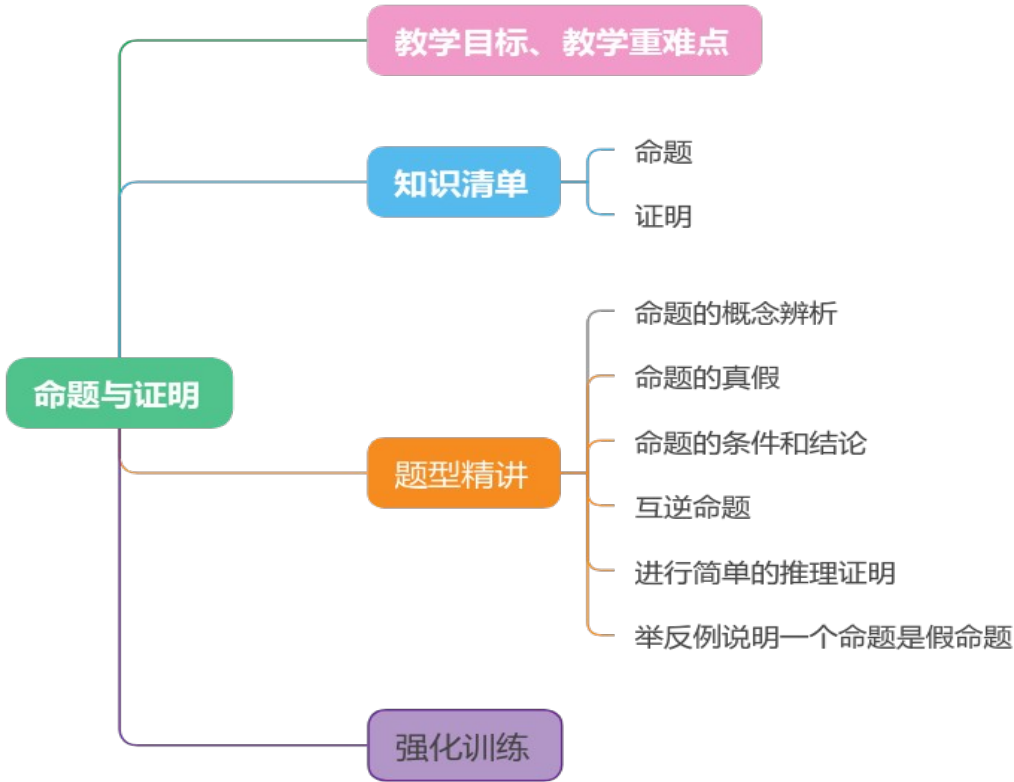


专题 16.4 命题与证明

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解命题、真命题、假命题的概念，能准确识别命题，区分命题的条件（题设）和结论，会将命题改写成“如果……，那么……”的形式。 2. 了解互逆命题的概念，能识别两个命题是否为互逆命题，会写出一个简单命题的逆命题。 3. 理解证明的含义，掌握证明的基本步骤.
教学重难点	1.重点 命题的概念、结构（条件与结论），真假命题的判断；互逆命题的识别与简单逆命题的书写;证明的基本步骤与简单命题的规范证明（含举反例判定假命题） 2.难点 几何证明的逻辑性与严谨性：避免跳跃推理、循环论证，做到每一步推理都有依据

知识清单

知识点 01 命题

1. 命题的概念

用自然语言、符号或式子表达，且可以判断其真假的语句叫作_____。

判断一句话是不是命题，关键是看这句话有无进行判断。如：“同角的余角**相等**”是命题，因为它对两个角是否相等做出了判断；再比如“互为相反数的绝对值相等吗？”这句话是个疑问句，不是命题，因为它没有对两个数是否相等做出判断。

易错点：假命题也是命题。

【即学即练】

下列句子不是命题的是（ ）

- A. 对顶角相等
- B. 内错角相等，两条直线平行
- C. 如果 $a^2=b^2$, 那么 $a=b$
- D. 画 $\angle AOB$ 的平分线

2. 命题的真假

正确的命题叫作_____，错误的命题叫作_____。

上述即学即练中，选项 A、B 都是真命题；选项 C 是假命题。

3. 条件和结论

数学命题通常由条件、结论两部分组成。命题常可以写成“如果……，那么……”的形式。其中，用“如果”开始的部分是_____，用“那么”开始的部分是_____。

易错点：有一些命题是简缩句，省略掉的词句要先补充完整再作条件和结论的分析。

【即学即练】

将下列命题改成“如果……那么……”的形式，并指出条件和结论.

(1) 两直线平行，内错角相等

(2) 对顶角相等

4.互逆命题

在两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，且第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫作_____。如果把其中一个命题叫作原命题，那么另外一个命题就叫作它的_____。

易错点：原命题是真命题，逆命题不一定是真命题。

【即学即练】

命题“对顶角相等”的逆命题是_____

知识点 02 证明

1. 证明一个命题为真，先明确____、____，再____。其中，“已知”是命题的条件，“求证”是命题的结论，“**证明**”是在“已知”和“求证”之间建立**逻辑联系的完整推理过程**。

2. 在初中平面几何中，证明通常遵循的**步骤**：

(1) 根据题意**画出示意图**；

(2) 根据条件和结论，参照示意图，**写出“已知”和“求证”**；

(3) 写出由条件推出结论的**完整过程**。

3. 判断一个命题为假命题，只需要举一个反例即可。

【即学即练】

1. 求证：两直线平行，内错角的平分线互相平行。

2. 判断命题“如果 $a > b$ ，那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”是真命题还是假命题？

题型精讲

题型 01 命题的概念

【典例 1】下列语句中，是命题的是（ ）

- A. 作线段 $AB = CD$ B. $\angle A = 90^\circ$ 吗？
C. 垂直用符号“ $\perp$ ”表示 D. 对顶角相等

【变式 1】下列语句不是命题的是（ ）.

- A. 两直线平行，同位角相等 B. 作线段 AB 的垂直平分线
C. 若 $|a| = |b|$ ，则 $a = b$ D. 同角的补角相等

【变式 2】下列语句中，不是命题的是（ ）

- A. 在同一平面内两条直线不平行就相交 B. 邻补角的角平分线互相垂直
C. 过直线 l 外一点 P ，作直线 $a \parallel l$ D. $a \parallel b$ ， a 与 c 相交，则 b 与 c 也相交

【变式 3】下列语句不是命题的为（ ）

- A. 你饿了吗？ B. 线段 AB 的垂线有无数条
C. 两点之间，线段最短 D. 相等的角一定是对顶角

【变式 4】“相等的角是对顶角”是命题. ____ (判断对错)

题型 02 判断命题的真假

【典例 1】命题“同位角相等”是_____ (填“真”或“假”) 命题.

【变式 1】 给出以下命题：①一个角的余角大于这个角；②如果 $\angle A = \angle B$ ，那么 $\angle A$ 与 $\angle B$ 是对顶角；③如果两个角的和等于 180° ，那么这两个角互为补角；④如果 $a \parallel b$ ， $a \perp c$ ，那么 $b \perp c$ 。其中真命题有____。（填所有真命题的序号）

【变式 2】 下列命题中，是真命题的是____。（填序号）

① 同位角相等；② 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行；③ 两个锐角之和一定是钝角。

【变式 3】 “垂线段最短”有下列说法：① 是命题；② 是假命题；③ 是真命题；④ 是定理，其中正确的说法是_____。

【变式 4】 下列命题的逆命题是假命题的有_____。（填序号）

① 对顶角相等；② 两直线平行，同旁内角互补；③ 全等三角形的周长相等；④ 若 $a = b$ ，则 $a^2 = b^2$ 。

题型 03 命题的条件和结论

【典例 1】 把命题“等角的余角相等”改写成：“如果____，那么_____”。

【变式 1】 把“垂直于同一条直线的两条直线平行”改写成“如果……那么……”的形式是

【变式 2】 命题“等角的补角相等”的条件是_____。

【变式 3】 把命题“同旁内角互补，两直线平行”改写成“如果…，那么…”的形式为：如果_____，那么_____。

【变式 4】 把命题“平行于同一条直线的两直线平行”改写成“如果…，那么…”的形式为：如果_____，那么_____。

题型 04 互逆命题

【典例 1】 在同一平面内不相交的两条直线叫作平行线。

【变式1】 命题“互余的两个角都是锐角”的逆命题是_____。（用“如果...那么...”的形式写出）。

【变式2】 命题“在同一平面内，垂直于同一直线的两直线平行”的逆命题是_____。

【变式3】 命题“如果两个角的和等于 90° ，那么这两个角互余”的逆命题是_____命题。（填“真”或“假”）

【变式4】 命题“如果 $a=b$ ，那么 $|a|=|b|$ ”的逆命题是_____，该逆命题是_____命题。（填“真”或“假”）

题型 05 进行简单的推理证明

【典例1】 命题：在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线互相平行。

(1) 请将此命题改写成“如果.....那么.....”的形式；

(2) 证明该命题。（要求先画出图形，再写出已知和求证，最后写出证明过程）

【变式1】 把命题“邻补角的角平分线互相垂直”改写成“如果.....那么.....”的形式，指出它的题设和结论，请画出图形，并进行证明。

【变式2】 证明：平行于同一条直线的两条直线平行。

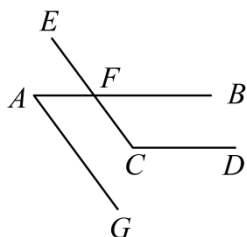
请将下列命题的证明过程补充完整，并进行证明。

已知：_____。

求证：_____。

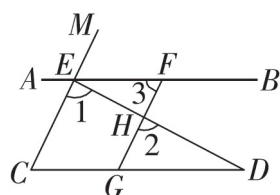
证明：

【变式3】 如图， $\angle A + \angle EFB = 180^\circ$ ， $\angle A$ 与 $\angle ECD$ 互为补角。求证： $AB \parallel CD$ 。



【变式4】 如图，点 E, F 在直线 AB 上，点 G 在线段 CD 上， ED 与 FG 交于点 H ，连接 CE 并延长至点

M , $\angle C = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 2$.



(1) 试说明： $CE \parallel GF$.

(2) 试判断 $\angle AED$ 与 $\angle D$ 之间的数量关系，并说明理由.

(3) 若 $\angle EHF = 88^\circ$, $\angle D = 28^\circ$, 求 $\angle AEM$ 的度数.

题型 06 举反例说明一个命题是假命题

【典例 1】 用一组 a, b, c 的值说明命题“若 $ac = bc$, 则 $a = b$ ”是假命题，所举反例可以是 ()

A. $a = 2, b = 2, c = 1$

B. $a = 0, b = 2, c = 1$

C. $a = 2, b = 3, c = 0$

D. $a = 2, b = 2, c = 0$

【变式 1】 要判断命题“若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$ ”是错误的，可以举一个反例，则下列反例中符合要求的是

()

A. $a = 2, b = -1$

B. $a = -1, b = -2$

C. $a = 2, b = 1$

D. $a = -1, b = 0$

【变式 2】 判断命题“如果 $a > b$, 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”是真命题还是假命题？如果是真命题，请证明；如果是假命题，

请举反例.

【变式 3】 判断命题“已知三条直线 a, b, c , 如果 $a \perp b, b \perp c$, 那么 $a \perp c$ ”是真命题还是假命题. 如果是真命题，请证明；如果是假命题，请举反例.

【变式 4】 判断命题“同位角相等”是真命题还是假命题. 如果是真命题，请证明；如果是假命题，请举反例.

强化训练

一、单选题

1. 下列命题是真命题的是 ()

- A. 两条直线被第三条直线所截，同位角相等
- B. 同旁内角互补
- C. 相等的角是对顶角
- D. 在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直

2. 下列命题是真命题的是 ()

- A. 两条直线被第三条直线所截，同位角的平分线互相平行
- B. 直线外一点到这条直线的垂线段，就是这一点到这条直线的距离
- C. 在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直
- D. 在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线平行

3. 下列命题的逆命题是假命题的是 ()

- A. 夹角为 90° 的两条直线互相垂直
- B. 内错角相等，两直线平行
- C. 对顶角相等
- D. 同(等)角的余角相等

4. 下列命题都正确，其逆命题也正确的是 ()

- A. 若 $a < b$ ，则 $a \neq b$
- B. 若 $a < b - 1$ ，则 $a < b$
- C. 若 $a < 2b < 0$ ，则 $a < b$
- D. 若 $a < 2b$ ，则 $a - 2b < 0$

5. 下列是命题的是 ()

- A. 作两条相交直线
- B. $\angle \alpha$ 和 $\angle \beta$ 相等吗？
- C. 垂线段最短
- D. 若 $a^2 = 4$ ，求 a 的值

6. “任何一个角的补角都不小于这个角”是假命题，正确的反例是 ()

- A. 两个角互为邻补角
- B. $\alpha = 90^\circ$ ， α 的补角 $\beta = 90^\circ$ ， $\beta = \alpha$
- C. $\alpha = 120^\circ$ ， α 的补角 $\beta = 60^\circ$ ， $\beta < \alpha$

D. $\alpha = 80^\circ$, α 的补角 $\beta = 100^\circ$, $\beta > \alpha$

二、填空题

7. 在讨论“对顶角不相等”是不是命题的问题时，甲说：“这不是命题，因为这句话是错误的。”乙说：“这是命题，因为它作出了判断，只不过这是错误的判断，所以它是假命题。”由此可判断_____的说法是正确的。

8. 命题：“如果 $a = b$ ，那么 $a^2 = b^2$ ”的逆命题是_，如果 $a^2 = b^2$ ，那么 $a = b$ ，该命题是 _命题（填真或假）。

9. 命题“如果 $\frac{a}{c^4} > \frac{b}{c^4}$ ，那么 $a > b$ ”的逆命题是_____。命题（填“真”或“假”）

10. 给出下列 5 个命题：①垂线段最短；②两条直线被第三条直线所截，内错角相等；③互补的角是邻补角；④同旁内角相等，两直线平行；⑤同旁内角的两个角的平分线互相垂直。其中是真命题的是_____。（填写命题的序号即可）

三、解答题

11. 把下列命题改写成“如果……那么……”的形式。

(1)同角的余角相等。

(2)同号两数相乘，积为正数。

12. 下列命题的条件是什么？结论是什么？

(1)两直线平行，同位角相等。

(2)若 $\angle A = \angle B$ ， $\angle B = \angle C$ ，则 $\angle A = \angle C$ 。

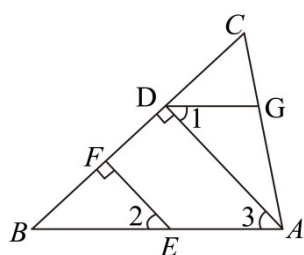
(3)不等式的两边同乘一个负数，不等号方向改变。

13. 写出下列各命题的逆命题，并判断其逆命题是真命题还是假命题。

(1)同位角相等，两直线平行；

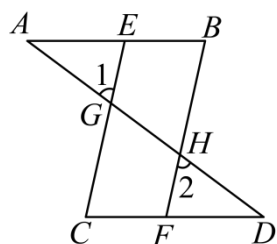
(2)末位数字是 0 的数一定能被 5 整除。

14. 如图， $EF \perp BC$ ， $AD \perp BC$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，求证： $DG \parallel BA$



15. 如图，已知点 E 、 F 分别在 AB 、 CD 上，连接 EC 、 BF 交 AD 于点 G 、 H 。有以下三个论断：①

$\angle 1 = \angle 2$ ；② $\angle B = \angle C$ ，③ $AB \parallel CD$ 。



(1) 请你从中任选两个作为题设，另一个作为结论，写出所有的命题，并指出这些命题是真命题还是假命题；

(2) 选择 (1) 中的一个真命题加以证明。