

专题 02 平行四边形及特殊平行四边形判定的证明思路

考点归纳

考点 01 平行四边形判定的证明思路

考点 02 矩形判定的证明思路

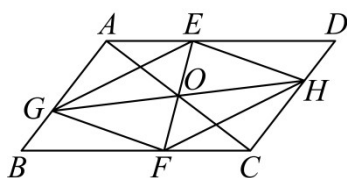
考点 03 菱形判定的证明思路

考点 04 正方形判定的证明思路

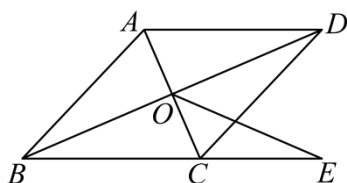
考点精练

【考点 01】 平行四边形判定的证明思路

1. (24-25 八年级下·上海松江·期中) 已知 $\square ABCD$ ，点 O 为对角线 AC 的中点，过点 O 分别作直线 EF ， GH ，直线 EF 交边 AD 、 BC 于点 E 、 F ，直线 GH 交边 AB 、 CD 于点 G 、 H 。求证：四边形 $EHFG$ 为平行四边形。



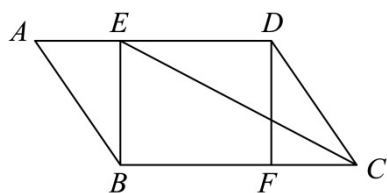
2. (23-24 八年级下·上海青浦·期中) 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = BC$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ， E 在边 BC 的延长线上，且 $OE = OB$ ， $\angle ADB = \angle OEB$ 。



(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

(2) 连接 DE ，求证： $DE \perp BE$ 。

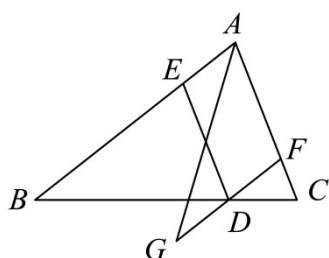
3. (23-24 八年级下·四川成都·期末) 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 、 F 分别是 AD 、 BC 边上的点，且 $AE = CF$ 。



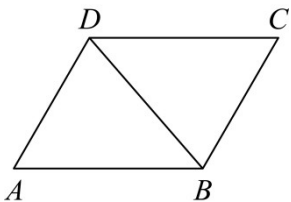
(1) 求证：四边形 $BEDF$ 是平行四边形；

(2) 连接 CE ，若 CE 平分 $\angle DCB$ ， $CF = 2$ ， $DE = 3$ ，求 $\square ABCD$ 的周长。

4. (24-25 八年级下·上海静安·期中) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别为 BC 、 AB 、 AC 上的点， $AF \parallel ED$ ，且 $AF = ED$ ，延长 FD 到点 G ，使 $DG = FD$ 。求证： ED 、 AG 互相平分。



5. (24-25 八年级下·上海奉贤·期末) 【阅读材料】

老师提出的问题：	同学们的方案：
如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD < AB$ ， $\angle A$ 为锐角。在对角线 BD 上如何确定点 E 、 F 的位置，使四边形 $AECF$ 为平行四边形？	方案 ¹ ：分别作 AE 平分 $\angle BAD$ ， CF 平分 $\angle BCD$ ，交 BD 于点 E 、 F 。
	方案 ² ：取 BD 的两个三等分点 E 、 F 。
	方案 ³ ：在 BD 上任意取一点 E ，连接 AE ，再以 C 为圆心， AE 长为半径画弧，交 BD 于点 F 。

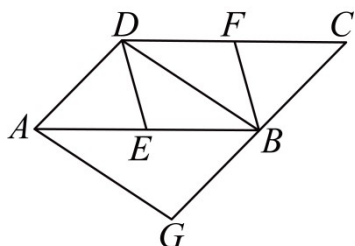
【解决问题】

(1) 写出以上三种方案中正确方案，并选择一种正确的方案，在图¹中画出图形，并说明理由；

(2) 除了这些同学们已经研究的方案之外，你还有其他方案吗？请写出方案，画出图形，并说明理由。

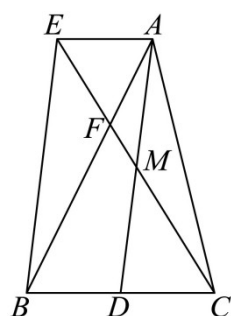
【考点 02】 矩形判定的证明思路

6. (24-25 八年级下·上海·期中) 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E, F 分别为 AB, CD 的中点， BD 是对角线， $AG \parallel DB$ 交 CB 的延长线于 G 。



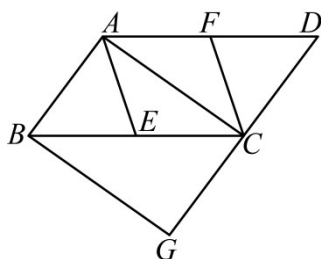
- (1) 求证： $DE = BF$ ；
- (2) 若四边形 $BEDF$ 是菱形，则四边形 $AGBD$ 是什么特殊四边形？并证明你的结论。

7. (24-25 八年级下·上海奉贤·期中) 如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， M 是 AD 的中点，过 A 点作 $AE \parallel BC$ ， CM 的延长线与 AE 相交于点 E ，与 AB 相交于点 F 。



- (1) 求证：四边形 $AEBD$ 是平行四边形；
- (2) 如果 $\angle BAD = \angle CAD$ ，求证：四边形 $AEBD$ 是矩形。

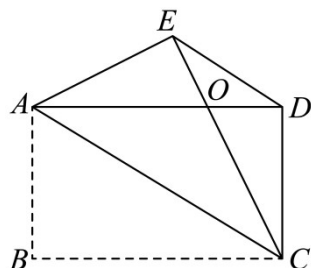
8. (24-25 八年级下·上海·期末) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E, F 分别是边 BC 和 AD 的中点，连接 AE, CF ， CA 平分 $\angle FCE$ 。



- (1) 求证：四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 作 $\angle GBC = \angle CAE$ ， BG 与 DC 的延长线交于点 G 。求证：四边形 $ABGC$ 是矩形。

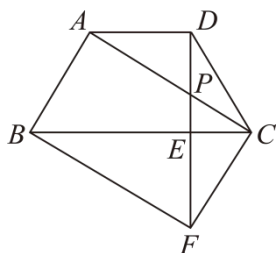
9. (24-25 八年级下·上海杨浦·期末) 已知：如图，矩形 $ABCD$ 中， $AD > AB$ ，将 $\triangle ABC$ 沿直线 AC 翻折，点 B 落在点 E 处， CE 与 AD 相交于点 O ，连接 DE 。



(1) 求证： $DE \parallel AC$ 。

(2) 连接 BE ， BE 与 AD 的交点为 G ，过 G 作 $GH \parallel DE$ 交 EC 于 H ，连接 DH 。求证：四边形 $DEGH$ 是矩形。

10. (24-25 八年级下·上海金山·期末) 如图，已知：在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ，过点 D 作 $DE \perp BC$ ，垂足为 E ，延长 DE 至 F ，使 $EF = DE$ ，连接 BF 、 AC ， AC 与 DE 相交于点 P 。

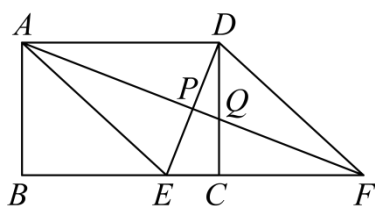


(1) 求证：四边形 $ABFC$ 是平行四边形；

(2) 如果 $AD = DE$ ， $AP = DC$ ，求证：四边形 $ABFC$ 是矩形。

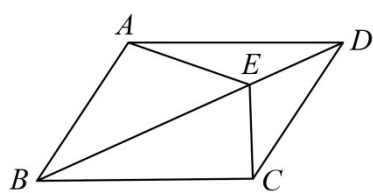
【考点 03】菱形判定的证明思路

11. (22-23 八年级下·上海长宁·期末) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 在边 BC 上，点 F 在边 BC 的延长线上，四边形 $AEFD$ 的对角线 AF 分别交 DE 、 DC 于点 P 、 Q ，且 $PD = PE$ ， DE 平分 $\angle ADF$ 。

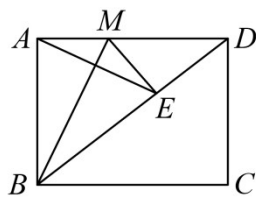


- (1) 求证：四边形 $AEFD$ 是菱形；
- (2) 如果 $BC = EF$ ， $\angle EDC = \angle EFP$ ，求证：四边形 $ABCD$ 为矩形。

12. (24-25 八年级下·上海·期中) 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， E 为对角线 BD 上任一点。



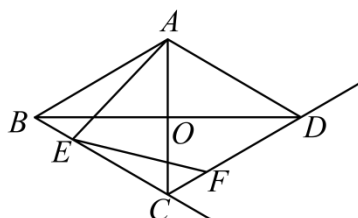
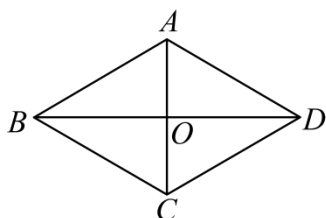
(图1)



(图2)

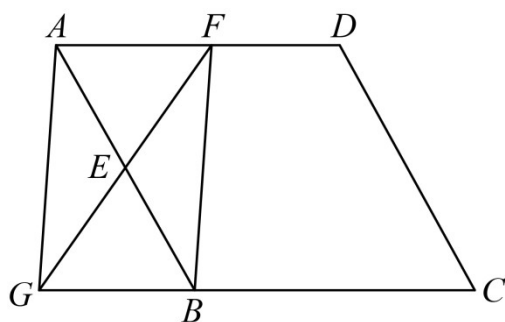
- (1) 连接 EA 、 EC ，若 $EA = EC$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；
- (2) 若 M 在 AD 上，连接 EA 、 ME ，若 $\angle BEM = \angle C$ ， $\angle DME = \angle EDC$ ，判断四边形 $ABCD$ 的形状并证明。

13. (24-25 八年级下·上海·期中) 如图，等腰 $\triangle ABD$ 中， $AB = AD$ ， O 为边 BD 的中点，射线 BC 交 AO 的延长线于点 C ， $\angle DBC = \angle DBA$ 。



- (1) 求证：四边形 $ABCD$ 为菱形；
- (2) 若 $\angle BAD = 120^\circ$ ，点 E 、 F 分别在射线 BC 、射线 CD 上，且 $EA = EF$ ，求证： $\angle AEF = 60^\circ$ ；
- (3) 在 (2) 的条件下，连接 DE ，若 $\triangle AED$ 为直角三角形， $AB = 2$ ，直接写出 DF 的长。

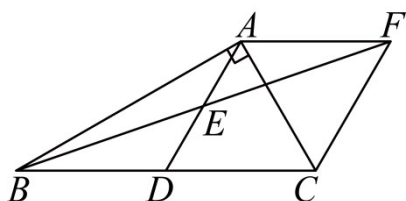
14. (23-24 八年级下·上海宝山·期末) 如图，已知平行四边形 $ABCD$ ， E 是边 AB 的中点，点 F 在边 AD 上，连接 FE 并延长交 CB 的延长线于点 G ，连接 BF 、 AG 。



(1) 如果 $\angle AFG = \angle C$ ，求证：四边形 $AGBF$ 是矩形；

(2) 如果 F 是边 AD 的中点，且 $\angle AFG = \frac{1}{2} \angle ADC$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形。

15. (23-24 八年级下·上海徐汇·期末) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 是斜边 BC 上的中线，点 E 是 AD 的中点，过 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F ，连结 CF 。

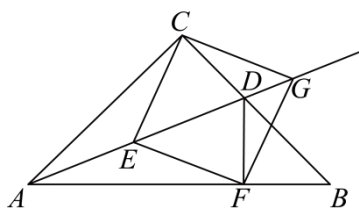


(1) 求证：四边形 $ADCF$ 是菱形；

(2) 如果 $AC = 6$ ，四边形 $ADCF$ 的面积是 30，求 AB 的长。

【考点 04】正方形判定的证明思路

16. (25-26 八年级上·上海浦东新·期末) 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 在 BC 上， $DF \perp AB$ ，垂足为 F ，且 $DF = CD$ ，点 E 为线段 AD 的中点，过点 F 作 $FG \parallel CE$ 交射线 AD 于 G ，连接 CG 。

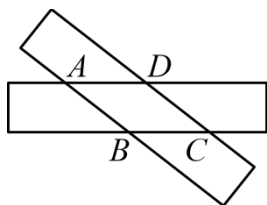


(1) 求证： $\angle CEG = \angle FEG$ ；

(2) 求证：四边形 $CEFG$ 是菱形。

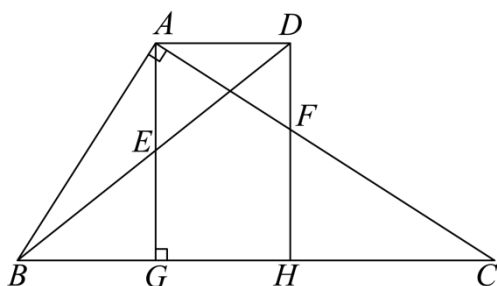
(3) 当 $AC = BC$ 时，求证：四边形 $CEFG$ 是正方形。

17. (24-25 八年级下·上海静安·期末) 操作 现有两张完全相同的长方形纸条，它们的长为 25 厘米，宽为 5 厘米，将其交叠摆放 (如图所示)，使它们对角线的交点重合。现固定其中一张纸片，将另一张纸片绕对角线交点旋转一定角度，使它们的重叠部分始终形成四边形 $ABCD$ 。



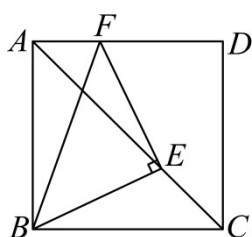
- (1) 重叠部分四边形 $ABCD$ 是什么形状的四边形？请说明理由，
- (2) 重叠部分图形的最小面积和最大面积分别是多少？请直接填写：最小面积 _____ cm^2 ，最大面积 _____ cm^2 。

18. (23-24 八年级下·上海长宁·期末) 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AG 是 BC 边上的高。 H 为线段 CG 上的点，以 AG 、 GH 为邻边作矩形 $AGHD$ ，连结 BD 交 AG 于点 E ，联结 AC 交 DH 于点 F 。



- (1) 如果 $AB = AF$ ，求证：四边形 $AGHD$ 为正方形；
- (2) 联结 EF ，如果 $\angle DBC = \angle BAG$ ，求证：四边形 $AEFD$ 为矩形。

19. (23-24 八年级下·上海嘉定·期末) 如图，菱形 $ABCD$ 中， E 是对角线 AC 上一点， $EF \perp BE$ ，交边 AD 于点 F ，且 $EF = BE$ 。



- (1) 求证： $\angle DFE = \angle ABE$ ；
- (2) 求证：四边形 $ABCD$ 是正方形。

20. (22-23 八年级下·上海长宁·期末) 已知在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ，交边 AD 于点 E 。

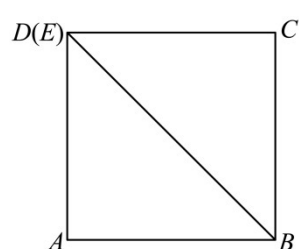


图1

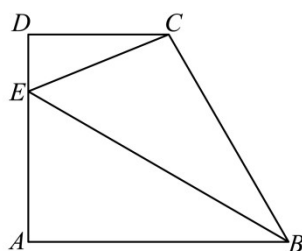
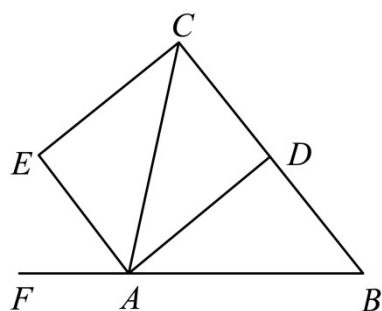


图2

- (1) 如图 1，如果点 E 与点 D 重合， $AD = AB$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是正方形；
- (2) 如果 $AB = 5$ ， $AD = 4$ ，
- ① 如图 2，当 $BC = \frac{8}{3}\sqrt{3}$ 时，求 $\angle EBC$ 的度数；
- ② 当 $\triangle BEC$ 是直角三角形时，求 DE 的长。

21. (22-23 八年级下·上海青浦·期末) 如图，在三角形 ABC 中， $AB = AC$ ， AD 、 AE 分别是 $\angle BAC$ 与它的邻补角的平分线， $CE \perp AE$ 于点 E 。

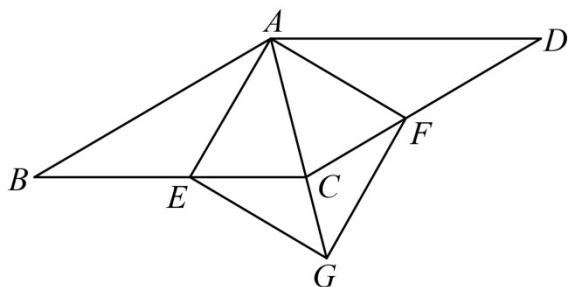


- (1) 求证：四边形 $ADCE$ 是矩形；
- (2) 连接 ED 交 AC 于点 O ，若 $\angle AOE = 2\angle B$ ，求证：四边形 $ADCE$ 是正方形。

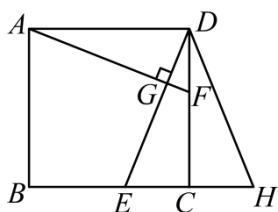
22. (24-25 八年级下·上海·期末) 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是菱形，点 E, F 分别在边 BC, CD 上，且 $BE = DF$ ，过点 F 作 AE 的平行线交对角线 AC 的延长线于点 G ，联结 EG 。

(1) 求证：四边形 $AEGF$ 是菱形；

(2) 如果 $\angle B = \angle BAE = 30^\circ$ ，求证：四边形 $AEGF$ 是正方形。



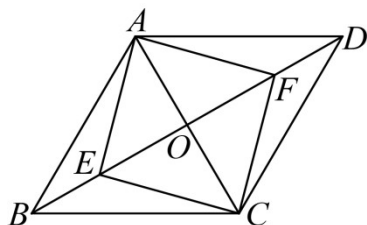
23. (24-25 八年级下·云南红河·期中) 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在 BC, CD 上，且 $DE = AF$ ， $DE \perp AF$ 于点 G 。



(1) 求证：矩形 $ABCD$ 是正方形；

(2) 延长 BC 到点 H ，使得 $CH = DF$ ，连接 DH ，判断 $\triangle DEH$ 的形状，并说明理由。

24. (24-25 八年级下·河北邢台·期中) 在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于点 O ，点 E, F 在对角线 BD 上的位置如图所示，且 $BE = DF$ ， $AC = EF$ ，连接 AE, CE, CF, AF 。

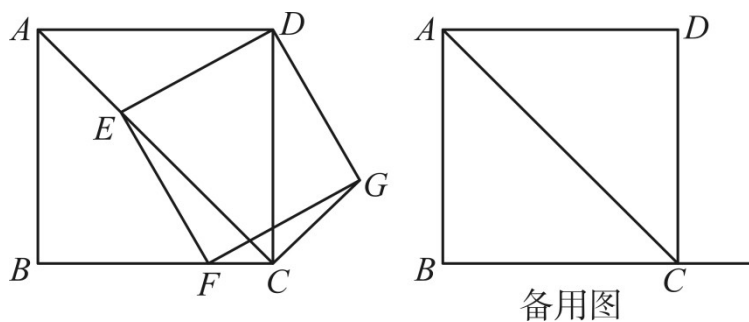


(1) 求证：四边形 $AECF$ 是正方形；

(2) 若 $AB = \sqrt{26}$ ， $OB = 3\sqrt{2}$ ，求 AE 的长。

25. (24-25 八年级下·广西南宁·期中) 如图，四边形 $ABCD$ 为正方形，点 E 为线段 AC 上一点，连接 DE ，

过点 E 作 $EF \perp DE$ ，交射线 BC 于点 F ，以 DE ， EF 为邻边作矩形 $DEFG$ ，连接 CG ，且 $\angle CGD = \angle AED$ 。



- (1) 求证：矩形 $DEFG$ 是正方形；
- (2) 若 $AB = 2$ ， $CE = \sqrt{2}$ ，求 CG 的长度；
- (3) 当线段 DE 与正方形 $ABCD$ 的某条边的夹角是 37° 时，求 $\angle EFC$ 的度数。