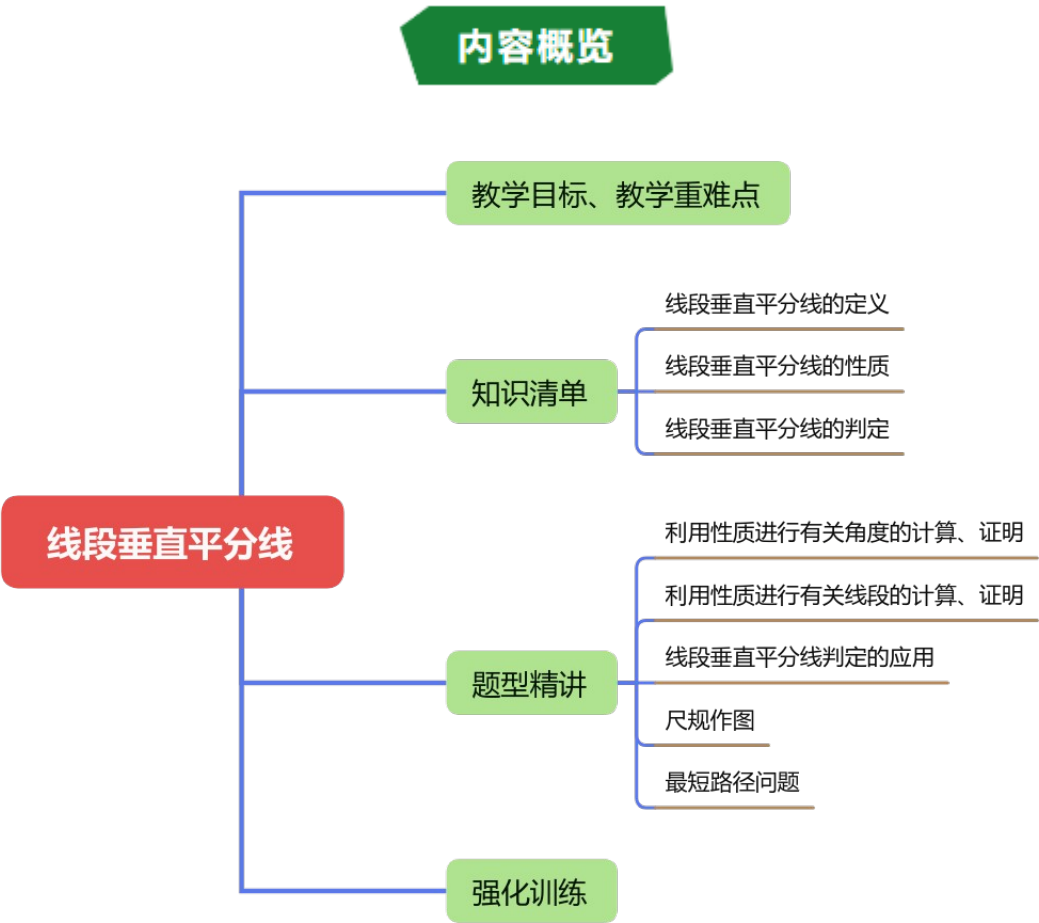


专题 18.4 线段垂直平分线



教学目标、教学重难点

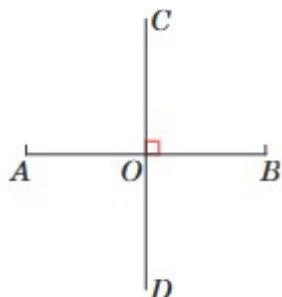
教学目标	1.了解线段垂直平分线的定义； 2.理解两个核心定理：线段垂直平分线的性质定理和判定定理； 3.掌握用尺规画线段的垂直平分线、过直线外一点作已知直线的垂线等作图.
教学重难点	1.重点 线段垂直平分线的性质定理和判定定理及其应用； 2.难点 性质与判定的灵活应用.

知识清单

知识点 01 线段垂直平分线的定义

定义：过线段**中点**且**垂直**于这条线段的直线叫作这条线段的_____，简称_____。

几何语言：如图，如果直线 CD 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 O ，那么 $OA=OB$ ，且 $CD \perp AB$ 。

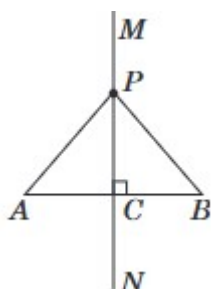


知识点 02 线段垂直平分线的性质

定理：线段的垂直平分线上的任意一点到_____相等。

几何语言：如图，已知：直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，垂足为 C ，点 P 在直线 MN 上。

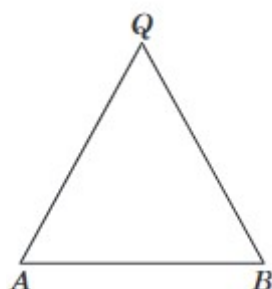
则 $PA=PB$ 。



知识点 03 线段垂直平分线的判定

定理：与一条线段的两个端点距离相等的点，在_____上。

几何语言：如图，已知：线段 AB 和一点 Q ，且 $QA=QB$ 。则，点 Q 在_____上。



【即学即练】

例1 求作已知线段的垂直平分线.

如图，已知线段 AB,求作线段 AB 的垂直平分线.



【分析】 根据线段**垂直平分线的判定定理**和**直线公理**,只需要作出**两个点**，使每一个点到

_____，这两点所确定的直线就是线
直平分线.

段 AB 的垂

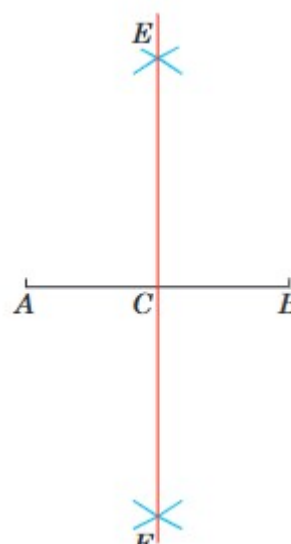
【作法】

(1)以点 A 为圆心、以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧；

(2)以点 B 为圆心、以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧；

(3)两弧分别相交于点 E、F,过点 E、F 作直线 EF.

则直线 EF 就是线段 AB 的垂直平分线.



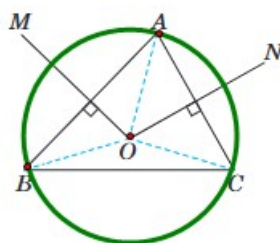
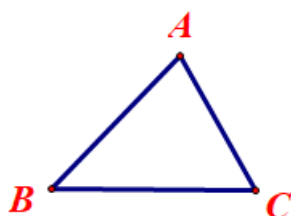
【点睛】

①以大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径的目的是确保两弧有交点；

②连接 EF 与 AB 的交点 C 就是线段 AB 的中点.

例2 求作三角形的外心

如图，已知 $\triangle ABC$ ，求作其外形点 O.



【作法】

1. 作线段 AB 的垂直平分线 EM；

2. 作线段 AC 的垂直平分线 FN；

EM 与 FN 的交点 O 就是 $\triangle ABC$ 的外心.

【证明】 分别连接 OB、OA、OC.

$\therefore OM$ 、 ON 分别是边 AB、AC 的垂直平分线，

$\therefore OA=OB, OC=OA$ (线段垂直平分线的性质定理).

$\therefore OB=OC$.

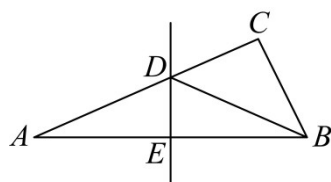
$\therefore$ 点 O 在边 BC 的垂直平分线上 (与一条线段的两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上).

【点睛】 本题的结论表明：三角形的三条边的垂直平分线相交于一点，这个交点叫作_____.

题型精讲

题型 01 利用性质进行角度的计算和证明

【典例 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，DE 是 AB 的垂直平分线，分别交 AC，AB 于点 D，E，连接 BD，若 $\angle A = 24^\circ$ ， $\angle C = 92^\circ$ ，则 $\angle CBD$ 的度数为 ()



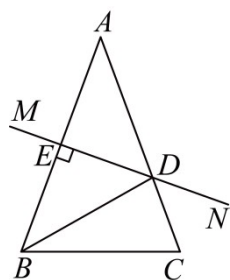
A . 24°

B . 40°

C . 64°

D . 92°

【变式 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于点 D，交 AB 于点 E. 若 $\angle A = 40^\circ$ ，则 $\angle DBC$ 的度数为 ()



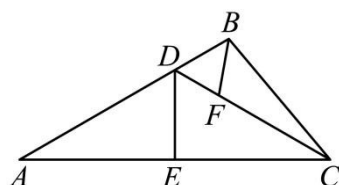
A . 40°

B . 30°

C . 70°

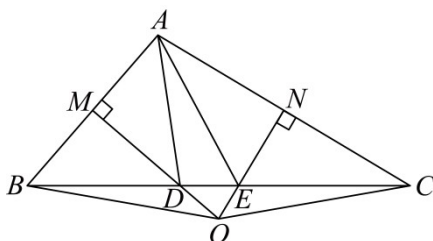
D . 25°

【变式2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， DE 是边 AC 的垂直平分线，连接 CD ， BF 平分 $\angle ABC$ 交 CD 于点 F ，已知 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle ABC = 100^\circ$ ，则 $\angle BFC$ 的度数为（ ）



- A. 100° B. 110° C. 120° D. 130°

【变式3】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，边 AB 的垂直平分线分别交 AB ， BC 于点 M ， D ，边 AC 的垂直平分线分别交 AC ， BC 于点 N ， E ， MD ， NE 相交于点 O ，连接 BO ， CO 。



- (1) 试判断点 O 是否在 BC 的垂直平分线上，并说明理由；
- (2) 若 $\angle BAC = 105^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度数。

【变式4】 如图1和图2，在 $\triangle ABC$ 中，以点 A 为圆心， AC 的长为半径作弧，交 BC 于点 D 。

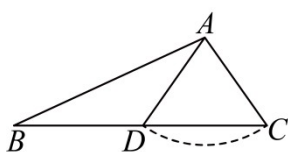


图1

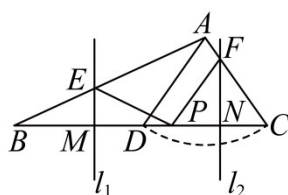


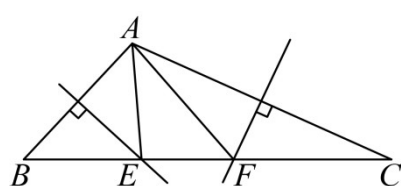
图2

- (1) 求证：点 A 在线段 CD 的垂直平分线上；
- (2) P 是线段 CD 上的动点（点 P 不与点 C ， D 重合），线段 BP 的垂直平分线 l_1 分别与 AB ， BC 交于点 E ， M ，线段 CP 的垂直平分线 l_2 分别与 AC ， BC 交于点 F ， N 。
 - ① 若 $AB = 10$ ， $AC = 5$ ，求四边形 $AEPF$ 的周长；
 - ② 已知 $\angle BAC = 100^\circ$ ，判断当点 P 在线段 CD 上运动时， $\angle EPF$ 的度数是否会发生变化。若变化，请说明理

由；若不变，求 $\angle EPF$ 的度数．

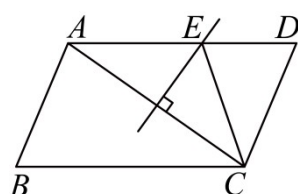
题型 02 利用性质进行有关线段的计算和证明

【典例 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 24$ ， AB 边的垂直平分线和 AC 边的垂直平分线与 BC 边分别相交于点 E 、 F ，连接 AE 、 AF ，则 $\triangle AEF$ 的周长为 ()



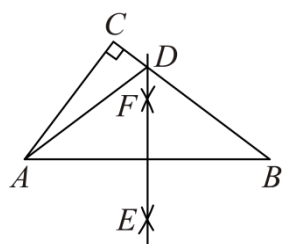
- A . 12 B . 18 C . 24 D . 不能确定

【变式 1】 如图，四边形 $ABCD$ 中， $CD = 3$ ， $AD = 5$ ， AC 的垂直平分线交 AD 于点 E ，则 $\triangle CDE$ 的周长是 ()



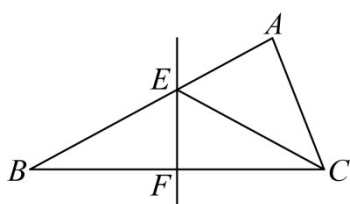
- A . 6 B . 8 C . 11 D . 13

【变式 2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，分别以点 A ， B 为圆心， AC 长为半径画弧，两弧分别交于点 E ， F ，直线 EF 交 BC 于点 D ，连接 AD ，则 $\triangle ACD$ 的周长等于 ()



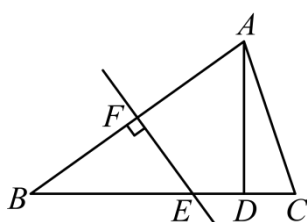
- A . 7 B . 8 C . 9 D . $\frac{17}{2}$

【变式3】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BC 的垂直平分线分别交 AB ， BC 于点 E ， F ，连接 CE ．若 $AC = 5$ ， $\triangle AEC$ 的周长为13，则 AB 的长是（ ）



- A . 5 B . 7 C . 8 D . 13

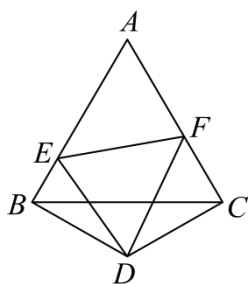
【变式4】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， EF 是 AB 的垂直平分线， $AD \perp BC$ ， D 为 CE 的中点．



- (1) 求证： $BE = AC$ ；
(2) 若 $\angle B = 40^\circ$ ，求 $\angle BAC$ 的度数．

题型 03 线段垂直平分线的判定

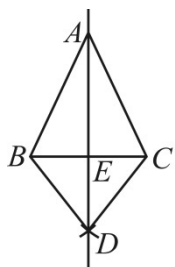
【典例1】 如图，在等边三角形 ABC 中， D 是三角形外一点，且 $BD = CD$ ， $\angle BDC = 120^\circ$ ，点 E 、 F 分别在 AB 、 AC 上， $\angle EDF = 60^\circ$ ，则下列结论错误的是（ ）



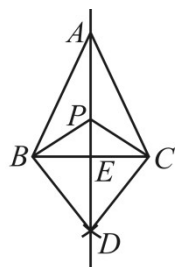
- A . AD 垂直平分 BC B . 点 D 在 $\angle EFC$ 的平分线上
C . $\triangle AEF \cong \triangle DEF$ D . $\triangle AEF$ 的周长为 $2BC$

【典例2】 求证：等腰三角形两腰中线的交点在底边的垂直平分线上．

【变式1】 已知，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，如图①，分别以点 B 和点 C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径作弧，两弧在 A 点的另一侧相交于点 D ，连接 BD ， CD ，作直线 AD 交 BC 于点 E 。请解答下列问题：



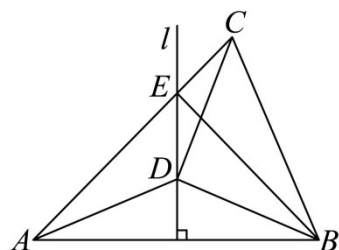
图①



图②

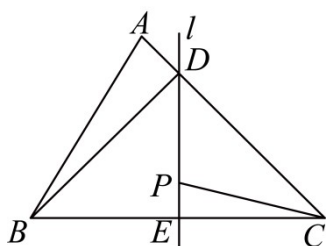
- (1) 你认为 AE 与 BC 有什么关系？请说明理由。
- (2) 如图②，若点 P 是直线 AD 上的任意一点， PB 与 PC 有什么关系？为什么？

【变式2】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， l 是 AB 的垂直平分线，与边 AC 交于点 E ，点 D 在 l 上，且 $DB = DC$ ，连接 AD 。



- (1) 求证：点 D 在边 AC 的垂直平分线上；
- (2) 连接 BE ，若 $BD \perp CD$ ，求证： $BE \perp AC$ 。

【变式3】 如图，在 $\triangle ABC$ 中，直线 l 垂直平分边 BC ，分别交 AC ， BC 于点 D ， E ，连接 BD 。

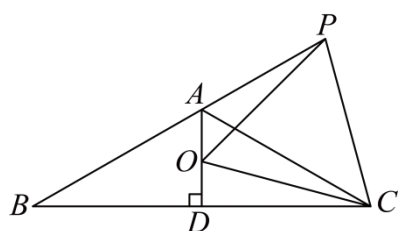


- (1) 若 $AB = 9$ ， $\triangle ABD$ 的周长为 19 ，则 AC 的长为_；

(2) 若 $\angle ADB = 90^\circ$ ，求 $\angle ACB$ 的度数；

(3) 已知点 P 在线段 DE 上，且点 P 在边 AC 的垂直平分线上，连接 PC ，试判断点 P 是否在边 AB 的垂直平分线上，并说明理由。

【变式 4】 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，点 P 是 BA 延长线上一点，点 O 是线段 AD 上一点， $OP = OC$ ，则以下结论错误的是 ()

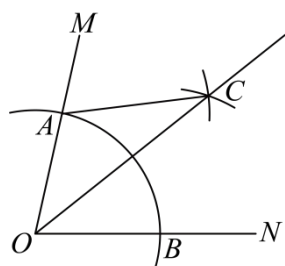


- A. 直线 AD 是线段 BC 的垂直平分线 B. $\angle APO + \angle DCO = 30^\circ$
C. $\triangle OPC$ 是等边三角形 D. $AB > AO + AP$

题型 04 尺规作图

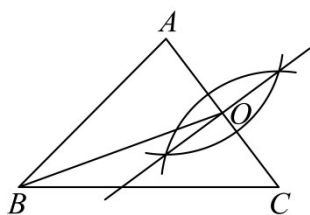
【典例 1】 如图， $\angle MON = 100^\circ$ ，点 A 在射线 OM 上，以点 O 为圆心， OA 长为半径画弧，交射线 ON 于点 B 。若分别以点 A, B 为圆心， AB 长为半径画弧，两弧在 $\angle MON$ 内部交于点 C ，连接 AC ，则下列结论中正确的有 () 个

(1) $\triangle ABC$ 为等边三角形；(2) $\triangle OAC \cong \triangle OBC$ ；(3) $\angle OAC$ 的大小为 100° ；(4) OC 垂直平分 AB ；



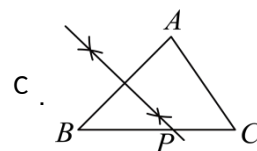
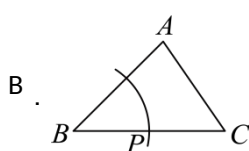
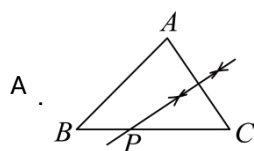
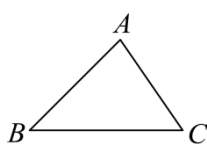
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【变式 1】 如图，根据尺规作图的痕迹，可以判断 BO 是 $\triangle ABC$ 的 ()

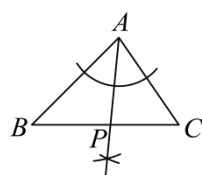


- A. 中线 B. 角平分线 C. 高线 D. 中垂线

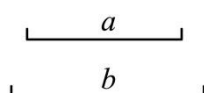
【变式2】 在数学课上，老师提出如下问题：如图所示，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB < BC$ ，用尺规作图的方法在 BC 上取一点 P ，使得 $PA + PB = BC$ 。下面四个同学的做法，其中正确的是（ ）



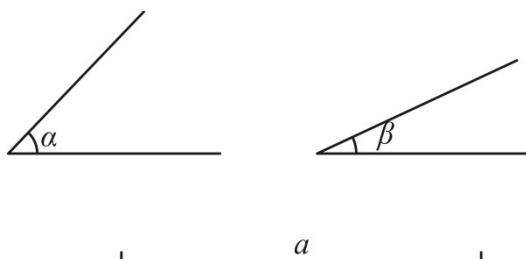
D.



【变式3】 如图，已知线段 a 、 b 。求作： $\triangle ABC$ ，使 $AB = AC$ ，且 $BC = a$ ，高 $AD = b$ 。



【变式4】 如图，已知 $\angle \alpha$ 、 $\angle \beta$ 和线段 a 。

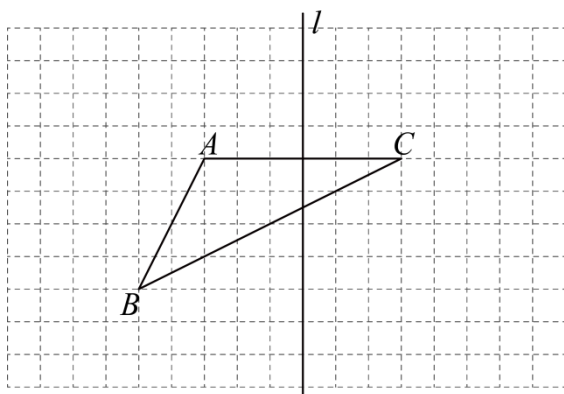


(1) 求作 $\triangle ABC$ ，使 $\angle A = \angle \alpha$ ， $AB = a$ ， $\angle B = \angle \beta$ （不写作法，保留作图痕迹）；

(2) 在第(1)题所作的 $\triangle ABC$ 中，画出 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高 AD 。

题型 05 最短路径问题

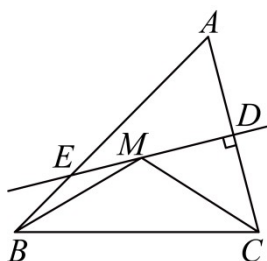
【典例 1】 如图，在正方形网格中，每个小正方形的边长为 1，点 A 与点 B 均在格点上， l 为网格线所在的直线。



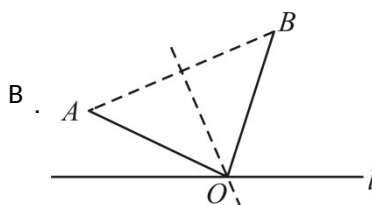
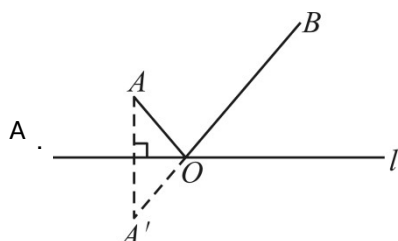
(1) 标出点 A 关于直线 l 的对称点 A' ；

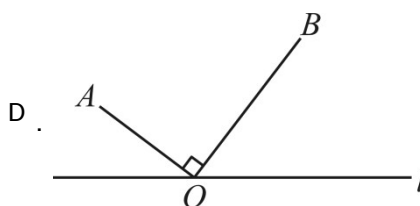
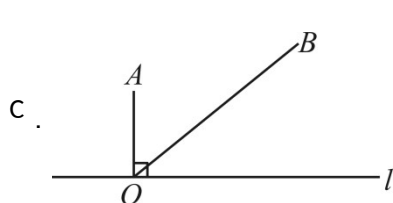
(2) 在直线 l 上找一点 P ，使得 $PA + PB$ 的值最小（保留作图痕迹）；

【变式 1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 15$ ，直线 DE 是线段 AC 的垂直平分线，分别交 AC ， AB 于点 D ， E ， M 是直线 DE 上的动点，则 $BM + CM$ 的最小值为_____。

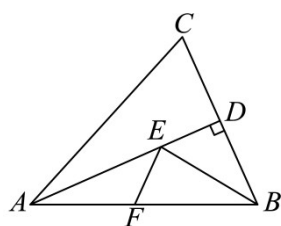


【变式 2】 如图， A ， B 两个小镇在河流的同侧，随着居民用水量的增加，现需要在河边 l 上修建一个自来水厂 O ，分别向两个小镇供水，考虑到供水所用水管铺设的长度应最短的选址要求，从数学的角度看，下列图形中自来水厂 O 的选址设计正确的是（ ）

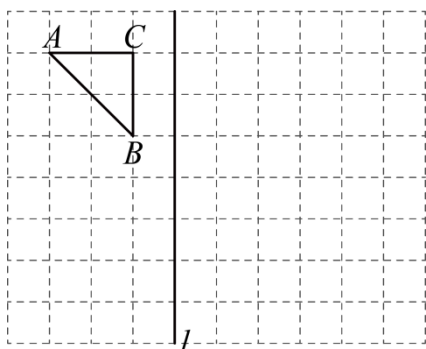




【变式3】 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，两动点 E ， F 分别在线段 AD 、 AB 上运动，若 $\angle BAC = 48^\circ$ ，则当 $BE + EF$ 取得最小值时， $\angle EBF$ 的度数为_____°.



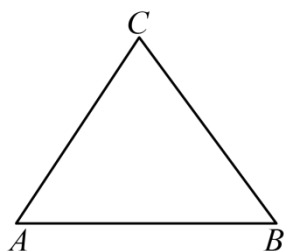
【变式4】 如图，在所给网格图（每小格均为边长是1的正方形）中完成下列各题：



- (1) 画出将 $\triangle ABC$ 向下平移5个单位长度后的 $\triangle A_1B_1C_1$ ；
- (2) 画出 $\triangle ABC$ 关于直线 l 成轴对称的 $\triangle A_2B_2C_2$ ；
- (3) 在直线 l 上找一点 P ，使 $AP + BP$ 最小。（说明：在网格中画出图形，标上字母即可）

强化训练

1. 三条公路将 A 、 B 、 C 三个村庄连成一个如图的三角形区域，如果在这个区域内修建一个集贸市场 P ，使 $PA = PB = PC$ ，那么这个集贸市场 P 应建的位置是（ ）



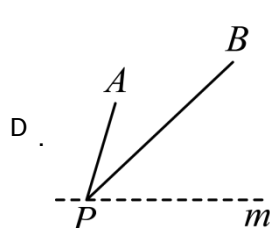
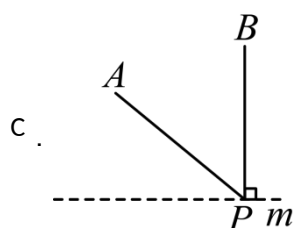
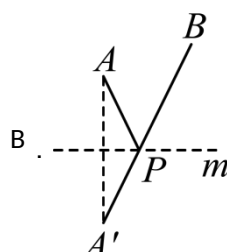
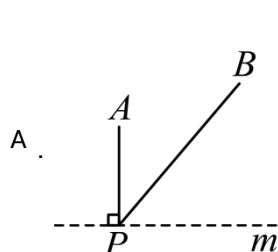
A. 三条高线的交点

B. 三条角平分线的交点

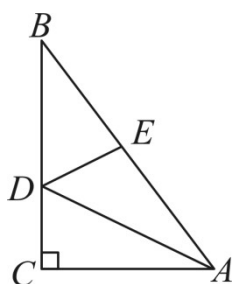
C. 三条中线的交点

D. 三边垂直平分线的交点

2. 某区计划在公路旁修建一个核酸采集点 P ，现有如下四种方案，则核酸采集点 P 到 A 、 B 两个小区之间的距离之和最短的是 ()



3. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， $AB = 10$ ，如果点 D ， E 分别为 BC ， AB 上的动点，那么 $AD + DE$ 的最小值是 ()



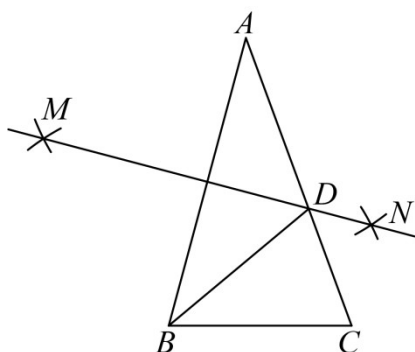
A. 8.4

B. 9.6

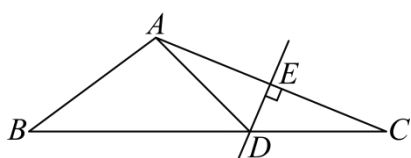
C. 10

D. 10.8

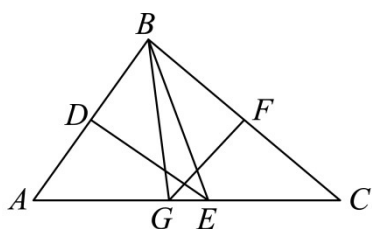
4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，分别以点 A ，点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧，两弧分别交于点 M 和点 N ，连接 MN ，直线 MN 与 AC 交于点 D ，连接 BD ，若 $BD = BC$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是_____。



5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AC 的垂直平分线分别交 BC ， AC 于 D ， E 。若 $AE = 5$ ， $\triangle ABC$ 的周长为 28 ，则 $\triangle ABD$ 的周长等于_____。

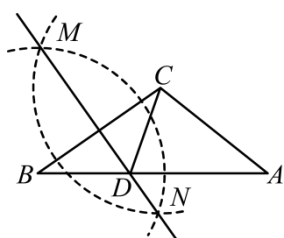


6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，边 AB 的垂直平分线 DE 分别与边 AB ， AC 交于 D ， E 两点，边 BC 的垂直平分线 FG 分别与边 BC ， AC 交于 F ， G 两点，连接 BE ， BG 。若 $\triangle BEG$ 的周长为 32 ， $AC = 22$ ，则 GE 的长为_____。

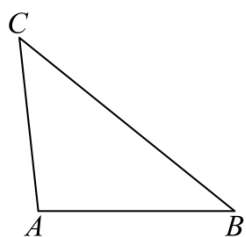


7. 请写出“垂直平分线上的点到线段两端的距离相等”的逆定理：_____。

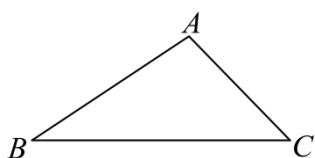
8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，按以下步骤作图：①分别以点 B ， C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 M ， N ；②作直线 MN 交 AB 于点 D ，连接 CD 。若 $AC = AD$ ， $\angle A = 40^\circ$ ，则 $\angle ACB$ 的度数为_____。



9. 如图，已知 $\triangle ABC$ ，请用尺规作图法作 $\triangle ABE$ ，使得点 E 到点 A 、 C 的距离相等，且点 E 在 BC 边上。（不写作法，保留作图痕迹）



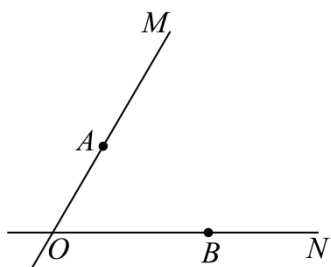
10. 尺规作图：



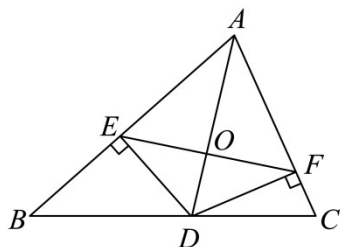
(1) 作边 AB 的垂直平分线交 BC 于点 D ，连接 AD ；

(2) 作边 AC 的垂直平分线交 BC 于点 E ，连接 AE （要求：保留作图痕迹，不写作法）

11. 如图， OM 、 ON 表示两条相交的公路， A 、 B 为公路边上的两个村庄，现要在 $\angle MON$ 区域内建一个超市 P ，要求超市到 A 、 B 两个村庄的距离相等，且 $AP \parallel OB$ 。请利用尺规作图确定超市的位置。（保留作图痕迹，不写作法）



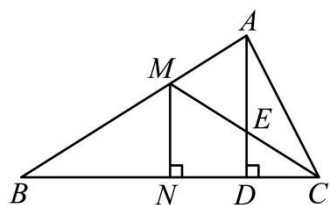
12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 上的一点，连接 AD ，作 $DE \perp AB$ 交 AB 于点 E ， $DF \perp AC$ 交 AC 于点 F ，且 AD 平分 $\angle BAC$ ，连接 EF 。



(1) 证明： AD 垂直平分 EF 。

(2) 若 $\triangle ABC$ 的周长为 18，面积为 24， $BC = 6$ ，求 DE 的长。

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BC 的垂直平分线分别交 AB ， BC 于点 M ， N ， $AD \perp BC$ 于点 D ， MC 交 AD 于点 E 。



- (1) 若 $AB = 7$ ， $AC = 5$ ，求 $\triangle AMC$ 的周长。
 (2) 求证：点 M 在线段 AE 的垂直平分线上。

14. 如图1， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， AC 与 BD 相交于点 E ， $\angle ABD = \angle ADB$ 。

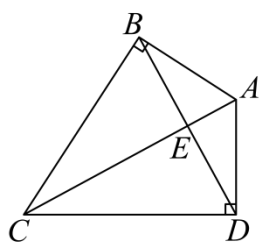


图1

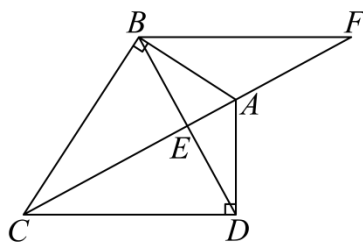
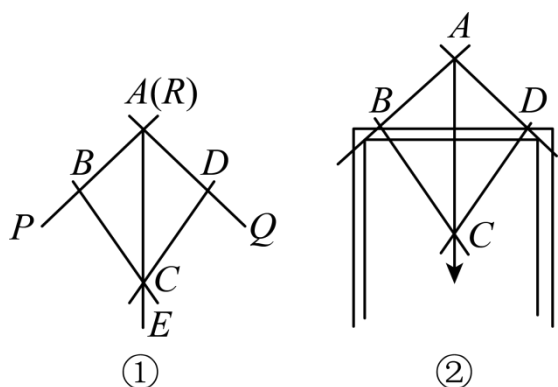


图2

- (1) 如图1，求证： AC 垂直平分 BD ；
 (2) 如图2，在图1的基础上，过点 B 作 $BF \parallel CD$ 交 CA 的延长线于点 F ，如果 $AB = AF$ ，求证： $\triangle BCD$ 是等边三角形；

15. 综合与实践：初步认识筝形后，实践小组动手制作了一个“筝形功能器”。如图，在筝形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $CB = CD$ 。



【操作应用】

(1) 如图①，将“筝形功能器”上的点 A 与 $\angle PRQ$ 的顶点 R 重合， AB, AD 分别放置在角的两边 RP, RQ 上，并过点 A, C 画射线 AE 。问 AE 是 $\angle PRQ$ 的平分线吗？请说明理由。

【实践拓展】

(2) 实践小组尝试使用“筝形功能器”检测教室门框是否水平。如图②，在仪器上的点 A 处拴一条线绳，线绳另一端挂一个铅锤（铅垂线），仪器上的点 B, D 紧贴门框上方，观察发现线绳恰好经过点 C ，即判断门框是水平的（铅垂线与水平线垂直）。实践小组的判断正确吗？请说明理由。