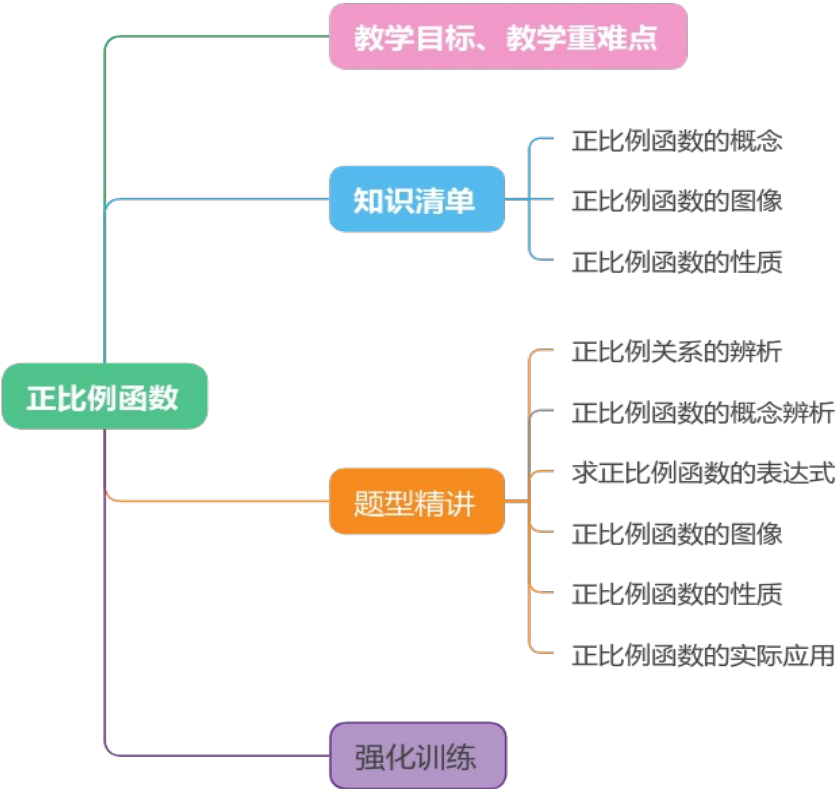


专题 25.2 正比例函数

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 掌握正比例函数的定义：形如 $y=kx$ (k 为常数， $k \neq 0$)，能准确识别正比例函数并指出比例系数 k 。 2. 会用描点法画正比例函数图像，知道其是过原点的直线，能快速画出过 $(0,0)$ 和 $(1,k)$ 的直线。 3. 掌握 k 的符号对图像象限与增减性的影响；会用待定系数法求解析式并解决简单实际问题。
教学重难点	1. 重点 理解正比例函数的概念、图像及其性质； 2. 难点 理解比例系数 k 对图像位置与增减性的影响，以及掌握并利用数形结合的思想解决问

题.

知识清单

知识点 01 正比例函数的概念

1.成正比例

如果变量 y 与变量 x 的比值是一个 ，那么就说变量 y 与变量 x 成正比例，用数学式子表示为 或 ，其中 k 是一个 。

【即学即练】

例 1 下列表述中的变量 y 与变量 x 是否成正比例？

(1) 正方形的周长随着边长的变化而变化，正方形的周长 $y(\text{cm})$ 与该正方形的边长 $x(\text{cm})$ ；

(2) 圆的面积随着半径的变化而变化，圆的面积 $y(\text{单位：m}^2)$ 与该圆的半径 $x(\text{单位：m})$ ；

(3) 在路程一定的情况下，汽车行驶的时间随着速度的变化而变化，汽车的用时 $y(\text{h})$ 与汽车的速度 $x(\text{km/h})$ 。

解：(1) 因为 $y=4x$ ，所以 $\frac{y}{x}=4$ ，所以正方形的周长与边长 ；

(2) 因为 $y=\pi x^2$ ，所以 $\frac{y}{x^2}=\pi$ ，这里 y 与 x^2 的比值是个常数，但 y 与 x 的比值不是常数，所以圆的面积 y 与半径 ；

(3) 设路程为 s ，则 $s=xy$ ，这里 y 与 x 的乘积是个常数，不是比例是个常数，所以在路程一定的情况下，汽车的用时 $y(\text{h})$ 与汽车的速度 $x(\text{km/h})$ 。

2.正比例函数的概念

形如 $y=kx(k$ 是常数， $k \neq 0)$ 的函数叫作 ，其中非零常数 k 称为 ，自变量 x 的取值范围是 。

正比例函数的本质是指 y 与 x 的 是个不为 0 的常数。

【即学即练】

例 2 下列函数哪些是正比例函数？

(1) $\frac{y}{x} = -2$; (2) $m = -n$; (3) $y = x + 3$; (4) $y = x^2$.

解析：要判定一个函数是不是正比例函数，关键是看它的表达式是否符合 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的形式。

解：(1) $\frac{y}{x} = -2$ 是正比例函数，因为 $y = -2x$ ，符合 $y = kx$ ($k = -2 \neq 0$) 的形式。

(2) $m = n$ _____ 正比例函数. 因为它符合 $y = kx$ ($k = 1 \neq 0$) 的形式。

(3) $y = x + 3$ _____ 正比例函数. 因为它不符合 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的形式。

(4) $y = x^2$ _____ 正比例函数. 因为它不符合 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的形式。

3. 正比例函数表达式的确定——待定系数法

确定了比例系数 k , 就可以给出正比例函数的表达式： $y = kx$ ($k \neq 0$).

求正比例函数表达式的方法叫作_____. 表达式中 k 是_____, 利用已知条件列出关于 k 的方程再求解，可确定 k 的值。

说明：

① 正比例函数的表达式是由比例系数“ k ”决定的，意思是“ k ”相同表达式就相同，反之“ k ”不同表达式就不同。

② 正比例函数的表达式与自变量与函数选用什么字母没有关系。

譬如“ $y = 3x$ ”与“ $m = 3n$ ”是体现同一种函数关系的表达式；“ $y = 4x$ ”与“ $y = 3x$ ”虽然字母相同，但比例系数不同就是不同的函数关系的表达式。

【即学即练】

例 3 已知正比例函数 $y = -\frac{3}{10}x$, 指出此函数的比例系数，并求当自变量 x 分别取 -5、0、3 时的函数值。

解：函数 $y = -\frac{3}{10}x$ 的比例系数是_____。

当 $x = -5$ 时， $y =$ _____；

当 $x = 0$ 时， $y =$ _____；

当 $x = 3$ 时， $y =$ _____；

例 4 已知 y 是 x 的正比例函数，当 $x=3$ 时函数值为 24.

(1)求该函数的表达式；

(2)当函数值分别为-5、0、3 时，求自变量 x 的值.

解：因为 y 是 x 的正比例函数，可设其表达式为 $y=kx(k \neq 0)$.

根据题意， $3k=24$,解得 $k=$ _____.

所以该函数的表达式为_____.

知当 $y=-5$ 时， $x=$ _____;

当 $y=0$ 时 $x=$ _____;

当 $y=3$ 时 $x=$ _____.

知识点 02 正比例函数的图像

1.正比例函数 $y=kx(k \neq 0)$ 的图像

正比例函数 $y=kx(k \neq 0)$ 的图像是一条经过_____的_____，这条直线称为**直线**_____.

说明：

①正比例函数图像上任意一点的坐标都满足函数的表达式；

②同时，对于任意满足这个函数表达式的一对有序实数 (x, y) ，以 (x, y) 为坐标的点都在所画的直线上.

2.正比例函数图像的画法——“两点法”

因为_____，所以可用“**两点法**”画正比例函数 $y=kx(k \neq 0)$ 的图像，即经过**原点(0,0)**和其他任意一点 **(x, kx)** ,即可画出正比例函数 $y=kx(k \neq 0)$ 的图像.

说明：

①因为两点确定一条直线，且正比例函数的图像都经过_____，所以画图时可以取_____和 $(1, \text{_____})$ 两点.

②为了描点更方便、更准确，取横、纵坐标时，都**尽量是整数**.

【即学即练】

例 5 已知正比例函数 $y=4x$ 的图像经过点 $A(m, m+3)$ ，则 $m=$ _____.

解：因为已知正比例函数 $y=4x$ 的图像经过点 $A(m, m+3)$

所以，可列方程_____

解之得， $m=$ _____.

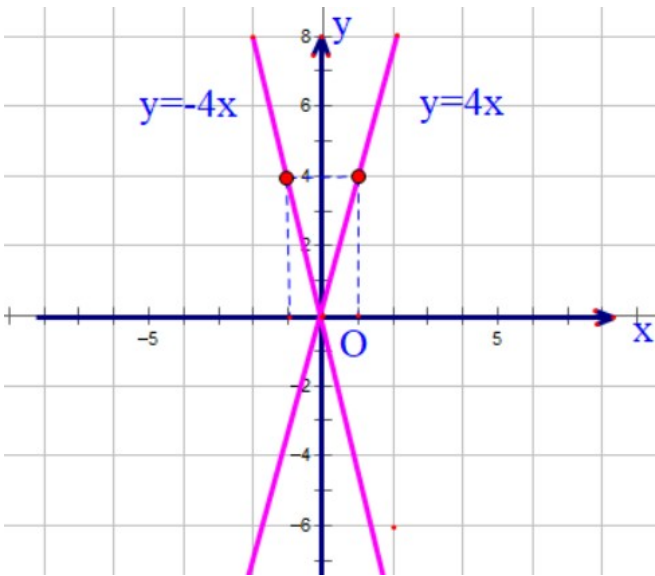
例 6 在同一直角坐标系中画出函数 $y=4x$ 和 $y=-4x$ 的图像.

解：列表：

x	0	1
y=4x		
x		

x	0	1
y=-4x		
x		

描点、连线



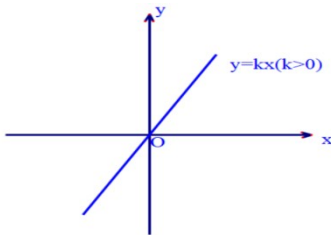
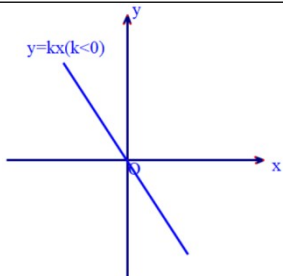
如图所示，直线 $y=4x, y=-4x$ 分别为所求作的正比例函数的图像.

知识点 03 正比例函数的性质

正比例函数的性质是由比例系数“ k ”决定的，正比例函数的性质如下表所示；

性质的逆命题也成立，即若正比例函数图像经过第一、三象限，则 $K>0$ 且 y 随 x 增大而增大；若正比例函数图像经过第二、四象限，则 $K<0$ 且 y 随 x 增大而减小；

$y=kx$ ($k\neq 0$)	图像	经过的象限	增减性
----------------------	----	-------	-----

$K > 0$		经过第____、____象限	经过 $(0, \underline{\hspace{1cm}})$ 、 $(1, \underline{\hspace{1cm}})$ 从左往右图像是____的； y 随 x 增大而____
$K < 0$		经过第____、____象限	经过 $(0, \underline{\hspace{1cm}})$ 、 $(1, \underline{\hspace{1cm}})$ 从左往右图像是____的； y 随 x 增大而____

【即学即练】

例 5 已知正比例函数 $y = \frac{m}{n}x$ 的图像经过点 $A(-1, a)$ 、 $B(-3, b)$ ，且 $mn < 0$ ，比较 a, b 的大小。

解：因为 $mn < 0$ ，所以 $\frac{m}{n} < 0$ ，

所以已知正比例函数 $y = \frac{m}{n}x$ 经过第____、____象限，且 y 随 x 增大而经过第____、____

象限，

根据正比例函数 $y = kx, k < 0$ 时 y 随 x 增大而____的性质

又因为 $-1 > -3$ ，

所以 $a < b$ 。

题型精讲

题型 01 成正比例的辨析

【典例 1】 长方形的宽 b 一定，它的长 a 与周长 C 是否成正比例？

【变式 1】 圆的半径 r 与它的面积 S 是否成正比例？

【变式2】匀速运动中，路程 s 与时间 t 是否成正比例？

【变式3】三角形的面积一定，它的一边 a 与这边上的高 h 是否成正比例？

【变式4】两数的商不变，被除数与除数(除数不为零)是否成正比例？

题型 02 正比例函数的概念辨析

【典例1】下列函数中，是正比例函数的是()

- A. $y = 2x - 1$ B. $y = \frac{2}{x}$ C. $y = 2x$ D. $y = x^2$

【变式1】已知函数 $y = k - 1x + b - 1$ 是关于 x 的正比例函数，则关于字母 k 、 b 的取值正确的是()

- A. $k = 1, b = 1$ B. $k = 1, b = -1$ C. $k = -1, b = 1$ D. $k = -1, b = -1$

【变式2】下列问题中的两个变量之间具有函数关系：①面积一定的长方形的长 a 与宽 b ；②圆的周长 C 与半径 r ；③正方形的面积 s 与边长 a ；④速度一定时，行驶的路程 s 与行驶时间 t ．其中两变量之间成正比例函数关系有()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【变式3】当 m _____时，函数 $y = (m - 2)x^{|m| - 1}$ 是正比例函数．

【变式4】已知 $y = m - 1x^{2|m|} + n - 4$ ．

当 m, n 取何值时， y 是 x 的正比例函数？

题型 03 求正比例函数的表达式

【典例1】已知 y 与 x 成正比例，且当 $x = 2$ 时， $y = 8$ ．

(1)求 y 与 x 的函数表达式；

(2)若点 $(m, 24)$ 在该函数图象上，求 m 的值．

【变式1】 已知 y 是 x 的正比例函数，并且当 $x=-2$ 时， $y=6$ 。

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式；

(2) 当 $y=3$ 时，求 x 的值。

【变式2】 已知 y 是 x 的正比例函数，且函数图象经过点 $A(-3, 6)$ 。

(1) 求 y 与 x 的函数关系式；

(2) 当 $x=-6$ 时，求对应的函数值 y ；

(3) 当 x 取何值时， $y=\frac{2}{3}$ 。

【变式3】 已知 y 与 x^3 成正比例，当 $x=5$ 时， $y=4$ 。

(1) 求这个函数表达式；

(2) 求当 $x=2$ 时 y 的值。

【变式4】 已知 $y+4$ 和 x 成正比例，且 $x=3$ 时， $y=1$ ；求 $x=-5$ 时，求 y 的值。

题型04 正比例函数的图像

【典例1】 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象： $y=2x$ ， $y=-2x$ 。

【变式1】 已知直线 $y=-6x$ ，则下列各点中一定在该直线上的是()

A. (3, 18)

B. (-18, -3)

C. (18, 3)

D. (3, -18)

【变式2】 设点 $A(a, b)$ 是正比例函数 $y=\frac{3}{4}x$ 图象上的任意一点，则下列等式一定成立的是()。

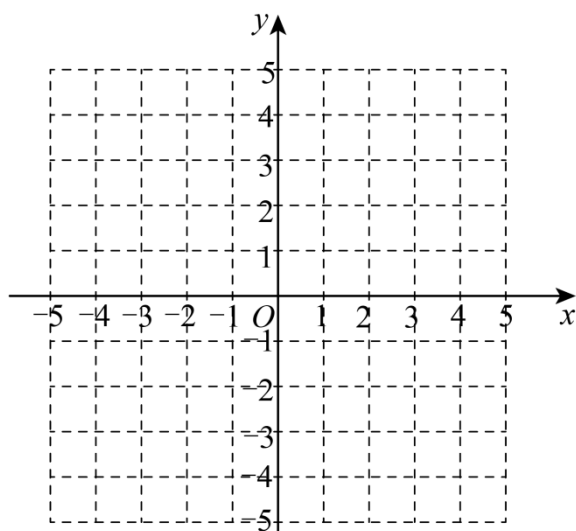
A. $4a-3b=0$

B. $4a+3b=0$

C. $3a-4b=0$

D. $3a+4b=0$

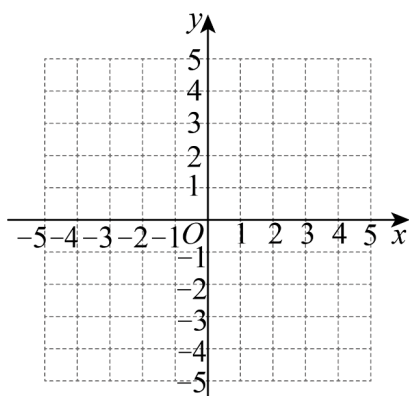
【变式3】 已知 $y=k-2x^{k^2-3}$ ，且 y 是关于 x 的正比例函数。



(1) 求 y 与 x 的函数关系式，并在如图所示的平面直角坐标系中，画出该正比例函数的图像；

(2) 若 $x = 2$ ，求函数 y 的最小值。

【变式 4】 已知正比例函数 $y_1 = 4x$ ， $y_2 = \frac{1}{4}x$ 。



(1) 在同一平面直角坐标系中画出上述两个正比例函数的图像，并用量角器度量一下这两条直线的夹角，可以发现这两条直线的位置关系是_____。

(2) 根据 (1) 中两函数的图像及其位置关系，猜想直线 $y = \frac{2}{5}x$ 与直线 $y = \frac{5}{2}x$ 的位置关系是_____。

(3) 若直线 $y = a + 2x$ (a 为常数) 与直线 $y = \frac{1}{2}x$ 互相垂直，求 a 的值。

题型 05 正比例函数的性质

【典例1】. 已知函数 $y = (1 - 2k)x$ 是正比例函数，且 y 随 x 的增大而减小，那么 k 的取值范围是()

- A. $k < \frac{1}{2}$ B. $k > \frac{1}{2}$ C. $k > 0$ D. $k < 1$

【变式1】. 关于函数 $y = 2x$ ，下列结论中正确的是()

- A. 函数图象经过点 $(2, 1)$ B. 函数图象经过第二、四象限
C. y 随 x 的增大而增大 D. 不论 x 取何值，总有 $y > 0$

【变式2】. 已知 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是正比例函数 $y = kx$ ($k < 0$) 图像上两点，若 $x_1 > x_2$ ，则下列结论正确的是()

- A. $y_1 < y_2$ B. $y_1 = y_2$
C. $y_1 > y_2$ D. $-y_1 < -y_2$

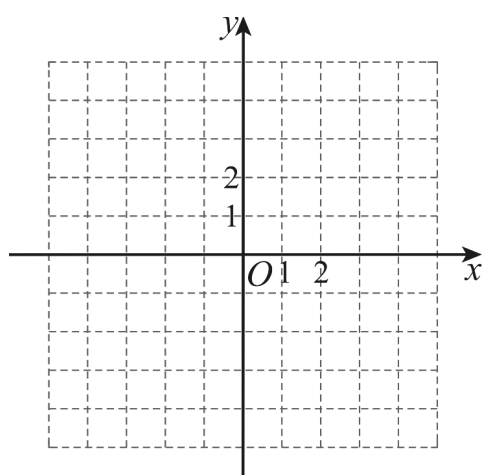
【变式3】已知函数 $y = x$, $y = 2x$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = 4x$.

(1)在同一平面直角坐标系中画出上面各函数的图象.

(2)探索发现：随着 $|k|$ 的增大，直线的倾斜程度有何变化？

(3)灵活运用：已知正比例函数 $y_1 = k_1x$, $y_2 = k_2x$ 在同一平面直角坐标系中的图象如右图所示，则 k_1 与 k_2 的大小关系为——.

【变式4】已知一次函数 $y = kx$ 的图像经过点 $A(2, 8)$.



(1)求 k 的值；

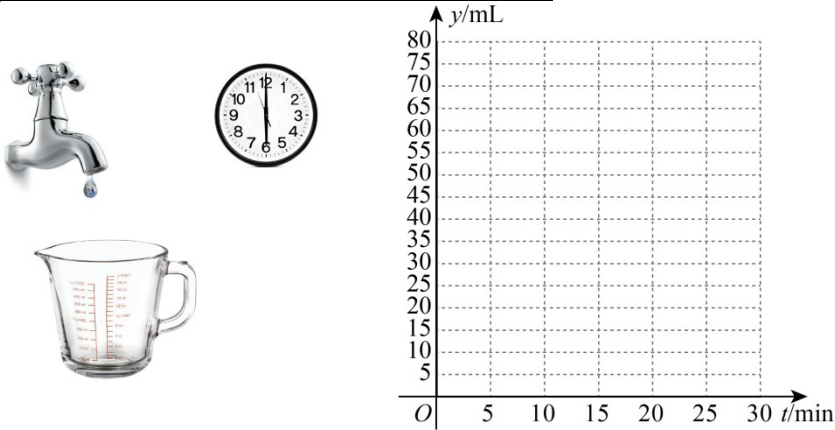
(2)在所给平面直角坐标系中，画出该函数的图像；

(3)若 $2 \leq y \leq 2$ ，则 x 的取值范围是——（直接写结果）。

题型 06 正比例函数的应用

【典例 1】2025 年 3 月 22 日是第三十三届“世界水日”，联合国呼吁全世界关注和重视水资源的重要性。水龙头关闭不严会造成滴水，为了调查漏水量与漏水时间的关系，小宁同学在滴水的水龙头下放置了一个足够大的且能显示水量的量杯，每 5min 记录一次容器中的水量，如下表。

时间 t / min	0	5	10	15	20	25
量杯中的水量 y / mL	0	10	20	30	40	50



- (1)请根据上表的信息，在平面直角坐标系中描出表中数据对应的点，并用平滑曲线连接这些点。
- (2)观察平面直角坐标系中各点的分布规律，试求出 y 关于 t 的函数解析式。
- (3)请根据 (2) 中所求的函数解析式，估算这种漏水状态下 12 小时的漏水量。

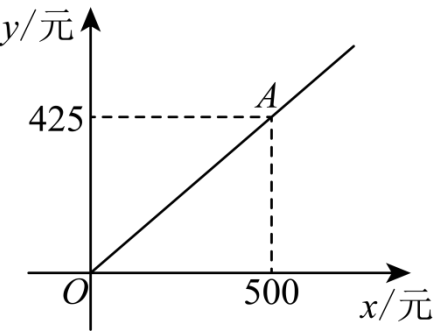
【变式 1】汽车是现在人们出行的重要交通工具，但是汽车在公路上高速行驶会给行人带来很多安全隐患，其原因为汽车在刹车后，车还需要滑动一段距离。经过专业人员多次测试，发现刹车距离 y 和刹车时的速度 x $x \leq 100\text{km/h}$ 有一定的函数关系，相关统计数据如下表：

刹车时的速度 x / km/h	0	10	20	30	40	50
刹车距离 y / m	0	2.	5	7.	1	12.

		5		5	0	5
--	--	---	--	---	---	---

- (1)请求出 y 关于 x 的函数关系式 .
- (2)若要求刹车距离小于 1^2 米，则车速应该限制在多少以内？

【变式 2】 如图，某超市的消费卡售价 y (元)与面值 x (元)之间满足正比例函数关系，使用这张消费卡，在该超市可以购买任意商品 .



- (1)求 y 与 x 之间的函数解析式：
- (2)小张购买了一张面值为 2000 元的消费卡，求小张购买这张消费卡时实际支付了多少元？

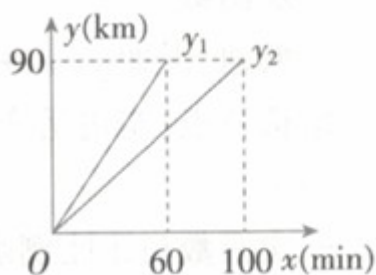
【变式 3】 A、B 两地相距 300km，一辆汽车从 A 地到 B 地匀速行驶，行驶的路程 s (km) 是时间 t (h) 的正比例函数.下表是行驶路程 s 与时间 t 的部分对应值表.

T(h)	2	2.5	n
S(km)	120	m	180

- (1)根据表中的信息，求这个函数的表达式及自变量 x 的取值范围.
- (2)求表格中的 m,n 的值.

【变式 4】 甲、乙两辆汽车沿同一公路同时从 A 地出发前往相距 90 km 的 B 地，行驶过程中所行路程分别用 y_1 、 y_2 (单位：km)表示，它们与行驶时间 x (单位：min)的函数关系如图所示.

- (1)分别求出 y_1 、 y_2 关于 x 的函数表达式，并写出自变量的取值范围；
- (2)分别求行驶了 50 min 及 80min 时，两车之间相距的路程.



强化训练

一、单选题

1. 下列问题中，两个变量之间成正比例关系的是 ()

- A. 圆的面积 S (cm^2) 与它的半径 r (cm) 之间的关系
- B. 某水池有水 15m^3 ，现打开进水管进水，进水速度为 $5\text{m}^3/\text{h}$ ， $x\text{h}$ 后这个水池有水 $y\text{m}^3$
- C. 三角形面积一定时，它的底边 a (cm) 和底边上的高 h (cm) 之间的关系
- D. 汽车以 60km/h 的速度匀速行驶，行驶路程 y 与行驶时间 x 之间的关系

2. 下列问题中的两个变量是正比例函数关系的是 ()

- A. 被除数 (不为零) 一定，除数与商
- B. 货物的单价一定，货物的总价与货物的数量
- C. 等腰三角形的周长一定，它的腰长与底边的长
- D. 汽车所行的路程一定，它所行驶的速度与时间

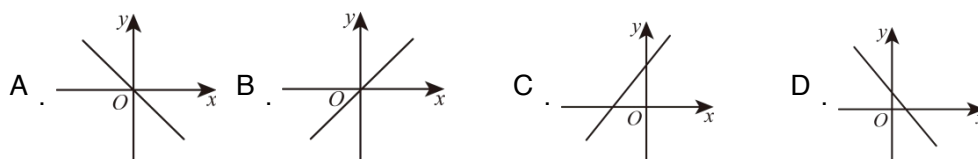
3. 下列函数是正比例函数的是 ()

- A. $y = x^2$
- B. $y = \frac{1}{x}$
- C. $y = 2x$
- D. $y = 2x - 1$

4. 已知正比例函数 $y = 3x$ ，若该正比例函数经过点 $(m, 6m - 1)$ ，则 m 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $-\frac{1}{3}$
- C. 3
- D. $-\frac{1}{2}$

5. 正比例函数 $y = 3x$ 的大致图像是 ()



6. 经过以下一组点可以画出函数 $y = 2^x$ 图象的是()

A. (0, 0)和(2, 1)

B. (0, 0)和(1, 2)

C. (1, 2)和(2, 1)

D. (-1, 2)和(1, 2)

7. 结合正比例函数 $y = 4^x$ 的图象回答：当 $x > 1$ 时， y 的取值范围是 ()

A. $y = 1$

B. $1 \leq y < 4$

C.

$y = 4$

D. $y > 4$

8. 以下各点中，在正比例函数 $y = 2^x$ 图象上的是 ()

A. (2, 1)

B. (1, 2)

C. (-1, 2)

D. (1, -2)

9. 对于正比例函数 $y = 3^x$ ，下列说法正确的是 ()

A. y 随 x 的增大而减小

B. y 随 x 的增大而增大

C. y 随 x 的减小而增大

D. y 有最小值

10. 下列说法正确的是 ()

A. 过原点的直线都是正比例函数

B. 正比例函数图象经过原点

C. $y = kx$ 是正比例函数

D. $y = 3 + x$ 是正比例函数

二、填空题

11. 函数 $y = 2m - 9x^{m^2 - 9m - 19}$ ，当 m _____ 时， y 与 x 成正比例，且 y 随 x 的增大而增大。

12. 若函数 $y = a - 3x - a^2 - 9$ 是正比例函数，则 a _____。

13. 若 y 与 x 成正比例，当 $x = 5$ 时， $y = 6$ ，则 y 与 x 的函数解析式为_____。

14. 函数 $y = \frac{x}{3}$ ，则 y 是 x 的_____函数，比例系数为_____。

15. 已知直线 $y = (2 - 3m)x$ 经过点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $y_1 > y_2$ ，则 m 的取值范围是_____。

16. 若正比例函数 $y = (m - 2)x^{m^2 - 10}$ 的图象在第一、三象限内，则 $m =$ _____。

三、解答题

17. 下列式子中，哪些表示 y 是 x 的正比例函数？

(¹) $y = 0.1x$; (²) $y = \frac{x}{2}$; (³) $y = 2x^2$; (⁴) $y^2 = 4x$.

18 . 若函数 $y = (a - 1)x - a^2 - 1$ 是关于 x 的正比例函数，求 a 的值 .

19 . 列式表示下列问题中的 y 与 x 的函数关系，并指出哪些是正比例函数 .

(¹) 正方形的边长为 $x\text{cm}$ ，周长为 $y\text{cm}$ ；

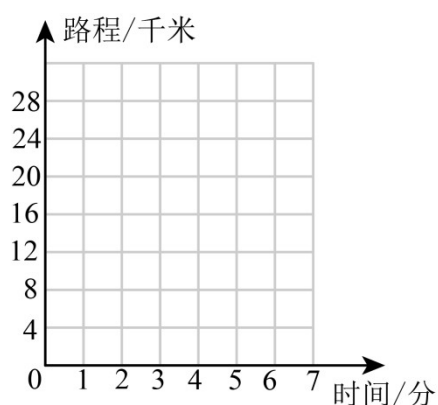
(²) 某人一年内的月平均收入为 x 元，他这年 (¹² 个月) 的总收入为 y 元；

(³) 一个长方体的长为 2cm ，宽为 1.5cm ，高为 $x\text{cm}$ ，体积为 $y\text{cm}^3$.

20 . 复兴号动车匀速行驶时，路程和时间关系如下表：

时间/分	0	1	2	3	4	5	6	...
路程/千米	0	4	8	12	16	20	24	...

(1) 把动车行驶的时间和路程对应的点在图中描出来，并连线 .



(2) 复兴号动车行驶的路程和时间成——比例关系，写出判断依据 .

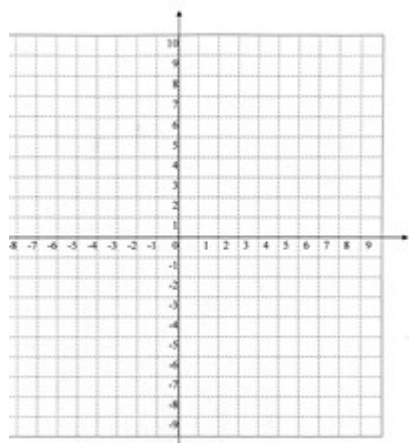
(3) 动车行驶 ²⁰ 分钟可行驶多少千米？(列式解答)

21. 已知 y 与 $x - 3$ 成正比例，当 $x = 4$ 时， $y = 3$.

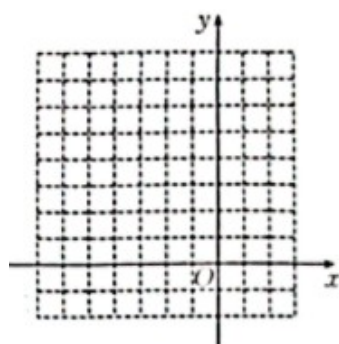
(1) 求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) y 与 x 之间是什么函数关系？并在平面直角坐标系中画出该函数的图像；

(3) 当 $x = 2.5$ 时， y 的值为_ .



22. 在由边长为 1 的小正方形组成的网格中，建立如图所示的平面直角坐标系 xOy ，函数 $y = kx$ (其中 $k > 0$) 的图像经过点 $A(2, 6)$.



(1) 给定的平面直角坐标系中画出该函数的图像 .

(2) 若图像上有两点 $B(x_1, y_1)$ ， $C(x_2, y_2)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，直接写出 y_1 与 y_2 的大小关系 .

23. 周至县是全球猕猴桃的原产地，被誉为“中国猕猴桃之乡”，以果肉细嫩、酸甜适口著称 . 下面是某水果超市徐香猕猴桃销售数量与总价关系：

数量 x /千克	0	1	2	3	4	5	
总价 y /元	0	12	24	36	48	60	

(1) 根据上表求出 y 与 x 之间的关系式，并判断 y 是否为 x 的正比例函数；

(2)当 $x = 9.5$ 时，求 y 的值．

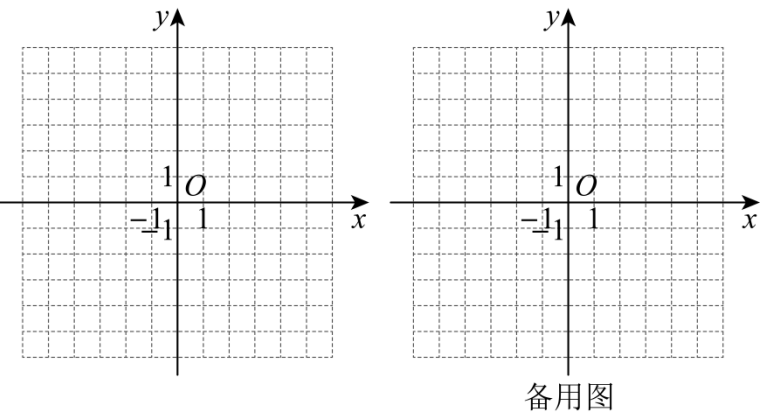
24．阅读下列材料，解答相应的问题：

研究函数的图象一般要研究其形状、位置、图象特征（如对称性）．借助图象我们可以直观地得到函数的性质．例如，在研究正比例函数 $y = 2x$ 的图象时，通过列表、描点、连线等步骤，得到如下结论：① $y = 2x$ 的图象是经过原点的一条直线；② $y = 2x$ 的图象经过坐标系的第一、三象限．小文借鉴研究正比例函数 $y = 2x$ 的经验，对新函数 $y = |2x|$ 的图象展开探究，过程如下．

①根据函数表达式列表：

x		3	2	1	0	1	2	3	
$y = 2x $					0	2	4	6	

②在如图所示的坐标系中描点、连线，画出函数的图象．



(1)请你将小文列表、描点、连线的过程补充完整；

(2)根据小文的探索过程，类比研究 $y = 2x$ 图象时得到的结论，写出函数 $y = |2x|$ 图象的一个结论．