9$ ， $(\pm 3)^2 = 9$ ，

$\therefore a^2 = (\pm 3)^2$ ，

$\therefore a = \pm 3$ ，

故选：D。

5. 计算： $\frac{5 \times 5 \times \cdots \times 5}{\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_n} = ()$

A . $\frac{5^m}{3n}$

B . $\frac{5m}{3^n}$

C . $\frac{m^5}{3n}$

D . $\frac{5m}{3n}$

【答案】A

【分析】 本题主要考查了有理数的乘方和有理数的乘法与加法的意义，解题的关键在于能够正确理解题意，根据乘方和乘法的意义进行解答即可。

【详解】解： $\frac{5 \times 5 \times \cdots \times 5}{\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_n} = \frac{5^m}{3^n}$ ，

故选：A。

知识点2 科学计数法

1.科学计数法

把一个大于 10 的数表示成 $a \times 10^n$ 的形式（其中 a 是整数数位只有一位的数， $1 \leq |a| < 10$ ， n 是正整数），这种记数法叫做科学记数法，如 $42\,000\,000 = 4.2 \times 10^7$ 。

要点：

(1) 负数也可以用科学记数法表示，“-”照写，其它与正数一样，如 $-3\,000 = -3 \times 10^3$ ；

(2) 把一个数写成 $a \times 10^n$ 形式时，若这个数是大于 10 的数，则 n 比这个数的整数位数少 1。

*2.有效数字

从一个数的左边第一个非零数字起，到末尾数字为止的所有数字都是这个数的有效数字。

【即学即练】

1. 2025 年，电影“哪吒之魔童闹海”票房突破 153.86 亿，将数据 153.86 亿用科学记数法表示为_____.

【答案】 1.5386×10^{10}

【分析】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】 解：153.86 亿 $= 15386000000 = 1.5386 \times 10^{10}$ ，

故答案为： 1.5386×10^{10} .

2. 在国家大数据战略的引领下，我国在人工智能领域取得显著成就. 某大数据中心存储约 58000000000 本电子书籍，将 58000000000 用科学记数法表示应为 ()

A. 5.8×10^{10} B. 58×10^9 C. 0.58×10^{11} D. 5.8×10^9

【答案】 A

【分析】 本题考查了科学记数法，根据科学记数法“科学记数法表现形式为 $a \times 10^n$ ”，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为正整数，当原数的绝对值 10 时， n 的值为所有整数位减 1”即可得，掌握科学记数法是解题的关键.

【详解】 解：58000000000 $= 5.8 \times 10^{10}$ ，

故选：A.

3. 2023 年 2 月 10 日，神舟十五号航天员乘组圆满完成了他们首次出舱任务，飞船的时速为每小时 2.8 万千米，2.8 万千米用科学记数法表示应为 ()

A. 2.8×10^5 米 B. 2.8×10^6 米 C. 2.8×10^7 米 D. 2.8×10^8 米

【答案】 C

【分析】 把一个大于 10 的数记成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 a 是整数数位只有一位的数， n 是正整数，这种记数法叫做科学记数法，由此即可得到答案.

【详解】 解：2.8 万千米用科学记数法表示为 2.8×10^7 米.

故选：C.

【点睛】 本题考查科学记数法—表示较大的数，关键是掌握用科学记数法表示较大数的方法.

4. 已知月球与地球的距离约为 384000km，这个距离用科学记数法（精确到万位）表示为_____ km.

【答案】 3.8×10^5

【分析】本题考查科学记数法，科学记数法的一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 > 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负整数．据此求解即可．

【详解】解： $384000\text{km} \approx 380000\text{km} = 3.8 \times 10^5\text{km}$ ，
故答案为： 3.8×10^5 ．

5．台湾岛是我国最大的岛屿，总面积为 35882.6258 平方公里，用科学记数法应表示为（保留三个有效数字）（ ）

- A． 3.58×10^4 方公里 B． 3.59×10^4 平方公里
C． 3.58×10^6 平方公里 D． 3.59×10^6 平方公里

【答案】B

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．数据从左边第一个非零数字起的数字都为有效数字，先用科学记数法表示该数，再保留三个有效数字即可．

【详解】解： $35882.6258 = 3.59 \times 10^4$ ，
故选：B．

【点睛】此题考查科学记数法和有效数字定义，注意 n 的值的确定方法，当原数大于 10 时， n 等于原数的整数数位减 1 ，按此方法即可正确求解．

题型精讲

题型 01 乘方有关的概念辨析、填空

【典例 1】．对于 $(-2)^3$ ，指数是_____，底数是_____， $(-2)^3 = \underline{\hspace{1cm}}$ ；对于 -4^2 ，指数是_____，底数是_____，幂是_____．

【答案】 3 -2 -8 2 4 -16

【详解】 【分析】 根据乘方的定义可解决本题．

根据乘方的定义，得 $(-2)^3$ 的底数是 -2 ，指数是 3 ， $(-2)^3 = -2 \times (-2) \times (-2) = -8$ ．

同理， -4^2 的底数是 4 ，指数是 2 ，幂是 -16 ．

故答案为： 3 ， -2 ， -8 ， 2 ， 4 ， -16 ．

【变式1】 . 对于 $(-4)^3$ 和 4^3 , 下列说法正确的是 ()

- A . 底数相同 , 指数相同
- B . 底数不同 , 指数不同
- C . 底数相同 , 运算结果不同
- D . 底数不同 , 运算结果相同

【答案】 D

【分析】 根据幂的性质判断即可 ;

【详解】 由 $(-4)^3$ 和 4^3 可知 : 指数相同 , 底数不同 ,

$$(-4)^3 = -64, -4^3 = -64, \text{运算结果相同 ;}$$

故选 D .

【点睛】 本题主要考查了幂的认识和运算 , 准确分析判断是解题的关键 .

【变式2】 . 用乘方的形式表示下列各式 , 并计算出结果 .

$$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$-\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

【答案】 $(-2)^5$ -32 $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ $\frac{16}{81}$ $-\left(\frac{3}{5}\right)^3$ $-\frac{27}{125}$

【分析】 根据幂指数代表底数相乘的次数可得出答案 .

【详解】 解 : $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^5 = -32$;

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} ;$$

$$-\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = -\left(\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$$

故答案为 : $(-2)^5$, -32 ; $\left(\frac{2}{3}\right)^4$, $\frac{16}{81}$; $-\left(\frac{3}{5}\right)^3$, $-\frac{27}{125}$.

【点睛】 本题考查幂指数所表示的意义以及有理数乘方的运算 , 比较基础 , 掌握基础概念是解题关键 .

【变式3】 . 关于式子 $(-4)^2$, 正确的说法是 ()

- A. -4 是底数，2 是幂 B. 4 是底数，2 是幂
C. 4 是底数，2 是指数 D. -4 是底数，2 是指数

【答案】 D

【分析】 由 $(-4)^2$ 知，-4 是底数，2 是指数， $(-4)^2$ 是幂，逐一验证选项即可.

【详解】 由 $(-4)^2$ 知，-4 是底数，2 是指数， $(-4)^2$ 是幂，故选项 A、B、C 错误，D 选项正确；

故选：D.

【点睛】 本题考查了幂的有关概念，掌握幂的有关概念是解题的关键.

【变式 4】 . 计算 $\underbrace{2+2+\cdots+2}_m + \underbrace{3\times 3\times\cdots\times 3}_n = (\quad)$

- A. $2m+n^3$ B. m^2+3n C. 2^m+3n D. $2m+3^n$

【答案】 D

【分析】 根据乘法的含义，可得： $\underbrace{2+2+\cdots+2}_m = 2m$ ，根据乘方的含义，可得： $\underbrace{3\times 3\times\cdots\times 3}_n = 3^n$ ，据此求解即可 .

【详解】 解： $\underbrace{2+2+\cdots+2}_m + \underbrace{3\times 3\times\cdots\times 3}_n = 2m+3^n$.

故选：D .

【点睛】 此题主要考查了有理数的乘法、有理数的乘方，解答此题的关键是要明确乘法、乘方的含义 .

题型 02 有理数的乘方运算

【典例 1】 . 计算：

- (1) $(-3)^3$; (2) $(-2)^4$; (3) $(-1.7)^2$
(4) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$; (5) $-(-2)^3$; (6) $(-2)^2 \times (-3)^2$.

【答案】 (1) -27 ; (2) 16 ; (3) 2.89 ; (4) $-\frac{64}{27}$; (5) 8 ; (6) 36 .

【分析】 根据乘方的运算法则，分别进行计算，即可得到答案 .

【详解】 解：(1) $(-3)^3 = -3^3 = -27$;

(2) $(-2)^4 = 2^4 = 16$;

$$(3) (-1.7)^2 = 1.7^2 = 2.89 ;$$

$$(4) \left(-\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{4^3}{3^3} = -\frac{64}{27} ;$$

$$(5) -(-2)^3 = 2^3 = 8 ;$$

$$(6) (-2)^2 \times (-3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36 ;$$

【点睛】 本题考查了乘方的运算法则，解题的关键是掌握运算法则，正确的进行解题。

【变式1】 . 计算：

$$(1) -3^4 ; \quad (2) -(-3)^3 ; \quad (3) -\left(\frac{2}{3}\right)^4 ;$$

$$(4) \left(\frac{4}{5}\right)^2 ; \quad (5) -\frac{3}{2^2} ; \quad (6) -\left(-\frac{2}{5}\right)^3$$

$$\text{【答案】 } (1) -81 ; (2) 27 ; (3) -\frac{16}{81} ; (4) \frac{16}{25} ; (5) -\frac{3}{4} ; (6) \frac{8}{125}$$

【分析】 根据有理数乘方运算法则计算即可。

$$\text{【详解】 解： } (1) -3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81 ;$$

$$(2) -(-3)^3 = -[(-3) \times (-3) \times (-3)] = -(-27) = 27 ;$$

$$(3) -\left(\frac{2}{3}\right)^4 = -\left[\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)\right] = -\frac{16}{81} ;$$

$$(4) \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25} ;$$

$$(5) -\frac{3}{2^2} = -\frac{3}{2 \times 2} = -\frac{3}{4} ;$$

$$(6) -\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\left[\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right)\right] = -\left(-\frac{8}{125}\right) = \frac{8}{125}$$

【点睛】 本题考查了有理数的乘方，熟练运用运算法则是解本题的关键。

【变式2】 . 口答：

$$(1) 1^3$$

$$(2) -1^{2018}$$

$$(3) (-1)^8$$

$$(4) (-1)^{2018}$$

$$(5)(-1)^7$$

$$(6)(-1)^{2017}$$

【答案】 (1)1

$$(2)-1$$

$$(3)1$$

$$(4)1$$

$$(5)-1$$

$$(6)-1$$

【分析】 根据有理数乘方运算法则运算即可 .

【详解】 (1) $1^3=1$

$$(2) -1^{2018} = -1$$

$$(3) (-1)^8 = 1$$

$$(4) (-1)^{2018} = 1$$

$$(5) (-1)^7 = -1$$

$$(6) (-1)^{2017} = -1$$

【点睛】 本题考查有理数乘方运算和相反数，解题关键是能够熟练应用有理数乘方运算法则，理解相反数的含义 .

题型 03 有理数乘方的应用—判断结果是否相等

【典例 1】 . 下列各组的两个数中，运算后的结果相等的是 ()

A . 2^3 和 3^2

B . -3^3 和 $(-3)^3$

C . -2^2 和 $(-2)^2$

D . $-\left(\frac{2}{3}\right)^3$ 和 $-\frac{2^3}{3}$

【答案】 B

【分析】 根据有理数的乘方分别计算，然后作出判断 .

【详解】 原式各项计算得到结果，比较即可 .

A 选项： $2^3=8$ ， $3^2=9$ ，不相等，故该选项不符合题意；

B 选项： $-3^3 = (-3)^3 = -27$ ，相等，故该选项符合题意；

C 选项： $-2^2 = -4$ ， $(-2)^2 = 4$ ，不相等，故该选项不符合题意；

D 选项： $-\left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$ ， $-\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$ ，不相等，故该选项不符合题意。

故选：B。

【点睛】本题考查了有理数的乘方，熟记概念是解题的关键。

【变式 1】下列各组数中，数值相等的是（ ）。

A. $-(3 \times 2)^2$ 与 -3×2^2

B. 3^2 与 2^3

C. -3^2 与 $(-3)^2$

D. -2^3 与 $(-2)^3$

【答案】D

【分析】本题主要考查有理数的乘方，解题的关键是掌握有理数的乘方运算法则。根据有理数的乘方先进行运算，再进行排除选项。

【详解】解：A. $-(3 \times 2)^2 = -36$ 与 $-3 \times 2^2 = -12$ ，不相等，故本选项不符合题意；

B. $3^2 = 9$ 与 $2^3 = 8$ ，不相等，故本选项不符合题意；

C. $-3^2 = -9$ 与 $(-3)^2 = 9$ ，不相等，故本选项不符合题意；

D. $-2^3 = -8$ 与 $(-2)^3 = -8$ 相等，故本选项符合题意；

故选：D。

【变式 2】下列各式结果相等的是（ ）

A. -1^{2025} 与 $(-1)^{2025}$

B. -2^2 与 $(-2)^2$

C. $-(-2)$ 与 $-|-2|$

D. $\frac{2^3}{3}$ 与 $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

【答案】A

【分析】本题考查了有理数的乘方，相反数，以及绝对值，熟练掌握各自的性质是解本题的关键。各选项中两式利用乘方的意义、绝对值的代数意义，以及相反数定义计算得到结果，判断即可。

【详解】解：A. $-1^{2025} = -1$ ， $(-1)^{2025} = -1$ ，故此选项符合题意；

B. $-2^2 = -4$, $(-2)^2 = 4$, 故此选项不符合题意 ;

C. $-(-2) = 2$, $-|-2| = -2$, 故此选项不符合题意 ;

D. $\frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, 故此选项不符合题意 ;

故选 A .

题型 04 有理数乘方的应用—判断结果的正负性

【典例 1】 . 下列各数中 : ① $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; ② $(-5)^{2024}$; ③ -2^2 , 负数为_____ . (填序号)

【答案】 ①③

【分析】 本题主要考查了乘方、正数和负数的定义 , 掌握乘方、正数和负数的定义是解答本题的关键 .
先根据乘方化简 , 再根据负数的定义即可得出答案 .

【详解】 解 : ① $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$, ② $(-5)^{2024} = 5^{2024}$, ③ $-2^2 = -4$,

∴ 负数为 : ①③ ,

故答案为 : ①③ .

【变式 1】 . 在 0 , $-(-1)$, $(-3)^2$, -3^2 , $-|-3|$, $-\frac{3^2}{4}$ 中 , 正整数的个数为_____ .

【答案】 2

【分析】 此题主要考查了正数 , 以及绝对值 , 乘方 , 首先把式子化简 , 然后再根据正数的定义 : 比 0 大的数是正数 , 可以选出答案 .

【详解】 解 : $-(-1) = 1$,

$(-3)^2 = 9$,

$-3^2 = -9$,

$-|-3| = -3$,

$-\frac{3^2}{4} = -\frac{9}{4}$,

∴ 正数有 $-(-1)$, $(-3)^2$, 共 2 个 .

故答案为：2 .

题型 05 已知有理数乘方运算的结果，求原数

【典例 1】 . 平方等于 16 的数是_____，立方等于 27 的数是_____ .

【答案】 ± 4 ; -3 .

【分析】 根据有理数的乘方的概念进行解答即可 .

【详解】 解： $\because (\pm 4)^2 = 16$,

$\therefore$ 平方等于 16 的数是 ± 4 ;

$\because (-3)^3 = -27$,

$\therefore$ 立方等于 27 的数是 -3 .

故答案为： ± 4 ; -3 .

【点睛】 本题考查有理数的乘方 .

【变式 1】 . 如果一个数的平方等于 $\frac{1}{64}$ ，那么这个数是_____，如果一个数的立方等于 $\frac{1}{64}$ ，那么这个数是_____ .

【答案】 $\pm \frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$

【分析】 根据平方与立方的运算即可求解 .

【详解】 $\because (\pm \frac{1}{8})^2 = \frac{1}{64}$, $(\frac{1}{4})^3 = \frac{1}{64}$

故答案为： $\pm \frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$.

【点睛】 此题主要考查乘方与立方的运算，解题的关键是熟知乘方的运算法则 .

【变式 2】 . 某数的平方是 4，则这个数的立方是 ()

A . 8

B . -8

C . ± 8

D . $\pm \frac{1}{8}$

【答案】 C

【分析】 根据平方和立方的定义去计算 .

【详解】 解： $\because$ 这个数的平方是 4， $\therefore$ 这个数可能是 2 或 -2，

2 的立方是 8，-2 的立方是-8。

故选：C。

【点睛】 本题考查平方和立方的定义，需要注意一个数的平方是 4，这个数有两种可能，是 ± 2 。

【变式 3】 若 $x^2 = 9$ ，则 x 得值是_____；若 $a^3 = -8$ ，则 a 得值是_____。

【答案】 ± 3 -2

【分析】 根据平方和立方的定义进行求解，平方等于 9 的有两个数，立方等于-8 的数有一个。

【详解】 $\because (\pm 3)^2 = 9$ ，

$\therefore x = \pm 3$ ；

$\because (-2)^3 = -8$ ，

$\therefore a = -2$ ，

故答案为： ± 3 ； -2 。

【点睛】 本题考查了平方和立方的定义，掌握平方和立方的定义是解题的关键。

【变式 4】 若 $a^2 = b^2$ ，则下列等式成立的是（ ）

A. $a = b$

B. $a = -b$

C. $-a = b$

D. $|a| = |b|$

【答案】 D

【分析】 根据有理数乘方的逆运算即可得出结论。

【详解】 解：若 $a^2 = b^2$

$\therefore a = \pm b$ ，故 A、B、C 不一定成立；

$\therefore |a| = |b|$ ，故 D 正确

故选 D。

【点睛】 此题考查的是有理数的乘方逆运算，掌握有理数乘方的意义是解决此题的关键。

题型 06 有理数乘方的应用—比较大小

【典例 1】 比较大小： $-\frac{2^3}{3}$ _____ $-\left(\frac{3}{2}\right)^2$ （填 $>$ 或 $<$ ）。

【答案】 $<$

【分析】 本题考查了有理数的大小比较，1、在数轴上表示的两个数，右边的总比左边的数大。2、正数

都大于零，负数都小于零，正数大于负数．3、两个正数比较大小，绝对值大的数大；两个负数比较大小，绝对值大的数反而小．

先计算各数，再利用有理数大小的比较方法比较即可．

【详解】解： $-\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$ ， $-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$ ，

$$\therefore \left| -\frac{8}{3} \right| > \left| -\frac{9}{4} \right|,$$

$$\therefore -\frac{8}{3} < -\frac{9}{4},$$

$$\therefore -\frac{2^3}{3} < -\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

故答案为：<．

【变式1】．比较大小： -2^9 _____ $(-2)^9$ ．（填“>”“<”或“=”）

【答案】=

【分析】本题考查了有理数比较大小及有理数的乘方运算等知识点，掌握以上知识点是解答本题的关键．根据有理数比较大小及有理数的乘方运算化简比较即可解答．

【详解】解： $\because (-2)^9 = -2^9$ ，

$$\therefore -2^9 = (-2)^9,$$

故答案为：=．

【变式2】．将 $(-2)^9$ ， $(-2)^{10}$ ， $(-2)^{11}$ 这三个数的大小关系用“<”号连接可表示为_____．

【答案】 $(-2)^{11} < (-2)^9 < (-2)^{10}$

【分析】本题比较有理数比较大小，根据有理数的乘方法则，以及正数大于负数，两个负数，绝对值大的反而小进行判断即可．

【详解】解： $\because (-2)^9 < 0$ ， $(-2)^{11} < 0$ ， $(-2)^{10} > 0$ ，且 $2^{11} > 2^9$ ，

$$\therefore (-2)^{11} < (-2)^9 < 0 < (-2)^{10};$$

故答案为： $(-2)^{11} < (-2)^9 < (-2)^{10}$ ．

【变式3】 . 将 $(-3)^2$ ， $|-3^3|$ ， $-\frac{1}{3}$ 按从小到大的顺序排列，正确的是（ ）

A . $-\frac{1}{3} < (-3)^2 < |-3^3|$

B . $|-3^3| < -\frac{1}{3} < (-3)^2$

C . $(-3)^2 < -\frac{1}{3} < |-3^3|$

D . $-\frac{1}{3} < |-3^3| < (-3)^2$

【答案】 A

【分析】 本题考查有理数的乘方、绝对值以及有理数大小比较，解题的关键是先分别化简各数，再根据有理数大小比较规则进行排序 .

先计算出 $(-3)^2$ ， $|-3^3|$ 的值，再与 $-\frac{1}{3}$ 比较大小 .

【详解】解： $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ ， $|-3^3| = |-27| = 27$ ，

$-\frac{1}{3}$ 是负数，9和27是正数，

$\therefore -\frac{1}{3}$ 最小 .

又 $\because 9 < 27$ ，

$\therefore -\frac{1}{3} < (-3)^2 < |-3^3|$ ，

故选：A .

【变式4】 . 若 $a = -3^2$ ， $b = -(-1)$ ， $c = (-2)^3$ ，则 a 、 b 、 c 的大小关系是（ ）

A . $b < c < a$

B . $a < c < b$

C . $c < b < a$

D . $b < a < c$

【答案】 B

【分析】 本题主要考查了有理数的乘方，求一个数的相反数，有理数大小比较等知识点，熟练掌握有理数的运算法则和相关概念是解题的关键 .

由题意可得 $a = -9$ ， $b = 1$ ， $c = -8$ ，然后比较其大小即可 .

【详解】解： $\because a = -3^2 = -9$ ， $b = -(-1) = 1$ ， $c = (-2)^3 = -8$ ，

$\therefore a < c < b$ ，

故选：B .

题型 07 有理数乘方的非负性

【典例 1】 . 若 $(a-2)^2 + |b+1| = 0$, 则 b^a 的值为 ()

A . 2

B . 1

C . -1

D . -2

【答案】 B

【分析】 本题考查了非负数的性质：掌握几个非负数的和为 0，则这几个非负数分别等于 0，并正确得出未知数的值是解题的关键 .

根据非负数的性质列出方程求出 a 、 b 的值，再代入所求代数式计算即可 .

【详解】 解： $\because (a-2)^2 + |b+1| = 0$,

$$\therefore a-2=0, b+1=0 ,$$

$$\therefore a=2, b=-1 ,$$

$$\therefore b^a = (-1)^2 = 1 .$$

故选：B .

【变式 1】 . 若 $|2m-4| + (n+3)^2 = 0$, 则 $(m+n)^{2019} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【分析】 本题考查非负性，有理数的乘方运算，根据非负性求出 m, n 的值，再根据乘方的法则进行计算即可 .

【详解】 解： $\because |2m-4| + (n+3)^2 = 0$,

$$\therefore 2m-4=0, n+3=0 ,$$

$$\therefore m=2, n=-3 ,$$

$$\therefore (2-3)^{2019} = -1 ;$$

故答案为：-1 .

【变式 2】 . 如果 $|y+2| + (x-3)^2 = 0$, 那么 $x-2y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 7

【分析】 本题考查非负性，有理数的运算，利用非负性求出 x, y 的值，再利用有理数的运算法进行计算即可 .

【详解】解：∵ $|y+2|+(x-3)^2=0$ ，

$$\therefore y+2=0, x-3=0,$$

$$\therefore y=-2, x=3,$$

$$\therefore x-2y=3-2\times(-2)=7;$$

故答案为：7．

【变式3】．若 $(a-3)^2$ 与 $|b+2|$ 互为相反数，则 b^a 的值为（ ）

A．6

B．8

C．-6

D．-8

【答案】D

【分析】本题考查了非负数的性质：掌握几个非负数的和为0，则这几个非负数分别等于0，并正确得出未知数的值是解题的关键．根据非负数的性质列出方程求出未知数的值，再代入所求代数式计算即可．

【详解】解：∵ $(a-3)^2$ 和 $|b+2|$ 互为相反数，

$$\therefore (a-3)^2+|b+2|=0,$$

$$\therefore a-3=0, b+2=0,$$

$$\therefore a=3, b=-2,$$

$$\therefore b^a=(-2)^3=-8.$$

故选：D．

【变式4】．已知 m 、 n 满足 $|2m+4|+(n-3)^2=0$ ，那么 $(m+n)^{2024}$ 的值为_____．

【答案】1

【分析】本题主要考查绝对值与偶次幂的非负性、及有理数的乘方等，理解并运用绝对值与偶次幂的非负性、及有理数的乘方是解题的关键．

由题意易得 $2m+4=0, n-3=0$ ，则可求 m 、 n 的值，进而代入求解即可．

【详解】解：∵ m 、 n 满足 $|2m+4|+(n-3)^2=0$ ，

$$\therefore 2m+4=0, n-3=0,$$

$$\therefore m=-2, n=3,$$

$$\therefore (m+n)^{2024} = (-2+3)^{2024} = 1 ;$$

故答案为：1 .

题型 08 判断 n 次方的正负性

【典例 1】 . $(-1)^{201} + (-1)^{202}$ 应等于 ()

- A . 0 B . 1 C . -1 D . 2

【答案】 A

【分析】 本题主要考查了有理数的乘方 . 根据有理数的乘方运算法则计算即可求解 .

【详解】 解： $(-1)^{201} + (-1)^{202} = -1 + 1 = 0$,

故选：A .

【变式 1】 . 已知 n 表示正整数，则 $1^n + (-1)^{n+1}$ 的值是 ()

- A . 0 B . 1 C . 1 或 0 D . 以上答案都不对

【答案】 D

【分析】 n 为正整数，可能是偶数也可能是奇数，所以分当 n 为奇数， n 为偶数时两种情况考虑，即可求解 .

【详解】 解：当 n 为奇数时：

$$1^n + (-1)^{n+1} = 1 + 1 = 2 ;$$

当 n 为偶数时：

$$1^n + (-1)^{n+1} = 1 - 1 = 0 ;$$

故选：D .

【点睛】 本题考查了有理数的乘方，本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件 .

题型 09 有理数乘方的应用—乘法的分配律

【典例 1】 . 计算 $(-2)^{11} + (-2)^{10}$ 的值是 ()

- A . -2 B . $(-2)^{21}$ C . 0 D . -2^{10}

【答案】 D

【分析】 本题考查了有理数的乘方，利用有理数的乘方的运算法则是解题的关键。将 $(-2)^{11}$ 写成 $-2 \times (-2)^{10}$ 的形式进行计算即可。

【详解】解： 原式 $= -2 \times (-2)^{10} + (-2)^{10}$

$$= (-2)^{10} \times (-2 + 1)$$

$$= (-2)^{10} \times (-1)$$

$$= -2^{10} .$$

故选：D。

【变式1】 . 计算 $(-2)^{2024} + (-2)^{2025}$ 的结果是_____。

【答案】 -2^{2024}

【分析】 根据有理数乘方运算的意义可得 $(-2)^{2025} = (-2)^{2024} \times (-2)$ ，再提取公因数计算即可。
 本题考查了有理数乘方运算。

【详解】解： $(-2)^{2024} + (-2)^{2025}$

$$= (-2)^{2024} + (-2) \times (-2)^{2024}$$

$$= [1 + (-2)] \times (-2)^{2024}$$

$$= (-1) \times 2^{2024}$$

$$= -2^{2024}$$

故答案为 -2^{2024} 。

【变式2】 . 若 n 为正整数，则计算 $(-2)^{2n+1} + 2 \times (-2)^{2n}$ 的结果是 ()

- A . 0 B . 1 C . 2^{2n+1} D . -2^{2n+1}

【答案】 A

【分析】 根据 $2n$ 为偶数， $2n+1$ 为奇数，负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数，计算即可。

【详解】解： $(-2)^{2n+1} + 2 \times (-2)^{2n}$

$$= -2^{2n+1} + 2^{2n+1}$$

$$= 0 ,$$

故选：A。

【点睛】 本题考查了有理数的乘方，解题的关键是注意符号。

题型 10 科学计数法

【典例 1】 . 第六代战斗机是一种人工智能控制的吸气式超音速战斗机，此类战机速度预计可以突破 5 马赫，飞行一小时的距离约为 $22100km$ ，将数据 22100 用科学记数法表示时，正确的是 ()

- A . 2.221×10^2 B . 22.1×10^3 C . 2.21×10^4 D . 0.221×10^5

【答案】 C

【分析】 本题考查了科学记数法的表示方法 . 直接根据科学记数法的表示方法计算即可 .

【详解】 解： $22100 = 2.21 \times 10^4$ ，

故选：C .

【变式 1】 . 今年春节档电影《哪吒之魔童闹海》一路高歌猛进，在全球范围内引起了轰动，标志着中国动画电影达到了新高度 . 截止目前，国内累计票房已突破 150 亿元，数据 150 亿用科学记数法表示为 ()

- A . 150×10^8 B . 1.5×10^9 C . 1.5×10^{10} D . 0.15×10^{11}

【答案】 C

【分析】 本题考查了科学记数法的运用，掌握科学记数法的表示形式，正确确定 a, n 的值是关键 .

科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$)，确定 n 值的方法：当原数的绝对值大于或等于 10 时，把原数变为 a 时，小数点向左移动的位数即为 n 的值；当原数的绝对值小于 1 时，把原数变为 a 时，小数点向右移动位数的相反数即为 n 的值，由此即可求解 .

【详解】 解：150 亿 $= 15000000000 = 1.5 \times 10^{10}$ ，

故选：C .

【变式 2】 . 经中国旅游研究院综合测算，今年“五一”假日期间全国接待国内游客 1.47 亿人次，1.47 亿用科学记数法表示为_____.

【答案】 1.47×10^8

【分析】 本题考查用科学记数法表示较大的数，绝对值大于 1 的数可以用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^n$ ， n 为正整数，且比原数的整数位数少 1，据此可以解答 .

【详解】 解：1.47 亿 $= 147000000$ 用科学记数法表示为 1.47×10^8 .

故答案为： 1.47×10^8

【变式3】 . 减少过度包装既节约资源又保护环境，据测算，如果全国每年减少10%的过度包装纸用量，那么可减排二氧化碳 3.12×10^6 吨，把 3.12×10^6 写成原数为_____.

【答案】 3120000

【分析】 本题考查了科学记数法的表示方法，科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值大于等于10时， n 是非负数，当原数绝对值小于1时， n 是负数，表示时关键是要正确确定 a 的值以及 n 的值.

【详解】解：把 3.12×10^6 写成原数为3120000，

故答案为：3120000.

【变式4】 . 2024年，安徽省加快能源清洁低碳转型和新型电力系统建设，新增光伏发电装机1088万千瓦，数据1088万用科学记数法表示为_____.

【答案】 1.088×10^7

【分析】 本题考查科学记数法，根据科学记数法的表示方法 $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$), n 为整数，正确的确定 a, n 的值即可.

【详解】解： $1088 \text{ 万} = 1088 \times 10^4 = 1.088 \times 10^7$ ，

故答案为： 1.088×10^7 .

题型11 有理数乘方的实际应用

【典例1】 . 某种细胞每分钟分裂成3个，一个细胞经过3分钟分裂成 27 个，再继续分裂 t 分钟后共分裂成()

- A. $9t$ 个 B. 3^{3t} 个 C. 3^{3+t} 个 D. 9^t 个

【答案】 C

【分析】 本题考查了乘方的意义. 熟练掌握乘方的意义是解决本题的关键.

根据每分钟分裂成3个，共分裂 $(3+t)$ 分钟，根据乘方的意义即得结论.

【详解】 $\because$ 3分钟分裂了3次，再过 t 分钟共分裂了 $(3+t)$ 次，

由题意可知，每分钟分裂成3个，3分钟分裂成 $27 = 3^3$ 个，

∴再过 t 分钟后共分裂成了 3^{3+t} . 故选 C .

【变式 1】 . 一根 1 米长的木棒，第 1 次截去一半，第 2 次截去剩下部分的一半，如此截下去，第 4 次截完后剩下的木棒长为 ()

- A . $\frac{15}{16}$ 米 B . $\frac{1}{16}$ 米 C . $\frac{1}{8}$ 米 D . $\frac{63}{64}$ 米

【答案】 B

【分析】 此题考查了有理数的乘方，理解题意列出式子是解本题的关键 . 根据题意列出算式计算即可得到结果 .

【详解】 解：根据第 1 次截取后，剩 $\frac{1}{2}$,

第 2 次截取后，剩 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$,

第 3 次截取后，剩 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

第 4 次后剩下 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, 即 $1 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ (米)

故选 B .

【变式 2】 . 一根 2m 长的绳子，第一次剪去一半，第二次剪去剩下的一半，这样剪下去，剪第 2023 次后剩下的绳子的长度为 ()

- A . $\left(\frac{1}{2}\right)^{2020}$ m B . $\left(\frac{1}{2}\right)^{2021}$ m
C . $\left(\frac{1}{2}\right)^{2022}$ m D . $\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}$ m

【答案】 C

【分析】 本题考查有理数的乘方，第一次后剩下原长的 $\frac{1}{2}$; 第二次后剩下原长的 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; 第三次后剩下原长的 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; ; 第 2023 次后剩下原长的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}$, 这个数乘以绳子的原长即可 .

【详解】 解：第一次后剩下原长的 $\frac{1}{2}$;

第二次后剩下原长的 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ；

第三次后剩下原长的 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ；

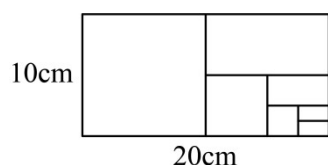
.....

第 2023 次后剩下原长的 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2023}$.

∴ 剪第 2023 次后剩下的绳子的长度为 $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2023} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2022}$ (m) .

故选：C .

【变式 3】 . 如图是一张长 20cm、宽 10cm 的长方形纸片，第一次裁去一半，第 2 次裁去剩下部分的一半，...，按照此方式裁剪下去，第 6 次裁剪后剩下的长方形的面积是 ()



A . $200 \times \frac{1}{2^6} \text{ cm}^2$

B . $200 \times \left(1 - \frac{1}{2^6}\right) \text{ cm}^2$

C . $200 \times \frac{1}{2^7} \text{ cm}^2$

D . $200 \times \left(1 - \frac{1}{2^7}\right)^3 \text{ cm}^2$

【答案】 A

【分析】 本题考查了有理数的乘方，分别求出第 1 次和第 2 次裁剪后剩下的图形的面积是解题的关键 .

先求出第 1 次和第 2 次裁剪后剩下的图形的面积，总结出一般变化规律，即可解答 .

【详解】 解：长方形的面积为： $20 \times 10 = 200 (\text{cm}^2)$,

第 1 次裁剪后剩下的长方形的面积 $200 \times \frac{1}{2} \text{ cm}^2$,

第 2 次裁剪后剩下的长方形的面积 $200 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 200 \times \frac{1}{2^2} \text{ cm}^2$,

.....

第 6 次裁剪后剩下的长方形的面积 $200 \times \frac{1}{2^6} \text{ cm}^2$,

故选：A．

题型 12 有理数乘方的其他代数应用

【典例 1】．已知 $|x| = 5$ ， $y^2 = 4$ ，且 $xy > 0$ ，则 $x - y$ 的值等于_____．

【答案】 3 或 -3

【分析】 本题考查了绝对值的意义，有理数的乘方，有理数的减法运算，根据绝对值的意义，有理数的乘方得定义分别求出 x ， y 的值，然后结合 $xy > 0$ 进行分类讨论即可求解，解题的关键是熟练掌握知识点的应用及分类讨论思想．

【详解】解： $\because |x| = 5$ ， $y^2 = 4$ ，

$\therefore x = \pm 5$ ， $y = \pm 2$ ，

由 $xy > 0$ ，

则 ① $x = 5$ ， $y = 2$ ，

$\therefore x - y = 5 - 2 = 3$ ；

② $x = -5$ ， $y = -2$ ，

$\therefore x - y = -5 - (-2) = -3$ ；

故答案为：3 或 -3．

【变式 1】．若 x 、 y 互为相反数， a 、 b 互为倒数， c 的绝对值等于 2，则 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2020} - (-ab)^{2019} + c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 5

【分析】 本题主要考查有理数的混合运算，先根据相反数的性质和倒数的定义及绝对值的性质得出 $x + y = 0$ ， $ab = 1$ ， $c = 2$ 或 $c = -2$ ，再分别代入计算可得．

【详解】解： $\because x$ 、 y 互为相反数， $\therefore x + y = 0$ ，

$\because a$ 、 b 互为倒数， $\therefore ab = 1$ ，

$\because c$ 的绝对值等于 2， $\therefore c = 2$ 或 $c = -2$ ，

当 $c = 2$ 时，原式 $= 0 - (-1) + 4 = 5$ ；

当 $c = -2$ 时，原式 $= 0 - (-1) + 4 = 5$ ；

综上，原式的值为 5，

故答案为：5．

【变式 2】．已知 a 、 b 互为相反数， c 、 d 互为倒数， m 是绝对值最小的数， n 的绝对值为 2.5，则

$7m + \frac{a+b}{5} - n + cd$ 的值是_____．

【答案】 3.5 或 -1.5

【分析】 本题主要考查了代数式求值，相反数、倒数、绝对值以及数轴的意义，直接利用相反数、倒数、绝对值以及数轴的意义得出： $a+b=0$ ， $cd=1$ ， $m=0$ ， $n=2.5$ 或 -2.5 ，进而代入得出答案．

【详解】 解：∵ a 、 b 互为相反数，

$$\therefore a+b=0；$$

∵ c 、 d 互为倒数，

$$\therefore cd=1；$$

∵ m 是绝对值最小的数，

$$\therefore m=0；$$

∵ n 的绝对值为 2.5，

$$\therefore n=2.5 \text{ 或 } -2.5；$$

$$\text{当 } n=2.5，7m + \frac{a+b}{5} - n + cd = 7 \times 0 + \frac{0}{5} - 2.5 + 1 = -1.5；$$

$$\text{当 } n=-2.5，7m + \frac{a+b}{5} - n + cd = 7 \times 0 + \frac{0}{5} - (-2.5) + 1 = 3.5．$$

综上所述，所求代数式的值为：-1.5 或 3.5．

题型 13 新定义、材料阅读题

【典例 1】．对于有理数 a ， b ，定义新运算： $a \otimes b = 2a^2 - b$ ，如 $4 \otimes 3 = 2 \times 4^2 - 3 = 29$ ，则

$(-4) \otimes [2 \otimes (-1)]$ 的值为_____．

【答案】 23

【分析】 本题考查有理数的混合运算，根据新定义，列出算式进行计算即可，掌握新定义的法则，正确的计算，是解题的关键．

【详解】解： $(-4) \otimes [2 \otimes (-1)]$

$$= (-4) \otimes (2 \times 2^2 + 1)$$

$$= (-4) \otimes 9$$

$$= 2 \times (-4)^2 - 9$$

$$= 32 - 9$$

$$= 23 ;$$

故答案为：23 .

【变式1】 . 学习情境·新定义 定义新运算：对于任意有理数 a 和 b ，规定： $a \otimes b = \begin{cases} ab^2 (a > b) \\ -ab^2 (a \leq b) \end{cases}$ ，则

$$[(-3) \otimes 2] \otimes \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}} .$$

【答案】3

【分析】 本题考查的新定义运算的含义，含乘方的有理数的混合运算，熟练掌握运算是解题的关键；根据新定义进行计算即可 .

【详解】解： $[(-3) \otimes 2] \otimes \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$= [-(-3) \times 2^2] \otimes \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 12 \otimes \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 3 .$$

故答案为：3 .

【变式2】 . 求 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2022}$ 的值，可令 $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2022}$ ，则

$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2023}$ ，因 $2S - S = 2^{2023} - 1$. 仿照以上推理，计算出 $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{2024}$ 的值为 _

【答案】 $\frac{5^{2025} - 1}{4}$

【分析】 本题考查了有理数的乘方，有理数的减法运算，熟练掌握有理数的乘方，有理数的减法运算是解题的关键．

由题意可令 $S = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{2024}$ ，则 $5S = 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{2024} + 5^{2025}$ ，再把两个式子相减即可求得结果．

【详解】 解：令 $S = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{2024}$ ，

则 $5S = 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{2024} + 5^{2025}$ ，

$\therefore 4S = 5^{2025} - 1$ ，

$\therefore S = \frac{5^{2025} - 1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{5^{2025} - 1}{4}$ ．

强化训练

一、单选题

1. $-\left(-\frac{1}{2}\right)$ ， -1 ， 0 ， -2^2 ， $(-1)^4$ ， $-|-2|$ ， $-(-1)^2$ 中，是正有理数的有 () 个．

A . 1

B . 2

C . 3

D . 4

【答案】 B

【分析】 先化简各数，再判断即可．

【详解】 $-\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 是正有理数， $-2^2 = -4$ 是负有理数， $(-1)^4 = 1$ 是正有理数， $-|-2| = -2$ 是负有理数， $-(-1)^2 = -1$ 是负有理数，

正有理数有 $-\left(-\frac{1}{2}\right)$ ， $(-1)^4$ ，

故选 B．

【点睛】 本题考查了有理数的分类，绝对值的定义，多重符号的化简，以及乘方的意义，正确化简各数是解答本题的关键．

2. $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$ 的值是 ()

A. $-\frac{9}{16}$

B. $\frac{9}{16}$

C. $-\frac{16}{9}$

D. $\frac{16}{9}$

【答案】B

【分析】根据有理数的乘方运算法则进行计算即可；

【详解】解： $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$

故选：B

【点睛】本题主要考查有理数的乘方，掌握有理数的乘法运算法则是解题的关键．

3. 下列各组数中，相等的一组是（ ）

A. $-(-1)$ 与 $-|-1|$

B. -3^2 与 $(-3)^2$

C. $(-4)^3$ 与 -4^3

D. $\frac{2^2}{3}$ 与 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

【答案】C

【分析】根据有理数的乘方的定义，绝对值的性质对各选项分别计算，然后利用排除法求解．

【详解】解：A、 $-|-1|=-1$ ， $-(-1)=1$ ， $-(-1) \neq -|-1|$ ，故本选项错误；

B、 $(-3)^2=9$ ， $-3^2=-9$ ， $9 \neq -9$ ，故本选项错误；

C、 $(-4)^3=-64$ ， $-4^3=-64$ ， $(-4)^3=-4^3$ ，故本选项正确；

D、 $\frac{2^2}{3}=\frac{4}{3}$ ， $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ ， $\frac{4}{3} \neq \frac{4}{9}$ ，故本选项错误．

故选：C．

【点睛】本题考查了绝对值、有理数的乘方．解题的关键是掌握有理数的乘方运算法则，要注意 -4^3 与 $(-4)^3$ 的区别．

4. 696000 这个数据用科学记数法表示为（ ）

A. 696×10^3

B. 69.6×10^4

C. 6.96×10^5

D. 6.96×10^6

【答案】C

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值大于10时， n 是正

数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负数。

【详解】696000 用科学记数法表示为 6.96×10^5 ，故 C 正确。

故选：C。

【点睛】本题考查用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 可以用整数位数减去 1 来确定。用科学记数法表示数，一定要注意 a 的形式，以及指数 n 的确定方法。

5. 以下等式成立的是 ()

A. $2^3 = 2 \times 3$

B. $2 + 2 + 2 = 2^3$

C. $2^3 = 2 \times 2 \times 2$

D. $-2^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

【答案】C

【分析】根据乘方的定义将各数解答即可。

【详解】解：A， $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ ，故不符合题意。

B， $2 + 2 + 2 = 2 \times 3$ ，故不符合题意。

C， $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ ，故符合题意。

D， $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2$ ，故不符合题意。

故选 C。

【点睛】本题考查了有理数的乘方，计算时要注意符号随指数的奇偶性的不同而有所变化。

6. 已知 $|2x - 6| + (5 + y)^2 = 0$ ，则 y^x 的值为 ()。

A. 15

B. -15

C. -125

D. 125

【答案】C

【分析】根据绝对值和平方的非负性，可求 x, y ，代入求解即可。

【详解】解：根据题意得， $2x - 6 = 0$ ， $5 + y = 0$ ，

$\therefore x = 3$ ， $y = -5$ ，

$\therefore y^x = (-5)^3 = -125$ 。

故选 C。

【点睛】本题考查了非负数，解题的关键是熟练掌握三种非负数：绝对值、偶次方、算术平方根。

7. 计算 $(-2)^{99} + (-2)^{100}$ 的结果是 ()

A . 2^{99}

B . -2

C . 2

D . -2^{99}

【答案】A

【分析】先把 $(-2)^{100}$ 化为 $(-2)^{99} \times 2$ ，再利用乘法的分配律进行计算即可得到答案.

【详解】解： $(-2)^{99} + (-2)^{100}$

$$= (-2)^{99} + (-2)^{99} \times 2$$

$$= (-2)^{99} \times (1 + 2)$$

$$= -1 \times 3 \times 2^{99} = -3 \times 2^{99}$$

故选 A

【点睛】本题考查的是有理数的乘方的含义，乘法分配律的应用，掌握“有理数的乘方的含义”是解本题的关键.

8. 1 m 长的木棒，第一次截去它的一半，第二次截去剩下的一半，如此下去，第六次截去之后剩下的木棒是().

A . $\frac{1}{12}$

B . $\frac{1}{16}$

C . $\frac{1}{32}$

D . $\frac{1}{64}$

【答案】D

【分析】根据题意列出算式，计算即可得到结果 .

【详解】解：第一次截去它的一半，剩下的木棒长为 $1 \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ m，

第二次截去剩下的一半，剩下的木棒长为 $\frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ m，

第三次截去剩下的一半，剩下的木棒长为 $\frac{1}{4} \times (1 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ m，

....

第六次截去剩下的一半，剩下的木棒长为 $(\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64}$ m，

故选：D .

【点睛】此题考查了有理数的乘方的应用，熟练掌握乘方的意义是解本题的关键 .

9. 若 a 是最大的负整数， b 是绝对值最小的有理数， c 是倒数等于它本身的自然数，则 $a^{2021} + 2022b + c^{2020}$ 的值为 ()

A . 2020

B . 2021

C . 2022

D . 0

【答案】 D

【分析】 根据 a 是最大的负整数， b 是绝对值最小的有理数， c 是倒数等于它本身的自然数，可以得到 $a = -1$ ， $b = 0$ ， $c = 1$ ，然后所求式子计算即可．

【详解】 解：∵ a 是最大的负整数， b 是绝对值最小的有理数， c 是倒数等于它本身的自然数，

∴ $a = -1$ ， $b = 0$ ， $c = 1$ ，

$$a^{2021} + 2022b + c^{2020}$$

$$= (-1)^{2021} + 2022 \times 0 + 1^{2020}$$

$$= -1 + 0 + 1 = 0$$

故选：D．

【点睛】 本题考查有理数的混合运算，解答本题的关键是求出 a ， b ， c 的值．

10．观察算式： $3^1 = 3$ ， $3^2 = 9$ ， $3^3 = 27$ ， $3^4 = 81$ ， $3^5 = 243$ ， $3^6 = 729$ ， $3^7 = 2187$ ， $3^8 = 6561$ ，...．通过观察，用你所发现的规律确定 3^{2021} 的个位数字是（ ）

A . 3

B . 9

C . 7

D . 1

【答案】 A

【分析】 从运算的结果可以看出尾数以 3、9、7、1 四个数字一循环，用 2021 除以 4，余数是几就和第几个数字相同，由此解决问题即可．

【详解】 解：已知 $3^1 = 3$ ，末位数字为 3，

$3^2 = 9$ ，末位数字为 9，

$3^3 = 27$ ，末位数字为 7，

$3^4 = 81$ ，末位数字为 1，

$3^5 = 243$ ，末位数字为 3，

$3^6 = 729$ ，末位数字为 9，

$3^7 = 2187$ ，末位数字为 7，

$3^8 = 6561$ ，末位数字为 1，

...

由此得到：3 的 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... 次幂的末位数字以 3、9、7、1 四个数字为一循环，

又 $2021 \div 4 = 505 \dots 1$ ，

所以 3^{2021} 的末位数字与 3^1 的末位数字相同是 3。

故选：A。

【点睛】 此题考查尾数特征及规律型：数字的变化类，通过观察得出 3 的乘方的末位数字以 3、9、7、1 四个数字为一循环是解决问题的关键。

二、填空题

11. 在 $(-1)^5$ ， $(-1)^4$ ， -2^3 ， $(-3)^2$ 这四个数中，负数有_____个。

【答案】 2

【分析】 本题主要考查了有理数的乘方，正数和负数的定义等知识点，熟练掌握乘方的定义并能正确进行计算是解决此题的关键，先利用有理数的相应的法则进行化简运算，然后再根据正负数的定义即可判断。

【详解】 解：∵ $(-1)^5 = -1 < 0$ ，是负数；

$(-1)^4 = 1 > 0$ ，是正数；

$-2^3 = -8 < 0$ ，是负数；

$(-3)^2 = 9 > 0$ ，是正数；

∴ 负数有 $(-1)^5$ ， -2^3 ，共 2 个。

故答案为：2。

12. 比较大小： $(-3)^2$ _____ $|-10|$ 。（填“>”“<”或“=”）

【答案】 <

【分析】 先整理数据， $(-3)^2 = 9$ ， $|-10| = 10$ ，进而得出大小关系。

【详解】 解：∵ $(-3)^2 = 9$ ， $|-10| = 10$ ，

又 $9 < 10$ ，

∴ $(-3)^2 < |-10|$ 。

故答案为：<。

【点睛】 本题考查有理数的比较大小，本题需要先整理数据，再进行比较即可，题目较简单．

13. $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$ 表示_____个_____连乘，它的底数是_____，指数是_____．

【答案】 3 $-2\frac{1}{2}$ $-2\frac{1}{2}$ 3

【分析】 根据有理数幂的定义进行填空．

【详解】 解： $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$ 表示 3 个 $-2\frac{1}{2}$ 连乘，底数是 $-2\frac{1}{2}$ ，指数是 3．

故答案是：3； $-2\frac{1}{2}$ ； $-2\frac{1}{2}$ ；3．

【点睛】 本题考查有理数幂的概念，解题的关键是理解有理数幂的定义．

14. 计算： $(-3)^3 =$ _____．

【答案】 -27

【分析】 根据有理数的乘方进行运算即可．

【详解】 $(-3)^3 = -27$ ；

故答案为 -27．

【点睛】 本题主要考查有理数的乘方，熟练掌握有理数的乘方是解题的关键．

15. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 1$ 的值为_____．

【答案】 $-\frac{1}{8}$

【分析】 根据有理数乘方的意义和减法法则计算即可．

【详解】 解： $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{1}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{9}{8}$ ．

故答案为： $-\frac{1}{8}$ ．

【点睛】 此题考查的是有理数的运算，掌握有理数乘方的意义和减法法则是解题关键．

16. 计算： $-1^{2025} \times |-2| =$ _____．

【答案】 -2

【分析】 本题主要考查有理数的乘方、绝对值及有理数的乘法．先算乘方、去绝对值，进而得出答案．

【详解】解： $-1^{2025} \times |-2| = -1 \times 2 = -2$ ，

故答案为： -2 。

17. 定义 $a \times b = a^3 - b^2$ ，则 $(2 \times 3) \times (-1) =$ _____。

【答案】 -2

【分析】根据新定义运算即可求解。

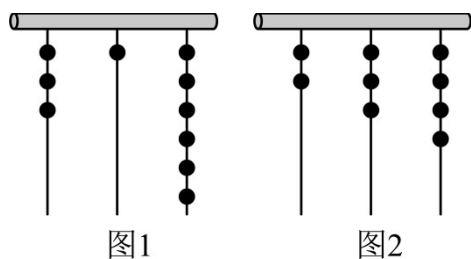
【详解】 $2 \times 3 = 2^3 - 3^2 = -1$

$\therefore (2 \times 3) \times (-1) = (-1) \times (-1) = -1 - 1 = -2$

故答案为 -2 。

【点睛】此题主要考查有理数的运算，解题的关键是熟知新定义运算法则。

18. 我国古代《易经》一书中记载，远古时期，人们通过在绳子上打结来记录数量，即“结绳记数”。如图，一位母亲在从右到左依次排列的绳子上打结，满七进一，用来记录孩子自出生后的天数，如图1，孩子出生后的天数 $= 3 \times 7^2 + 1 \times 7^1 + 6 = 147 + 7 + 6 = 160$ （天），请根据图2，计算孩子自出生后的天数是_____天。



【答案】123

【分析】本题考查有理数的知识，解题的关键是掌握有理数的混合运算，根据题意中的计算方法，列式计算，即可。

【详解】解：由题意得，图2，计算孩子自出生后的天数 $= 2 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 4 = 98 + 21 + 4 = 123$ ，

故答案为：123。

三、解答题

19. 计算： $-3^2 \div (-3)^2 - (-3) \times (-2) + |-5|$ 。

【答案】 -2

【分析】先算乘方，再算乘法和化简绝对值，最后计算加减，即可求解。

【详解】解： $-3^2 \div (-3)^2 - (-3) \times (-2) + |-5|$

$$\begin{aligned}
 &= -9 \div 9 - (-3) \times (-2) + |-5| \\
 &= -1 - 6 + 5 \\
 &= -2 .
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查了有理数的混合运算，熟练掌握有理数的混合运算顺序是解题的关键．

20．计算：

$$\begin{aligned}
 &(1) (-2)^6 . \quad (2) (-10)^5 . \quad (3) (-0.1)^3 . \\
 &(4) \left(-\frac{3}{2}\right)^4 . \quad (5) -(-2)^5 . \quad (6) -3^4 . \\
 &(7) \left(-\frac{4}{3}\right)^3 . \quad (8) -0.2^4 . \quad (9) -\left(-1\frac{1}{2}\right)^4 .
 \end{aligned}$$

【答案】 (1) 64 (2) -100000 (3) -0.001 (4) $\frac{81}{16}$ (5) 32 (6) -81 (7) $-\frac{64}{27}$ (8) -0.0016 (9) $-\frac{81}{16}$

【分析】 (1) 根据乘方的意义计算即可；

(2) 根据乘方的意义计算即可；

(3) 根据乘方的意义计算即可；

(4) 根据乘方的意义计算即可；

(5) 根据乘方的意义计算即可；

(6) 根据乘方的意义计算即可；

(7) 根据乘方的意义计算即可；

(8) 根据乘方的意义计算即可；

(9) 根据乘方的意义计算即可；

【详解】解： (1) $(-2)^6$

$$\begin{aligned}
 &= (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \\
 &= 64 \\
 &(2) (-10)^5 \\
 &= (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) \times (-10) \\
 &= -100000
 \end{aligned}$$

$$(3) (-0.1)^3$$

$$= (-0.1) \times (-0.1) \times (-0.1)$$

$$= -0.001$$

$$(4) \left(-\frac{3}{2}\right)^4$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{81}{16}$$

$$(5) -(-2)^5$$

$$= -(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$

$$= 32$$

$$(6) -3^4$$

$$= -3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= -81$$

$$(7) \left(-\frac{4}{3}\right)^3$$

$$= \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= -\frac{64}{27}$$

$$(8) -0.2^4$$

$$= -0.2 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.2$$

$$= -0.0016$$

$$(9) -\left(-1\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= -\left(-\frac{3}{2}\right)^4$$

$$= -\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{81}{16}$$

【点睛】此题考查的是有理数的乘方运算，掌握有理数乘方的意义是解决此题的关键。

21. 下列各式一定成立吗？

$$(1) a^2 = (-a)^2; \quad (2) a^3 = (-a)^3; \quad (3) -a^2 = |-a^2|; \quad (4) a^3 = |a^3|.$$

【答案】(1) 一定；(2) 不一定；(3) 不一定；(4) 不一定。

【分析】根据乘方的运算和绝对值的意义计算。

【详解】解：(1) $(-a)^2 = a^2$ ，所以原等式一定成立；

(2) $(-a)^3 = -a^3$ ，所以原等式不一定成立；

(3) $|-a^2| = a^2$ ，所以不原等式一定成立；

(4) 当 $a > 0$ ， $|a^3| = a^3$ ，成立，

当 $a < 0$ 时， $|a^3| = -a^3$ ，所以原等式不一定成立。

【点睛】此题考查了有理数的乘方，注意乘方是乘法的特例，乘方的运算可以利用乘法的运算来进行，注意任何数的绝对值为非负数。

22. 请先写出 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ 、 $-\frac{3^2}{2}$ 、 -1.5 的相反数，并在数轴上表示出这些数及其相反数。（规定：以 1cm 为一个单位）

【答案】 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ 相反数为 $-\frac{9}{4}$ ， $-\frac{3^2}{2}$ 相反数为 $\frac{9}{2}$ ， -1.5 的相反数为 1.5 ，数轴见解析

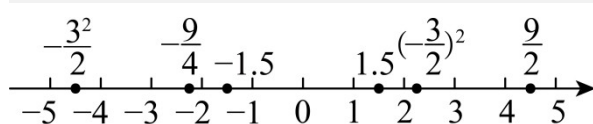
【分析】本题主要考查了有理数乘方运算，相反数定义，用数轴上的点表示相反数，先求出各个数，然后写出相反数，再把各个数表示在数轴上即可。

【详解】解： $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ ，相反数为 $-\frac{9}{4}$ ，

$-\frac{3^2}{2} = -\frac{9}{2}$ ，相反数为 $\frac{9}{2}$ ，

-1.5 的相反数为 1.5 ，

把各个数表示在数轴上，如图所示：



23. 下列用科学记数法表示的数，原来各是什么数？

$3 \times 10^7, 1.3 \times 10^3, 8.05 \times 10^6, 2.004 \times 10^5, -1.96 \times 10^4$.

【答案】 (1) 30000000 ; (2) 1300 ; (3) 8050000 ; (4) -19600 .

【分析】符号不变，首先看 n 是多少，数位就向右移动多少位 .

【详解】解：① $3 \times 10^7 = 30000000$,

② $1.3 \times 10^3 = 1300$,

③ $8.05 \times 10^6 = 8050000$,

④ $2.004 \times 10^5 = 20040$,

⑤ $-1.96 \times 10^4 = -19600$.

【点睛】本题是将科学记数法表示的数还原，若科学记数法 $a \times 10^n$ 表示的数，还原就是把 a 的小数点向右移动 n 位所得到的数；若科学记数法表示较小的数 $a \times 10^{-n}$ ，还原为原来的数，需要把 a 的小数点向左移动 n 位得到原数；要注意负号，如第⑤小题，要先确定其符号，再还原 .

24. 已知 $|x - y| = y - x$ ，且 $|x| = 3, |y| = 4$ ，试求 $(x + y)^3$ 的值

【答案】 1 或 343

【详解】 $\because |x| = 3, |y| = 4$,

$\therefore x = \pm 3, y = \pm 4$,

$\because |x - y| = y - x$,

$\therefore x - y < 0$,

$\therefore x = \pm 3, y = 4$,

当 $x = 3, y = 4$ 时， $(x + y)^3 = 7^3 = 343$,

当 $x = -3, y = 4$ 时， $(x + y)^3 = (+1)^3 = 1$.

25. 阅读材料：求 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2019}$ 的值 .

解：设 $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}$ ，将等式两边同时乘以 2 得：

$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{2019} + 2^{2020}$,

将下式减去上式得 $2S - S = 2^{2020} - 1$,

即 $S = 2^{2020} - 1$,

即 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2019} = 2^{2020} - 1$.

请你仿照此法计算 :

(1) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}$;

(2) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n$ (其中 n 为正整数) .

【答案】 (1) $2^{11} - 1$

(2) $\frac{3^{n+1} - 1}{2}$

【分析】 本题考查有理数的乘方以及有理数的混合运算，数式规律问题的有关知识，解题的关键是明确题意，运用题目中的解题方法，运用类比的数学思想解答问题 .

(1) 根据题目中材料可以得到用类比的方法得到 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$ 的值 ;

(2) 根据题目中材料可以得到用类比的方法得到 $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n$ 的值 .

【详解】 (1) 解：设 $X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}$,

将等式两边同时乘以 2 得 $2X = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10} + 2^{11}$,

将下式减去上式得： $2X - X = 2^{11} - 1$, 即 $X = 2^{11} - 1$,

$\therefore 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10} = 2^{11} - 1$;

(2) 解：设 $Y = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n$,

两边乘以 3 得： $3Y = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n + 3^{n+1}$,

下式减去上式得： $3Y - Y = 3^{n+1} - 1$,

即 $Y = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$,

$\therefore 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.

26 . 规定：求若干个相同的有理数 (均不等 0) 的除法运算叫做除方，如 $2 \div 2 \div 2$,

$(-3) \div (-3) \div (-3) \div (-3)$ 等. 类比有理数的乘方，我们把 $2 \div 2 \div 2$ 记作 $2^{\textcircled{3}}$ ，读作“2 的圈 3 次方”

$(-3) \div (-3) \div (-3) \div (-3)$ 记作 $(-3)^{\textcircled{4}}$ ，读作“ -3 的圈 4 次方”. 一般地，把 $\underbrace{a \div a \div a \div \dots \div a}_n$ ($a \neq 0$) 记作 $a^{\textcircled{n}}$ ，“读作“ a 的圈 n 次方”

(1) (初步探究) 直接写出计算结果： $2^{\textcircled{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 关于除方，下列说法错误的是_____

A. 任何非零数的圈³次方都等于它的倒数 B. 对于任何正整数 n ， $1^{\textcircled{n}}=1$

C. $3^{\textcircled{3}} = 4^{\textcircled{4}}$ D. 负数的圈奇数次方结果是负数，负数的圈偶数次方结果是正数

(深入思考) 我们知道，有理数的减法运算可以转化为加法运算，除法运算可以转化为乘法运算，有理数的除方运算如何转化为乘法运算呢？

$$2^{\textcircled{4}} = 2 \div 2 \div 2 \div 2 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

除方

乘方幂的形式

(3) 试一试：仿照上面的算式，将下列运算结果直接写成幂的形式

$$(-3)^{\textcircled{5}} = \underline{\hspace{2cm}}; 5^{\textcircled{8}} = \underline{\hspace{2cm}}; \left(\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{10}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(4) 想一想：将一个非零有理数 a 的圈 n 次方写成幂的形式是_____

$$(5) \text{算一算：} 12^2 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^{\textcircled{4}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{3}} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{\textcircled{4}} \div 3^4.$$

【答案】 (1) $\frac{1}{2}, 4$

(2) C

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^4, 2^8$

(4) $\left(\frac{1}{a}\right)^{n-2}$

(5) $-\frac{127}{9}$

【分析】 (1) 根据运算规定，用除法运算直接得出结果；

(2) 根据运算规定，验证每个选择支，做出正确的判断；

(3) 观察例题得到规律，一个非零有理数 a 的圈 n 次方等于 a 的倒数的 $(n-2)$ 次方，按规律得到结果；

(4) 把一个非零有理数 a 的圈 n 次方等于 a 的倒数的 $(n-2)$ 次方，写成字母表述的形式；

(5) 根据圈 a 的运算规定，按着有理数的运算顺序、运算法则计算出结果。

【详解】(1) 解： $2^{\textcircled{3}} = 2 \div 2 \div 2 = \frac{1}{2}$ ，

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{4}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 4。$$

故答案为： $\frac{1}{2}$ ，4。

(2) 解： $\because 3^{\textcircled{3}} = 3 \div 3 \div 3 = \frac{1}{3}$ ， $4^{\textcircled{4}} = 4 \div 4 \div 4 \div 4 = \frac{1}{16}$ ，

由于 $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{16}$ ，

$\therefore 3^{\textcircled{3}} \neq 4^{\textcircled{4}}$ ，

其它三个选项均正确，

所以选项C 错误，

故选：C。

(3) 解： $(-3)^{\textcircled{4}} = (-3) \div (-3) \div (-3) \div (-3) = (-3) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ；

$$5^{\textcircled{5}} = 5 \div 5 \div 5 \div 5 \div 5 = 5 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^4；$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{10}} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8；$$

故答案为： $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ； $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ ； 2^8 ；

(4) 解： $a^{\textcircled{n}} = a \div a \div a \div \cdots \div a = 1 \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \cdots \times \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-2}$ ，

故答案为： $\left(\frac{1}{a}\right)^{n-2}$ ；

(5) 解： $12^2 \div \left(-\frac{1}{3}\right)^{\textcircled{4}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{\textcircled{3}} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{\textcircled{4}} \div 3^4$

$$= 144 \div (-3)^2 - (-2) - (-3)^2 \div 3^4$$

$$= -144 \div 9 + 2 - 3^2 \div 3^4$$

$$= -16 + 2 - \frac{1}{9}$$

$$= -\frac{127}{9} .$$

【点睛】 本题主要考查了新定义、新定义运算的应用及有理数的混合运算，掌握新定义和有理数的混合运算是解决本题的关键．