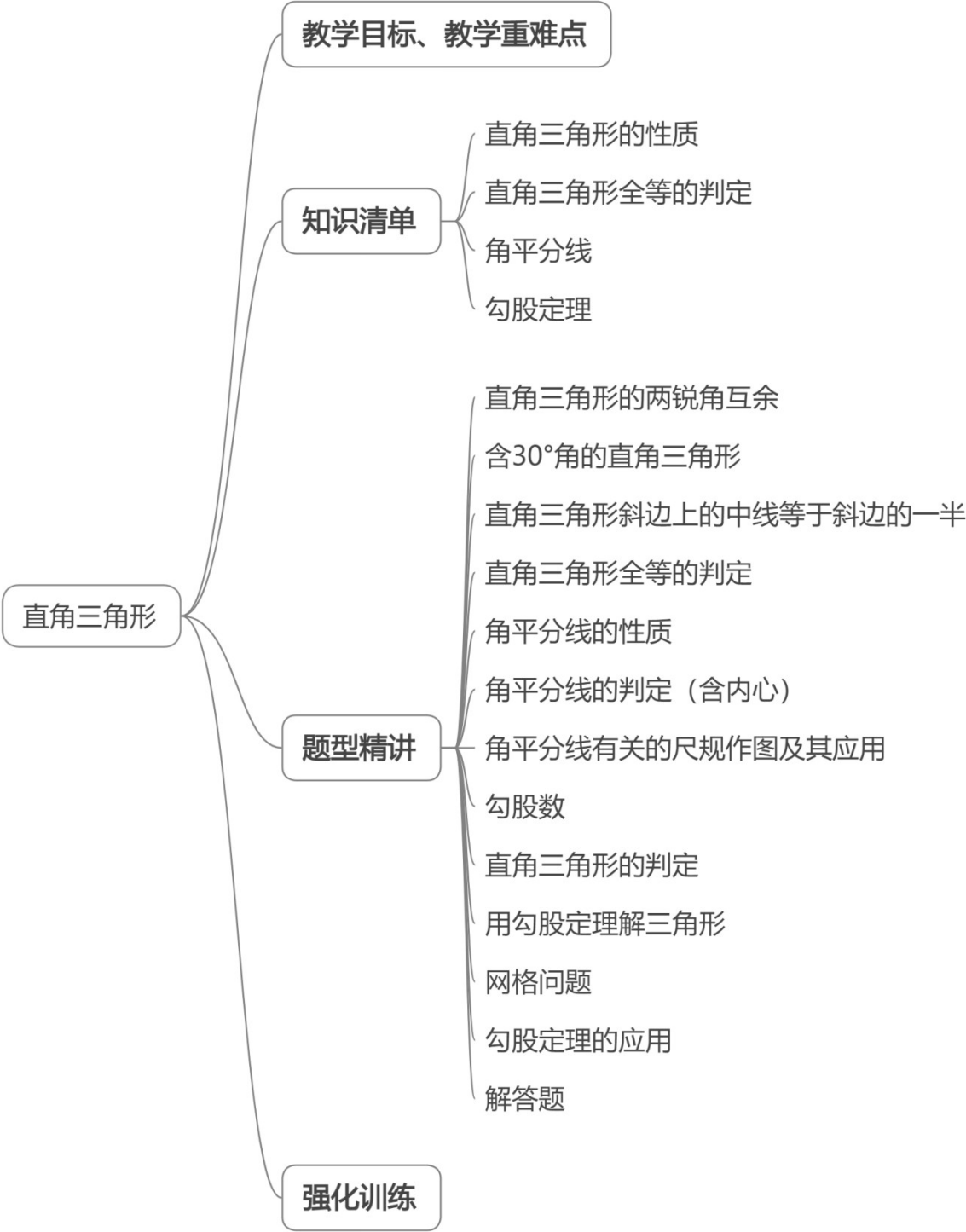


第 22 章 直角三角形

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 了解直角三角形的性质及推论； 2. 知道直角三角形全等的判定方法； 3. 掌握角平分线的性质与判定； 4. 熟悉勾股定理及其逆定理； 5. 学习勾股定理的应用。
教学重难点	1.重点 (1) 直角三角形的性质；直角三角形全等的判定； (2) 角平分线的性质与判定； (3) 勾股定理及其应用。 2.难点 (1) 新定义题；动态几何题；分类讨论思想； (2) 直角三角形的综合应用。

知识清单

知识点1 直角三角形的性质

1.直角三角形的性质 1

定理 直角三角形的两个锐角互余.

其逆命题也是正确的，即得到直角三角形的一个判定定理：

定理 两个锐角互余的三角形是直角三角形.

2.直角三角形的性质 2

定理 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

直角三角形的性质 2 的推论

在三角形中，一边上的中线等于这条边的一半，则该三角形为直角三角形。

或这样表述：

在三角形中，一边上的中线等于这条边的一半，则这条边所对的角为直角。

3.直角三角形的性质 3

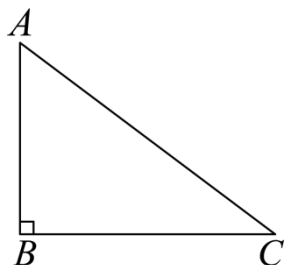
定理：在直角三角形中，如果一个锐角等于 30° ，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

推论：在直角三角形中，如果一条直角边等于斜边的一半，那么这条直角边所对的角等于 30° 。

【即学即练】

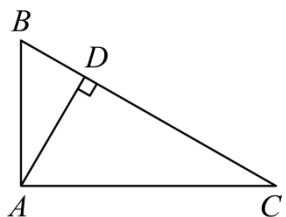
1. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 10^\circ$ ，则 $\angle B =$ _____。

2. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，若 $AB = 2$ ，则 $AC =$ ()



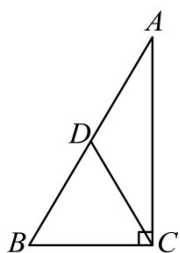
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 如图， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD \perp BC$ ， $\angle BAD = 30^\circ$ ， $BD = 1$ ，则 $BC =$ ()



- A. 3 B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. 5

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 2\text{cm}$ ，点 D 为 AB 的中点，则 $CD =$ ()



- A. 1cm B. 2cm C. 3cm D. 4cm

5. 下列命题正确的是 ()

A. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = \frac{1}{2}AC$ ，则 $\angle A = 30^\circ$

B. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = \frac{1}{2}AB$ ，则 $\angle A = 30^\circ$

C. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = \frac{1}{2}AB$ ，则 $\angle A = 30^\circ$

D. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, \angle B = 30^\circ$, 则 $AC = \frac{1}{2}BC$

知识点2 直角三角形全等的判定

1. 直角三角形全等的判定

定理 如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等, 那么这两个直角三角形全等.

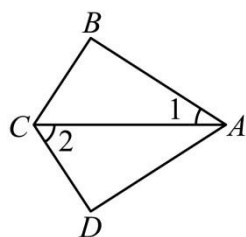
可用来证明的推论 有一条直角边和斜边上的高对应相等的两个直角三角形全等.

【即学即练】

1. 下列条件不能判定两个直角三角形全等的是 ()

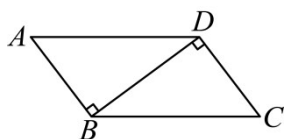
- A. 斜边和一直角边对应相等 B. 两个锐角对应相等
C. 一锐角和斜边对应相等 D. 两条直角边对应相等

2. 如图, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, $BC = CD$, $\angle 1 = 40^\circ$, 则 $\angle 2 =$ ()



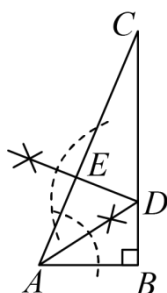
- A. 40° B. 50° C. 60° D. 75°

3. 如图, 已知 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, 若用“HL”判定 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle CDB$ 全等, 则需要添加的条件是 ()



- A. $AD = CB$ B. $\angle A = \angle C$ C. $\angle ADB = \angle CBD$ D. $AB = CD$

4. 如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, 根据尺规作图的痕迹判断以下结论错误的是 ()



A. $DB = DE$ B. $AB = AE$ C. $\angle EDC = \angle BAC$ D. $\angle DAC = \angle C$

知识点3 角平分线

1. 角平分线的性质

定理 角平分线上的点到这个角的两边所在直线的距离相等.

显然，角平分线的端点到这个角的两边所在直线的距离相等，都为0.

注意：研究角平分线有关问题时，约定所涉及的角小于平角.

2. 角平分线的判定

定理 在角的内部，到角的两边所在直线距离相等的点，均在这个角的平分线上.

3. 三角形的内心

三角形的三个内角的平分线相交于一点，这个交点叫作三角形的内心.

4. 作垂直平分线与角平分线的交点

例 如图 22-2-11, 已知 $\angle AOB$ 及其内部一点 C .

求作 $\angle AOB$ 内部一点 P , 使 $PC = PO$, 且点 P 到直线 OA 、 OB 的距离相等.

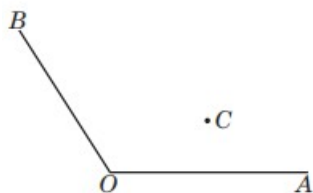


图 22-2-11

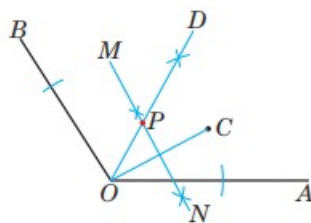


图 22-2-12

分析 假定点 P 已经作出，由 $PC = PO$, 可知点 P 一定在线段 OC 的垂直平分线上. 又由点 P 在 $\angle AOB$ 内部且到直线 OA 、 OB 的距离相等，可知点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上. 因此， P 应是线段 OC 的垂直平分线与 $\angle AOB$ 的平分线的交点.

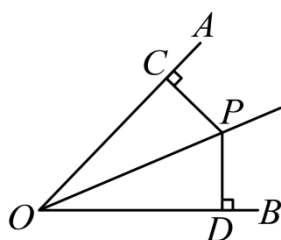
作法

- (1) 连接 OC , 作线段 OC 的垂直平分线 MN ;
- (2) 作 $\angle AOB$ 的平分线 OD , OD 与 MN 相交于点 P .

P 就是所求的点(图 22-2-12).

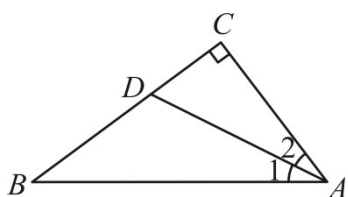
【即学即练】

1. 如图，点 P 在 $\angle AOB$ 的平分线上， $PC \perp OA$ 于 C ， $PD \perp OB$ 于 D ，若 $PC = 3$ ，则 PD 的长度为 ()



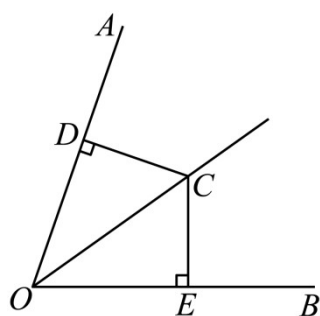
- A . 1.5 B . 2 C . 3 D . 6

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 是 BC 边上的一点， $\angle 1 = \angle 2$ ， $BC = 10$ ， $BD = 7$ ，则点 D 到 AB 的距离为 ()



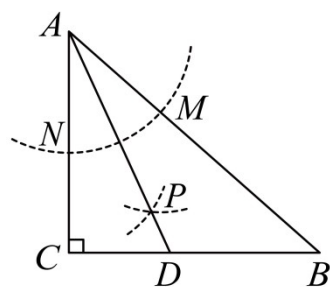
- A . 3 B . 4 C . 6 D . 10

3. 如图， $\angle AOB = 70^\circ$ ，点 C 是 $\angle AOB$ 内一点， $CD \perp OA$ 于点 D ， $CE \perp OB$ 于点 E 。且 $CD = CE$ ，则 $\angle DOC$ 的度数是 ()



- A . 30° B . 35° C . 40° D . 45°

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以 A 为圆心，任意长为半径画弧分别交 AB 、 AC 于点 M 和 N ，再分别以 M 、 N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P ，连接 AP 并延长交 BC 于点 D 。若 $CD = 4$ ， $AB = 12$ ，则 $S_{\triangle ABD}$ 的值为 ()



A . 24

B . 36

C . 48

D . 60

知识点 4 勾股定理

一、勾股定理

我们来研究直角三角形三边之间的关系.

定理 在直角三角形中，斜边大于直角边.

定理 连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短.

简单地说：垂线段最短.

勾股定理 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

二、勾股定理的逆定理

1.勾股定理的逆定理 如果三角形的一条边的平方等于其他两条边的平方和，那么这个三角形是直角三角形.

2.勾股数

我们已经知道， $3^2+4^2=5^2$, $8^2+15^2=17^2$, 如果正整数 a 、 b 、 c 满足 $a^2+b^2=c^2$, 那么 a 、 b 、 c 称为一组勾股数. 以勾股数中的三个数为三边长的三角形一定是直角三角形.

三、应用勾股定理解决实际问题

- (1) 解决两点距离问题：画出正确的图形，已知直角三角形两边，利用勾股定理求第三边。
- (2) 解决航海问题：理解方向角、灯塔等概念，根据题意画出图形，利用定理或逆定理解决问题。
- (3) 解决实际问题中两线段是否垂直的问题：以已知两线段为边构造一个三角形，根据三边的长度，利用勾股定理的逆定理解决问题。
- (4) 解决折叠问题：正确画出折叠前、后的图形，运用勾股定理及方程思想解题。
- (5) 解决梯子问题：梯子架到墙上，梯子、墙、地面构成直角三角形，利用勾股定理等知识解题。
- (6) 解决侧面展开问题：将立体图形的侧面展开成平面图形，利用勾股定理解决表面距离最短问题。

四、勾股定理的有关作图题

例 给出单位长度 1, 作长为 $\sqrt{3}$ 的线段.

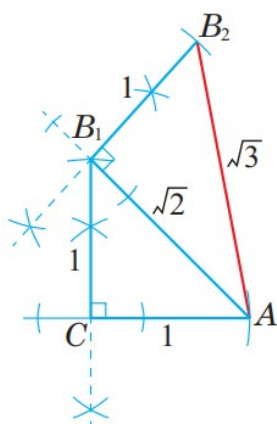


图 22-3-11

分析 根据勾股定理，可知两条直角边长都为 1 的直角三角形，它的斜边长等于 $\sqrt{2}$ ；两条直角边长分别为 $\sqrt{2}$ 、1 的直角三角形，它的斜边长就等于 $\sqrt{3}$ 。

作法 如图 22-3-11。

- (1) 作两条直角边长都为 1 的直角三角形 ACB_1 ，其中 $\angle C = 90^\circ$ ；
 - (2) 以斜边 AB_1 为一直角边，作另一直角边长为 1 的直角三角形 AB_1B_2 。
- 斜边 AB_2 的长度是 $\sqrt{3}$ ，它就是所求的线段。

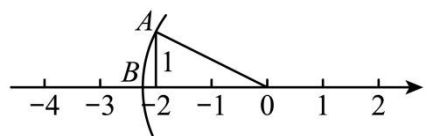
【即学即练】

1. 下列各组数是勾股数的是 ()

- A. 2, 3, 5 B. $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$ C. 8, 15, 17 D. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$

2. 已知直角三角形的两边长分别为 3 和 5，则第三边的长为_____。

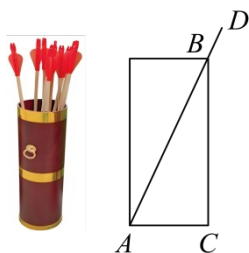
3. 如图，已知 $OA = OB$ ， $BC \perp AC$ 于点 C 。点 O 对应的数是 0，点 C 对应的数是 -2， $AC = 1$ ，那么数轴上点 B 所表示的数是_____。



4. 三角形的三边 a, b, c 满足 $(a+b)^2 = 2ab + c^2$ ，则这个三角形是 ()

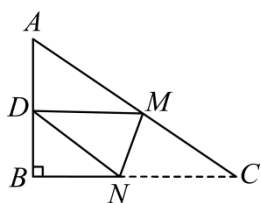
- A. 直角三角形 B. 等边三角形 C. 锐角三角形 D. 钝角三角形

5. 《醉翁亭记》中写道：“……射者中……”，其中“射”指投壶，宴饮时的一种游戏。如图，现有一圆柱形投壶，内部底面直径是 10cm，内壁高 24cm，若箭长 36cm，则箭在投壶外面部分的长度不可能是 ()



- A . 9cm B . 10cm C . 11.5cm D . 12cm

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $BC = 10$ ，将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 C 与 AB 的中点 D 重合，折痕交 AC 于点 M ，交 BC 于点 N ，则线段 CN 的长为 ()



- A . 5 B . $\frac{29}{5}$ C . $\frac{25}{4}$ D . $\frac{21}{5}$

题型精讲

题型 01 直角三角形的两锐角互余

【典例 1】. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数为 ()

- A . 20° B . 30° C . 40° D . 50°

【变式 1】. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B$ 是 $\angle A$ 的 2 倍，则 $\angle A$ 的度数为 ()

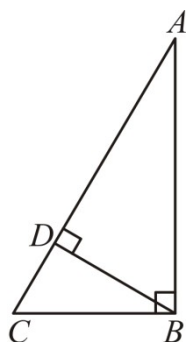
- A . 30° B . 60° C . 90° D . 120°

题型 02 含 30° 角的直角三角形

【典例 1】. $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 2\text{cm}$ ，则 AB 的长度是 ()

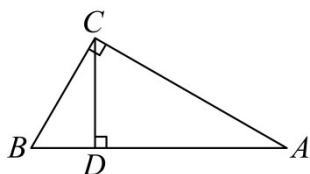
- A . 2cm B . 4cm C . 6cm D . 8cm

【变式 1】. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 为直角， $\angle A = 30^\circ$ ， $BD \perp AC$ 于 D ，若 $CD = 2$ ，则 AC 的长为 ()



- A . 8 B . 6 C . 4 D . 2

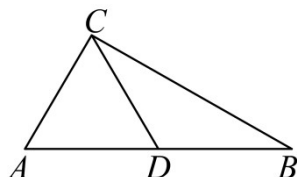
【变式2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是高， $\angle A = 30^\circ$ ，则 $AD:BD = (\quad)$



- A . 3:1 B . 3:2 C . 4:1 D . 2:1

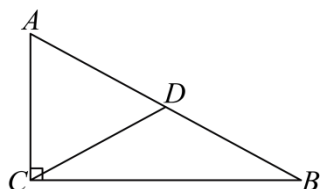
题型 03 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半

【典例1】 . 如图， CD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线，且 $CD = 7$ ，则 $AB = (\quad)$

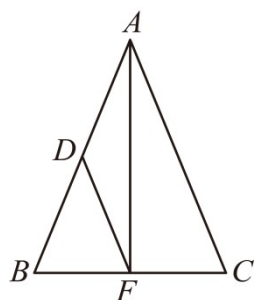


- A . 14 B . 13 C . 7 D . 3.5

【变式1】 . 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是斜边 AB 的中线， $\angle B = 30^\circ$ ， $BC = \sqrt{3}\text{cm}$ ，则 CD 的长为_____cm .

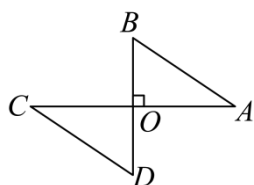


【变式2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 6$ ，点 F 是 BC 的中点，点 D 是 AB 的中点，连接 AF 和 DF ，若 $\triangle DBF$ 的周长是 11，则 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$.



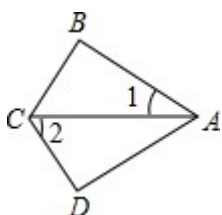
题型 04 直角三角形全等的判定

【典例 1】. 如图，已知 $AC \perp BD$ ，垂足为 O ， $AO = CO$ ， $AB = CD$ ，则可得到 $\triangle AOB \cong \triangle COD$ ，理由是 ()



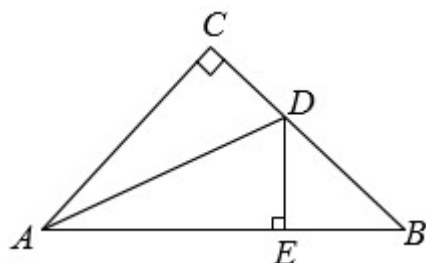
- A. HL B. SAS C. ASA D. SSS

【变式 1】. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， $CB = CD$ ， $\angle 1 = 30^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ ()



- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

【变式 2】. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， AD 平分 $\angle CAB$ ，交 BC 于 D ， $DE \perp AB$ 于 E ， $AB = 10\text{cm}$ ，则 $\triangle DEB$ 的周长为 ()

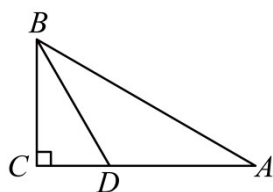


- A. 8cm B. 10cm C. 12cm D. 14cm

题型 05 角平分线的性质

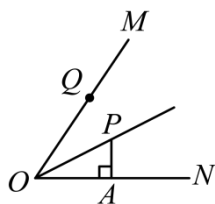
【典例 1】. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AD = 4$ ， $AD = 2CD$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，则点 D 到 AB 的距

离为 ()



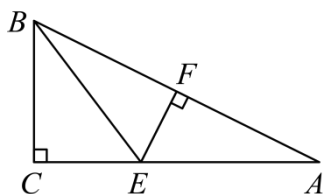
- A . 2 B . 3 C . 4 D . 1 . 5

【变式1】 . 如图， OP 平分 $\angle MON$ ， $PA \perp ON$ 于点 A ，点 Q 是射线 OM 上的一个动点，若 $PA = 2$ ，则 PQ 的值不可能是 ()



- A . 4 B . 3 C . 2.5 D . 1.5

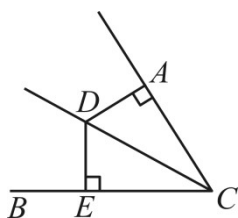
【变式2】 . 如图所示，在三角形纸片 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $CE = 3$ ， $AB = 12$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ， $EF \perp AB$ 于 F ，则 $\triangle ABE$ 面积为 ()



- A . 12 B . 16 C . 18 D . 36

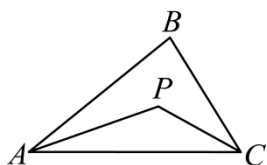
题型 06 角平分线的判定 (含内心)

【典例1】 . 如图， $DA \perp AC$ ， $DE \perp BC$ ，若 $AD = 5\text{cm}$ ， $DE = 5\text{cm}$ ， $\angle ACB = 58^\circ$ ，则 $\angle DCE =$ ()



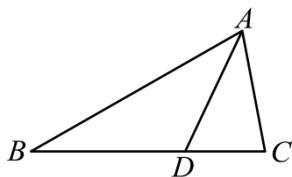
- A . 26° B . 29° C . 58° D . 32°

【变式1】 . 如图，已知点 P 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等， $\angle B = 80^\circ$ ，则 $\angle P$ 的度数为 ()



- A . 110° B . 120° C . 130° D . 140°

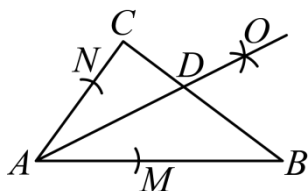
【变式2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 70^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AC = 2$ ，若 $S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ACD}$ ，则 $\angle CAD$ 的度数为 ()



- A . 45° B . 40° C . 35° D . 30°

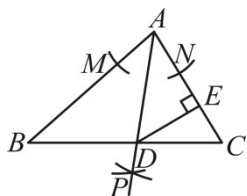
题型 07 角平分线有关的尺规作图及其应用

【典例1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以点 A 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 AB ， AC 于点 M ， N ，再分别以点 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 O ，作射线 AO ，交 BC 于点 D . 已知 $BD = 5$ ， $CD = 3$ ，则点 D 到 AB 的距离为 ()



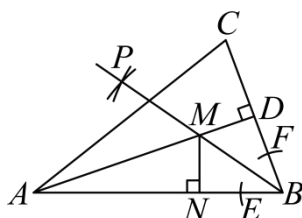
- A . 8 B . 5 C . 3 D . 2

【变式1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $AC = 4$ ，在 AB 和 AC 上分别截取 AM ， AN ，使 $AM = AN$ ，分别以点 M ，点 N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 P ，连接射线 AP 与 BC 相交于点 D ，过点 D 作 $DE \perp AC$ 于 E . 若 $DE = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 面积为 ()



- A . 10 B . 9 C . 8 D . 7

【变式2】 . 如图，在锐角三角形 ABC 中， AD 是边 BC 上的高，在 BA, BC 上分别截取线段 BE, BF ，使 $BE = BF$ ；分别以点 E, F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，在 $\angle ABC$ 内，两弧交于点 P ，作射线 BP 交 AD 于点 M ，过点 M 作 $MN \perp AB$ 于点 N ，若 $MN = 4, AD = 4MD$ ，则 $AM =$ _____.



题型 08 勾股数

【典例1】 . 下列各组数中，是勾股数的是 ()

A . 6 , 9 , 12

B . 0.3 , 0.4 , 0.5

C . $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$

D . 7 , 24 , 25

【变式1】 . 下列各组数中，是勾股数的是 ()

A . 0.3 0.4 0.5

B . $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$

C . 10 15 18

D . 7 24 25

题型 09 直角三角形的判定

【典例1】 . 已知 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边，下列条件中不能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是 ()

A . $\angle A + \angle B + \angle C = 112^\circ$

B . $\angle A = \angle B - \angle C$

C . $b^2 = a^2 - c^2$

D . $a + b + c = 112$

【变式1】 . 在 $\triangle ABC$ 中， a 、 b 、 c 分别是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边，下列条件能判断 $\triangle ABC$ 是直角三角形的是_____.

① $\angle A - \angle B = \angle C$; ② $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$; ③ $(b+c)(b-c) = a^2$; ④ $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = 3$

【变式2】 . 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三条边长，且满足 $(a-5)^2 + |b-12| + c^2 - 26c + 169 = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A . 10

B . 20

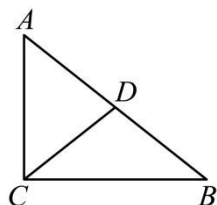
C . 30

D . 40

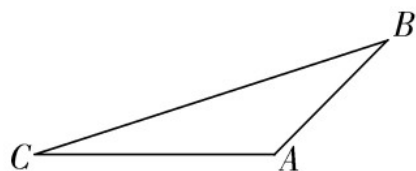
题型 10 用勾股定理理解三角形

【典例 1】. 在直角三角形 ABC 中， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，则 $AB =$ _____.

【变式 1】. 如图，三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 为 AB 的中点，连接 CD ， $AC = 5$ ， $CD = 4$ ，则 $BC =$ _____.

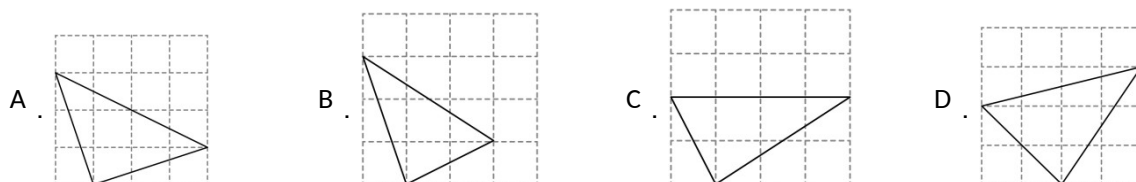


【变式 2】. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 135^\circ$ ， $AB = 20$ ， $AC = 30$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.

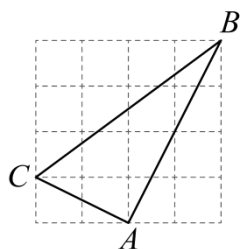


题型 11 网格问题

【典例 1】. 在 4×4 的方格纸中，三角形的顶点都在格点上，则下列选项中的图形是直角三角形的是 ()



【变式 1】. 如图，在 4×4 的网格中，每个小正方形的边长均为 1，点 A ， B ， C 都在格点上，则下列结论错误的是 ()



A. $AB^2 = 20$

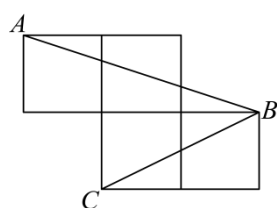
B. $\angle BAC = 90^\circ$

C. $\triangle ABC$ 的面积为 10

D. 点 A 到直线 BC 的距离是 2

【变式 2】. 如图，每个小正方形的边长为 1， A ， B ， C 分别是小正方形的顶点，则 $\angle ABC$ 的度数为

()



A . 30°

B . 40°

C . 45°

D . 50°

题型 12 勾股定理的应用

【典例 1】 . 如图，一棵大树被风吹断后，树尖落在距树脚⁸米远，大树折断处离地面⁶米，则大树高 ()



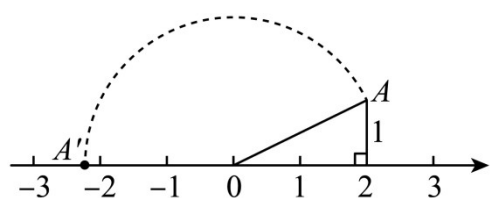
A . 6 米

B . 10 米

C . 16 米

D . 18 米

【变式 1】 . 如图，在数轴上点 A' 表示的实数是 ()



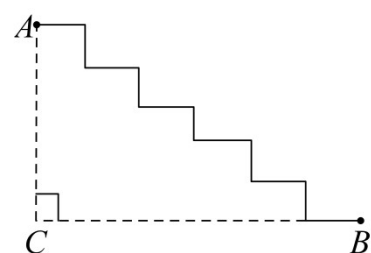
A . $-\sqrt{5}$

B . $-\sqrt{3}$

C . -2

D . $\sqrt{5}$

【变式 2】 . 如图，是台阶的模型图 . 已知每个台阶的宽度都是²cm，每个台阶的高度都是¹cm，连接 AB ，则 AB 等于 ()



A . 13cm

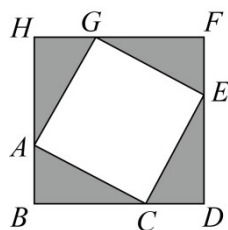
B . 14cm

C . 15cm

D . 16cm

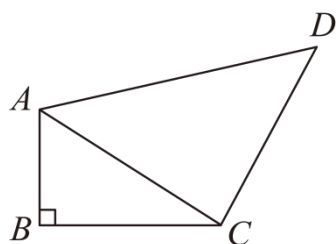
【变式3】 . 在证明“勾股定理”时，可以将4个全等的直角三角形和一个小正方形拼成一个大正方形（如

图所示， $AB < BC$ ）. 如果小正方形的面积是 25 ，大正方形的面积为 49 ，那么 $\frac{BC}{AB} =$ _____ .

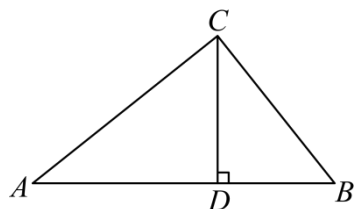


题型13 解答题

【典例1】 . 如图：已知，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ 于点 B ， $AB = 9$ ， $BC = 12$ ， $CD = 15$ ， $DA = 15\sqrt{2}$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积 .



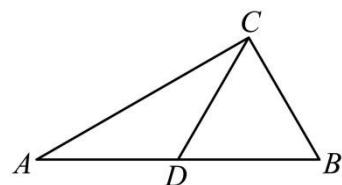
【变式1】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CD \perp AB$ 于点 D ， $BD = 9$ ， $BC = 15$ ， $AC = 20$.



(1) 求 CD 的长；

(2) 求 $\angle ACB$ 的度数 .

【变式2】 . 如图， CD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的中线， $\angle A = 30^\circ$.



(1) 求 $\angle B$ 的度数 .

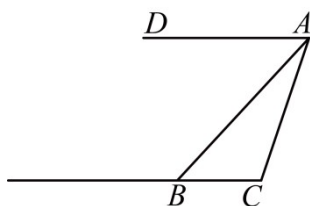
(2) 若 $AB = 10$ ，求 $\triangle BDC$ 的周长 .

【变式3】 . 已知：如图， $\triangle ABC$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle DAB = 2\angle BAC$.

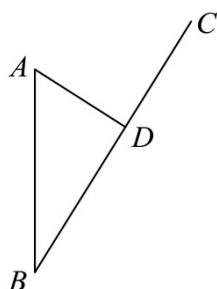
操作：过点 C 作 $CE \perp AD$ ，垂足为 E ，在 CB 的延长线上，求作一点 P ，使点 P 到 $\angle BAD$ 两边的距离相等，连接 AP ， AP 与 CE 相交于点 Q .

猜想：线段 PQ 与 AC 之间的数量关系为：_____ .

证明：



【变式4】 . 今年，第 13 号台风“贝碧嘉”9 月 16 日登陆后的影响还在持续，第 14 号台风“普拉桑”和第 15 号台风“苏力”又于 19 日登陆 . A 市接到台风警报时，台风中心位于距离 A 市 52km 的 B 处（即 $AB = 52\text{km}$ ），正以 8km/h 的速度沿 BC 直线方向移动 .



(1) 已知 A 市到 BC 的距离 $AD = 20\text{km}$ ，那么台风中心从 B 点移到 D 点经过多长时间？

(2) 如果在距台风中心 25km 的圆形区域内都将受到台风影响，那么 A 市受到台风影响的时间是多长？

【变式5】 . 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB > AC$ ，点 D 在射线 BC 上，连接 AD ， $\angle ADB = 2\angle B$.

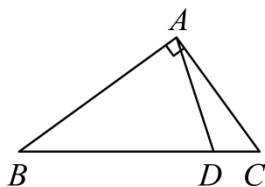


图1

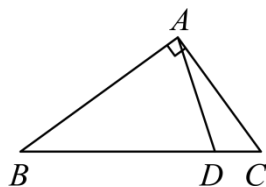


图2

(1) 如图 1，若 AD 的垂直平分线经过点 B ，求 $\angle C$ 的度数；

(2) 如图 2，当点 D 在边 BC 上时，求证： $BC = 2AD$ ；

(3) 若 $AC = 2$ ， $BD = 5CD$ ，请直接写出 CD 的长 .

强化训练

一、单选题

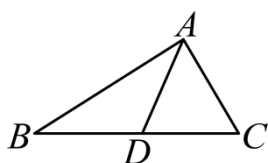
1. 若直角三角形的一个锐角是 25° ，则另一个锐角的度数是 ()

- A. 35° B. 45° C. 55° D. 65°

2. $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 2\text{cm}$ ，则 AB 的长度是 ()

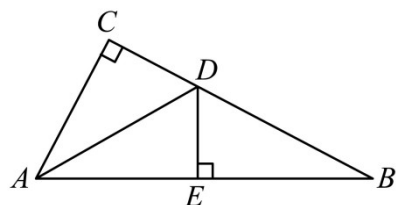
- A. 2cm B. 4cm C. 8cm D. 16cm

3. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， AD 是 BC 边上的中线，且 $AD = 5$ ，则 BC 的长是 ()



- A. 2.5 B. 5 C. 7.5 D. 10

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \perp AB$ 于 E ， $DE = 3\text{cm}$ ， $BC = 7\text{cm}$ ，则 $BD =$ ()

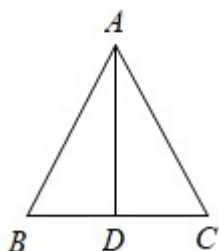


- A. 3cm B. 4cm C. 5cm D. 6cm

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c ，下列条件不能判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形的是 ()

- A. $\angle A + \angle B = 90^\circ$ B. $a^2 = 3, b^2 = 4, c^2 = 5$
C. $a = 5, b = 12, c = 13$ D. $a^2 = c^2 - b^2$

6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于 D ，能根据“HL”判定判断 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 的是 ()



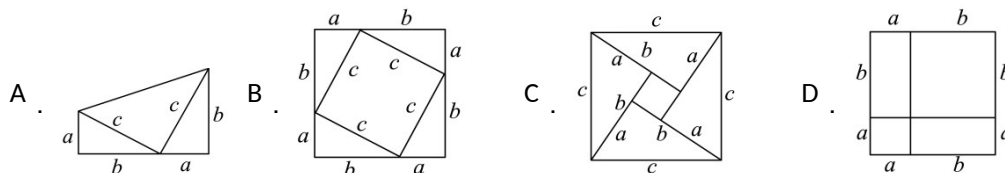
A. $BD = CD$

B. $\angle B = \angle C$

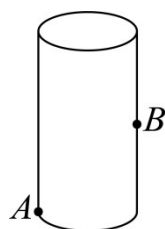
C. $\angle BAD = \angle CAD$

D. $AB = AC$

7. 我国是最早了解勾股定理的国家之一. 下面四幅图中, 不能证明勾股定理的是 ()



8. 如图, 一只蚂蚁从点 A 沿圆柱侧面爬到相对一侧中点 B 处, 如果圆柱的高为 16cm , 圆柱的底面半径为 $\frac{6}{\pi}\text{cm}$, 那么最短的路线长是 () .



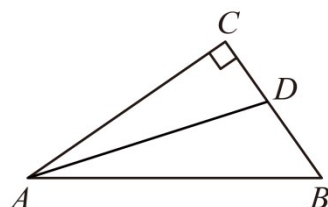
A. 6cm

B. 8cm

C. 10cm

D. $10\pi\text{cm}$

9. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 在 BC 上, 连接 AD , $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle ABD} = AC : AB$, 若 $\angle B = 54^\circ$, 则 $\angle BAD$ 的度数为 ()



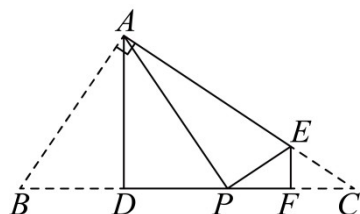
A. 20°

B. 16°

C. 18°

D. 36°

10. 如图, 三角形纸片 ABC 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 2$, $AC = 3$, 沿 AD 和 EF 将纸片折叠, 使点 B 和点 C 都落在边 BC 上的点 P 处, 则 EC 的长是 ()



A. $\frac{13}{6}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{7}{6}$

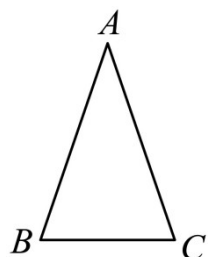
D. $\frac{6}{5}$

二、填空题

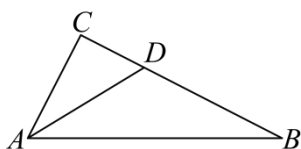
11. 已知直角三角形的两条直角边的长分别为⁴和⁵，那么斜边的长为_____.

12. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $AB = 6cm$ ，则 $BC =$ _____.

13. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积是⁴，则 AB 的长为_____.

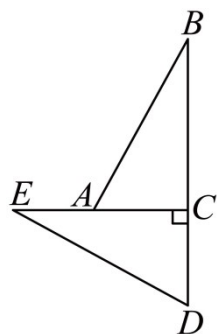


14. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle CAB$ ， $CD = 2$ ， $AB = 13$ ，则 $\triangle ABD$ 的面积为_____.

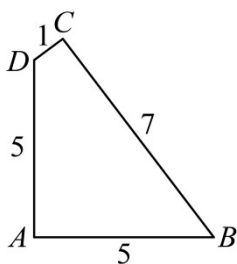


15. 如图， $EC \perp BD$ ，垂足为 C ， A 是 EC 上的一点， $AC = CD$ ，连接 AB 、 ED ，且 $AB = DE$ 。若

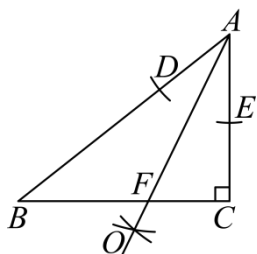
$AC = 3.5$ ， $BD = 9$ ，则 CE 的长为_____.



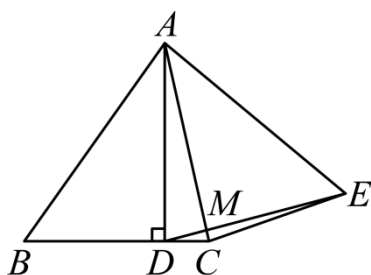
16. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AD = AB = 5$ ， $BC = 7$ ， $CD = 1$ ，四边形 $ABCD$ 的面积为_____.



17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以 A 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 AB ， AC 于点 D ， E ，再分别以 D ， E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 长为半径画弧，两弧交于点 O ，作射线 AO ，交 BC 于点 F ，已知 $AB = 5$ ， $S_{\triangle ABF} = \frac{15}{4}$ ，则 CF 的长为_____。

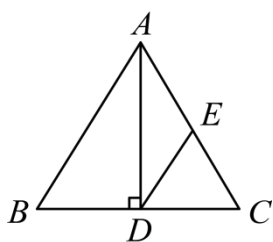


18. 在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于点 D ，点 E 在 AC 边的右侧， $\angle CDE = \angle CAD$ ， $AE \perp AB$ ，连接 CE ，若 $AD = BC$ ， $CD = 1$ ， $S_{\triangle ADE} = 8$ ， AC 与 DE 交于 M ，则 $\frac{AM}{CM} =$ _____。

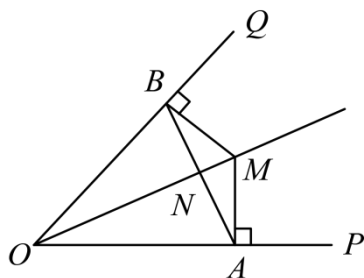


三、解答题

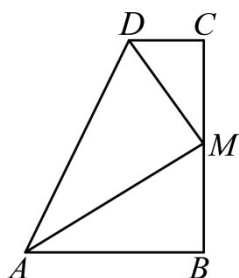
19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 8$ ， AD 是底边上的高， E 为 AC 的中点，求 DE 的长。



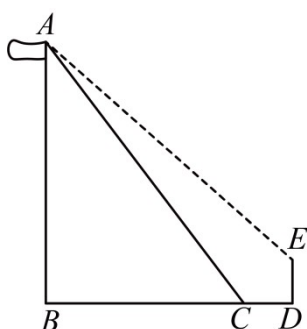
20. 如图， OM 平分 $\angle POQ$ ， $MA \perp OP$ ， $MB \perp OQ$ ， A ， B 为垂足， AB 交 OM 于点 N 。求证： $OA = OB$ 。



21. 如图， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ， M 是 BC 的中点， DM 平分 $\angle ADC$ ，求证： AM 平分 $\angle DAB$ 。



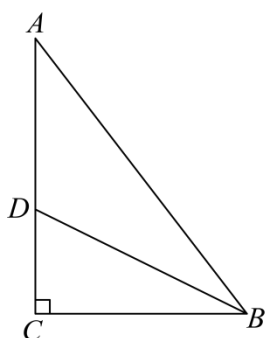
22. 如图，数学兴趣小组要测量旗杆 AB 的高度，同学们发现系在旗杆顶端 A 的绳子垂到地面多出一段的长度为 3 米，小明同学将绳子拉直，绳子末端落在点 C 处，到旗杆底部 B 的距离为 9 米。



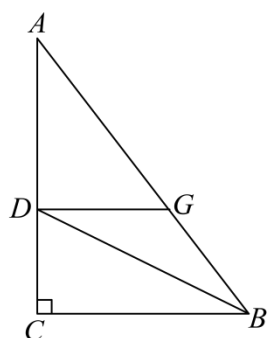
(1) 求旗杆 AB 的高度；

(2) 小明在 C 处，用手拉住绳子的末端，后退至观赛台的 2 米高的台阶上，此时绳子刚好拉直，绳子末端落在点 E 处，问小明需要后退几米（即 CD 的长）？（ $\sqrt{5} \approx 2.24$ ，结果保留 1 位小数）

23. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 。



图①



图②

(1) 如图①， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，求 CD 的长；

(2) 如图②，下列结论：① BD 平分 $\angle ABC$ ；② $DG \parallel CB$ ；③ $BG = DG$ 。请从中选取两个作为条件，第三个作为结论写出一个真命题，并证明。

24. 勾股定理是一条古老的数学定理，它有很多种证明方法。

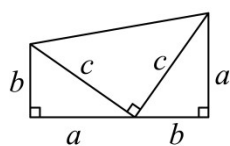


图1

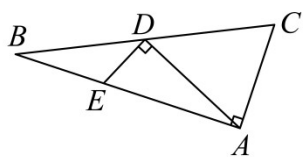


图2

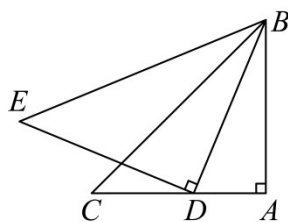


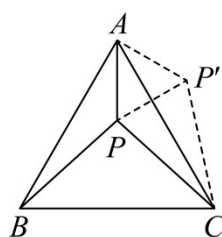
图3

【探索求证】请你利用图1，验证勾股定理：

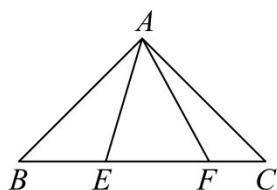
【问题解决】如图2，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，D 是 BC 边上的中点，连接 AD，过点 D 作 $DE \perp AD$ 交 AB 于点 E，若 $BE = 4$ ， $AE = 5$ ，求线段 AC 的长；

【延伸拓展】在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，BD 平分 $\angle ABC$ ， $AD = 1$ ，以 BD 为直角边作等腰直角 $\triangle BDE$ ，连接 BE，EC，求 $\triangle BEC$ 的面积。

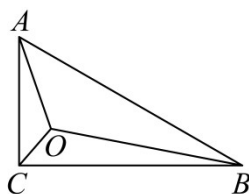
25. 阅读下面材料，并解决问题：



图①



图②



图③

(1) 如图①等边 $\triangle ABC$ 内有一点 P，若点 P 到顶点 A、B、C 的距离分别为 3，4，5，求 $\angle APB$ 的度数。

为了解决本题，我们可以将 $\triangle ABP$ 绕顶点 A 旋转到 $\triangle ACP'$ 处，此时 $\triangle ACP' \cong \triangle ABP$ ，这样就可以利用旋转变换，将三条线段 PA、PB、PC 转化到一个三角形中，从而求出 $\angle APB = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 基本运用

请你利用第 (1) 题的解答思想方法，解答下面问题

已知如图②， $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，E、F 为 BC 上的点且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，求证：

$$EF^2 = BE^2 + FC^2 ;$$

(3) 能力提升

如图③，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 1$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，点 O 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内一点，连接 AO，BO，CO，且 $\angle AOC = \angle COB = \angle BOA = 120^\circ$ ，求 $OA + OB + OC$ 的值。