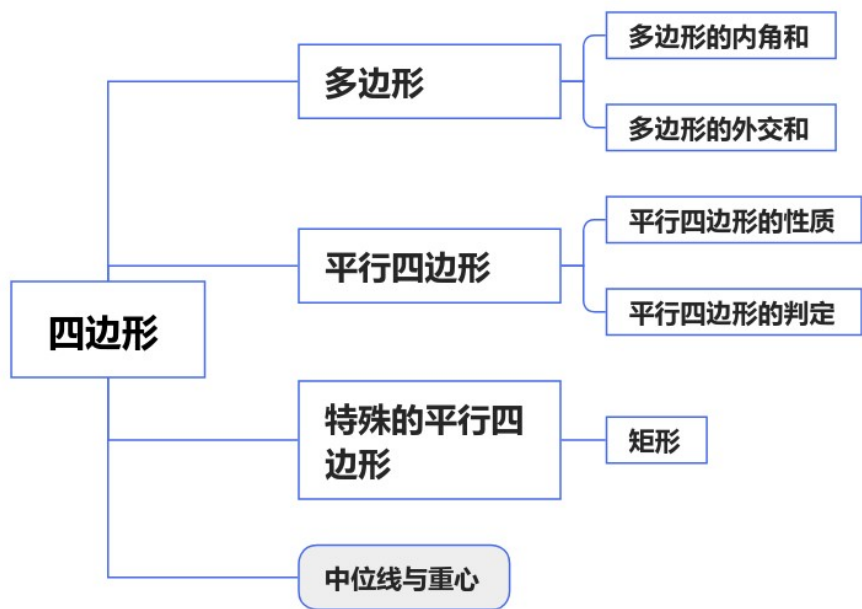


第二十三章 四边形单元复习

内容概览



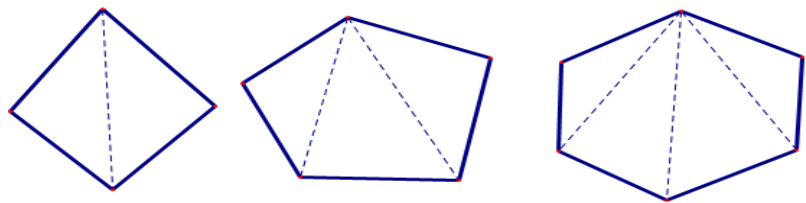
知识清单

知识点 1 多边形

1. 多边形的对角线

①从一个顶点出发， n 边形可以引出 $(n-3)$ 条对角线，将 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形；

② n 边形每个顶点均可以引出 $(n-3)$ 条对角线，所以 n 边形的对角线总条数为 $\frac{1}{2}n(n-3)$ ；



2. 多边形的内角和

n 边形从一个顶点出发可以引出 $(n-3)$ 条对角线，将 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形，所以 n 边形的内角

和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，四边形的内角和为 360° 。

3. 多边形的外角和

(1) 多边形在每一个顶点处有**两个**外角，但在各个顶点处只各取**一个外角**，这样得到所有外角的和叫作这

个多边形的外角和。

(2) 多边形的外角和定理：**多边形的外角和为 360° 。**

(3) 四边形的外角和：四边形的外角和也是 **360° 。**

【即学即练】

1. 如果一个 n 边形的内角和为 1260° ，那么 n 的值是 ()

A . 7

B . 8

C . 9

D . 10

知识点 2 平行四边形

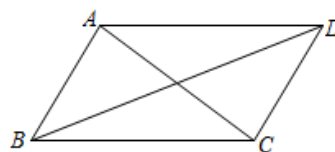
1. 定义

有一组对边平行的四边形叫作**梯形**；

两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**。

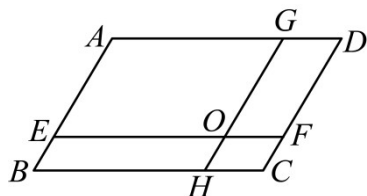
如图所示，四边形 $ABCD$ 是平行四边形。记作： **$\square ABCD$** ；

读作：**平行四边形 $ABCD$** ；



【即学即练】 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $EF \parallel BC$ ， $GH \parallel AB$ ，且 EF ， GH 相交于点 O ，则图中的

平行四边形有 ()



A. 4 个

B. 5 个

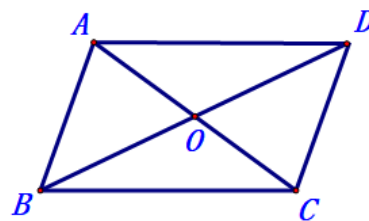
C. 8 个

D. 9 个

2. 平行四边形的性质

定理 1 平行四边形的**对边相等**;

如右图所示， $\square ABCD$ 中， $AB=CD, AD=BC$



定理 2 平行四边形的**对角相等**;

如右图所示， $\square ABCD$ 中， $\angle A=\angle C, \angle B=\angle D$

定理 3 平行四边形的**对角线互相平分**.

如右图所示， $\square ABCD$ 中， $AO=CO, BO=DO$

3. 平行四边形的判定

(1) 平行四边形的**定义**本身就是平行四边形的一种判定方法；

如右图所示： $\because AB \parallel CD, AD \parallel BC$

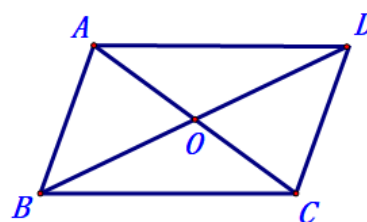
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

(2) 平行四边形的判定定理

定理 1：两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

如右图所示： $\because AB=CD, AD=BC$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形



定理 2：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

如右图所示： $\because AB \parallel CD, AB=CD$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形

定理 3：对角线互相平分的四边形是平行四边形；

如右图所示： $\because AO=CO, BO=DO$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形

知识点 3 特殊的平行四边形——矩形

1. 定义 四个内角都是直角的四边形叫作矩形。

2. 性质 矩形的两条对角线相等。

3. 判定

(1) 根据定义：四个内角均为直角的四边形就是矩形。

(2) 判定定理 1：有一个内角是直角的平行四边形是矩形。

(3) 判定定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形。

知识点 4 特殊的平行四边形——菱形

1. 定义 四条边都相等的四边形叫作菱形。

2. 性质

定理：菱形的两条对角线互相垂直。

菱形的面积等于四个直角三角形的面积，也就等于对角线乘积的一半

3.判定

- (1) 根据定义 **四条边都相等**的 **四边形**就是**菱形**.
- (2) 判定定理 1：**有一组邻边相等**的 **平行四边形**是**菱形**.
- (3) 判定定理 2：**对角线互相垂直**的 **平行四边形**是**菱形**.

知识点

特殊的平行四边形——正方形

1. 定义 **四个角都是直角，四条边都相等**的四边形叫作正方形。

2.性质和判定

- (1) 正方形是一种特殊的平行四边形，它具有矩形、菱形、平行四边形的所有性质；
- (2) 要判定一个四边形是正方形可以判定它既是矩形又是菱形。

知识点

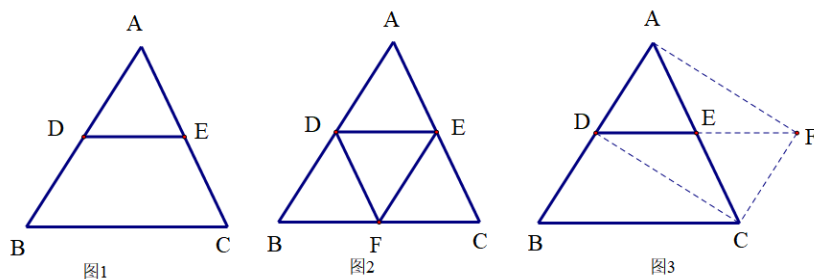
三角形的中位线与重心

1. 中位线

- (1) 定义：连接三角形两边中点的线段叫做三角形的**中位线**。

如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 的中点，于是线段 DE 就是 $\triangle ABC$ 的一条中位线。

如图 2，每一个三角形有三条中位线



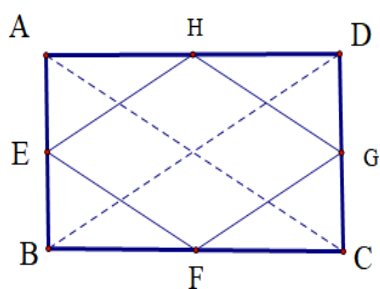
(2) 三角形中位线定理：(如图2) 三角形的中位线**平行于第三边，并且等于它的一半**。

(3) 中点四边形：顺次连接四边形ABCD各边中点得到的四边形叫作中点四边形；

任意四边形的中点四边形一定时平行四边形；

【即学即练】

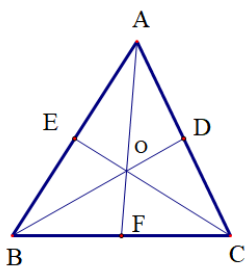
求证：顺次连接矩形各边中点得到的四边形是菱形。



2. 重心

(1) 定义：三角形的三条中线交于一点，此交点叫作三角形的重心。

如图，在 $\triangle ABC$ 中，E，F，D分别为三角形三边的中点，则AF、BD、CE交于一点O，O叫作 $\triangle ABC$ 的重心。



(2) 三角形重心的性质

三角形重心定理：三角形的重心到一个顶点的距离等于它到对边中点的距离的两倍。

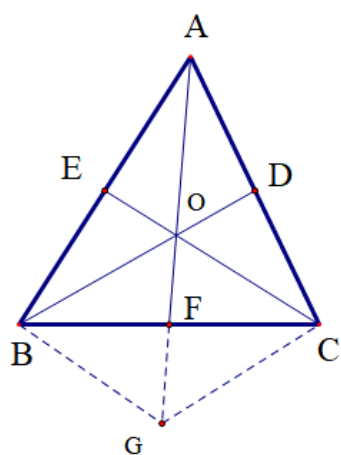
三角形的三条中线把三角形分成面积相等的六个小三角形.

在上图中 $S_{\triangle AEO} = S_{\triangle BEO} = S_{\triangle BFO} = S_{\triangle CFO} = S_{\triangle CDO} = S_{\triangle ADO}$

【即学即练】

1. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，BD、CE分别是边AC、AB上的中线，BD和CE交于点O,连接AO并延长交边BC于点

F. 求证：(1) AF是边BC上的中线；(2) $OF = \frac{1}{2}AO$



题型精讲

题型 01 多边形

【典例1】(24-25 八年级下·上海杨浦·期中) 如果一个 n 边形的内角和为 1260° ，那么 n 的值是 ()

A . 7

B . 8

C . 9

D . 10

【变式1】(24-25 八年级下·上海闵行·期中) 如果一个多边形的边数增加 1 ，那么它的内角和将增加 (

) .

A . 60°

B . 90°

C . 180°

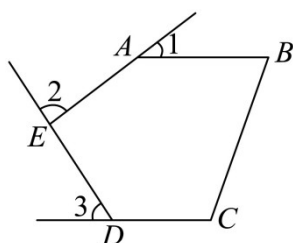
D . 360°

【变式2】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·上海·期末）若一个多边形的内角和为 1800° ，则这个多边形的对角线条数是_____。

【变式3】（²³⁻²⁴ 八年级下·上海·期末）一个多边形的内角和是外角和的 2 倍，则这个多边形的边数为_____。

【变式4】（²⁴⁻²⁵ 七年级下·上海闵行·期中）如图，五边形 $ABCDE$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle 1$ ， $\angle 2$ ， $\angle 3$ 分别是

$\angle BAE$ ， $\angle AED$ ， $\angle EDC$ 的外角， $\angle 2 = 85^\circ$ ，那么 $\angle 1 + \angle 3 =$ _____度。



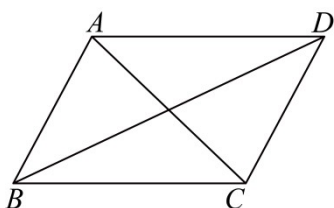
【变式5】（²³⁻²⁴ 八年级下·全国·单元测试）如果一个多边形的各个外角都是 40° ，那么这个多边形的内

角和是_____度。

题型 02 平行四边形

【典例1】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·上海宝山·期中）如图在四边形 $ABCD$ 中，若已知 $AB \parallel CD$ ，再添加下列条件

之一，能使四边形 $ABCD$ 成为平行四边形的条件是（ ）



A. $\angle DAB = \angle ADC$

B. $AD = BC$

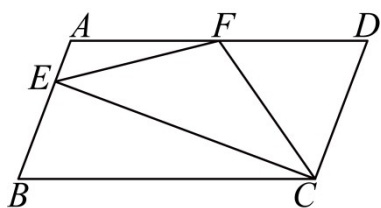
C. $\angle ABD = \angle BDC$

D. $\angle BAD = \angle BCD$

【变式1】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·上海松江·期中）平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = 4\sqrt{3}$, $BD = 4$, AB 边上的高是 $2\sqrt{3}$ ，则平行四边形 $ABCD$ 的周长是_____。

【变式2】（²⁵⁻²⁶ 八年级上·上海浦东新·期末）若平行四边形的周长为 28，相邻两边的差为 4，则较短边的长为_____。

【变式3】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·上海嘉定·期末）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = 2AB$ ，点 F 是边 AD 的中点，作 $CE \perp AB$ ，垂足 E 在线段 AB 上，连接 EF 、 CF ，则下列结论：

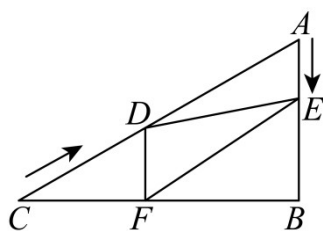


① $\angle BCD = 2\angle DCE$ ；② $EF = CF$ ；③ $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CFD}$ ；④ $S_{\triangle BEC} = 2S_{\triangle CEF}$ 。

一定成立的是_____。（把所有正确结论的序号都填在横线上）

【变式4】（²⁴⁻²⁵ 八年级下·上海徐汇·月考）如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AC = 60\text{cm}$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，点 D 从点 C 出发沿 AC 方向以 4cm/s 的速度向点 A 匀速运动，同时点 E 从点 A 出发沿 AB 方向以 2cm/s 的速度向点 B 匀速运动，当其中一个点到达终点时，另一个点也随之停止运动。设点 D ， E 运动的时间是 $t\text{s}$

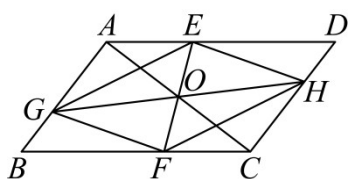
（ $0 < t < 15$ ）。过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ，连接 DE ， EF 。



(1) 求证：四边形 $AEFD$ 是平行四边形；

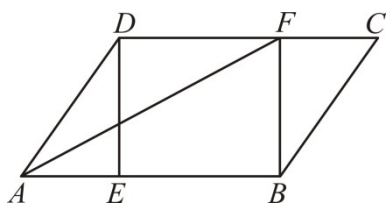
(2) 当 t 为何值时， $\triangle DEF$ 为直角三角形？请说明理由。

【变式 5】 (24-25 八年级下·上海松江·期中) 已知 $\square ABCD$ ，点 O 为对角线 AC 的中点，过点 O 分别作直线 EF ， GH ，直线 EF 交边 AD 、 BC 于点 E 、 F ，直线 GH 交边 AB 、 CD 于点 G 、 H 。求证：四边形 $EHFG$ 为平行四边形。



题型 03 矩形

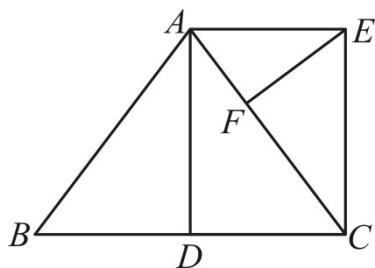
【典例 1】 如图，在 $\square ABCD$ 中， E ， F 两点分别在边 AB ， CD 上，连接 DE ， BF ， AF ， $DE \perp AB$ ，且 $\angle ADE = \angle CBF$ 。



(1) 求证：四边形 $DEBF$ 为矩形；

(2) 若 AF 平分 $\angle BAD$ ，且 $AD = 6$ ， $AF = 10$ ，求 AE 的长。

【变式1】 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 的中点， $CE \parallel AD$ ， $AE \perp AD$ ， $EF \perp AC$

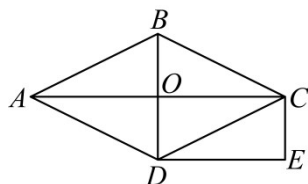


(1) 求证：四边形 $ADCE$ 是矩形；

(2) 若 $BC = 6$ ， $CE = 4$ ，求 EF 的长。

【变式2】 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O ，过点 C 作 AC 的垂线，过点 D 作 BD 的垂线，两直线相交于点 E 。

线，两直线相交于点 E 。



(1) 求证：四边形 $OCED$ 是矩形；

(2) 若 $CE = 1$ ， $DE = 2$ ，求菱形 $ABCD$ 面积。

【变式3】 如图¹，将矩形 $ABCD$ 沿过点 B 的直线折叠，使得点 A 的对应点 E 落在 BC 边上，折痕与 AD 交于点 F 。

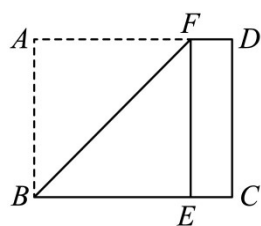


图1

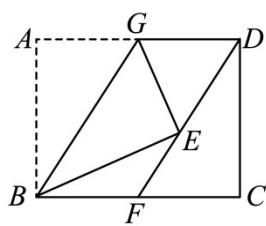


图2

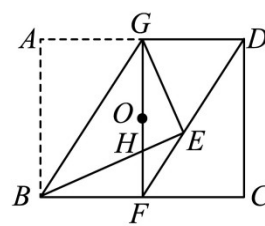


图3

(1) 判断四边形 $ABEF$ 的形状，并说明理由。

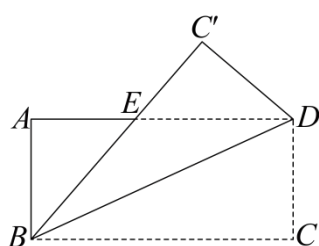
(2) 如图2，点 G 是 AD 的中点，勤学小组的同学将矩形 $ABCD$ 沿直线 BG 折叠，点 A 的对应点为 E ，连接 DE 并延长，交 BC 于点 F 。

① 试判断四边形 $BFDG$ 的形状，并说明理由。

② 连接 GF 交 BE 于点 H ，点 O 是 GF 的中点，若点 H 是 OF 的三等分点， $AB=6$ ，直接写出 AD 的长。

【变式4】 如图，将长方形 $ABCD$ 沿着对角线 BD 折叠，使点 C 落在 C' 处， BC' 交 AD 于点 E ， $AB=2$ ，

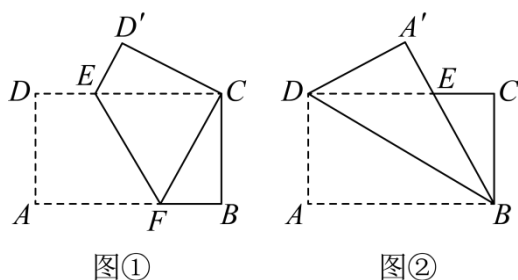
$AD=4$ 。



(1) 求 $\triangle BDE$ 的面积；

(2) 求 $C'C$ 的长。

【变式5】 如图，在长方形 $ABCD$ 中， $AB=CD=10$ ， $BC=AD=6$ 。



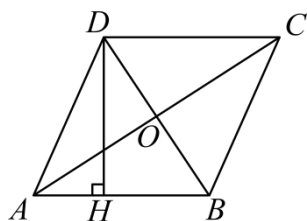
(1)如图①，将长方形 $ABCD$ 沿 EF 翻折，使点 A 与点 C 重合，点 D 落在点 D' 处，求 BF 的长；

(2)如图②，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折，若 $A'B$ 交 CD 于点 E ，求 $\triangle BDE$ 的面积；

题型 04 菱形

【典例 1】如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O ，且 $AC = 8, BD = 6$ ，则菱形 $ABCD$ 的高 DH 的长

是 ()



A . 4.8

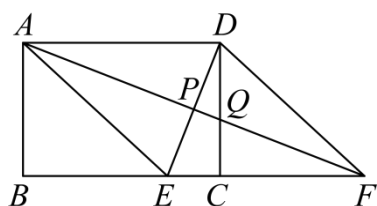
B . 2.4

C . 5

D . 以上都不对

【典例 2】如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 在边 BC 上，点 F 在边 BC 的延长线上，四边形

$AEFD$ 的对角线 AF 分别交 DE 、 DC 于点 P 、 Q ，且 $PD = PE, DE$ 平分 $\angle ADF$ 。

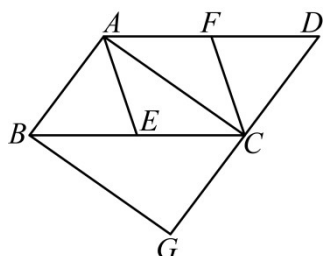


(1) 求证：四边形 $AEFD$ 是菱形；

(2) 如果 $BC = EF$, $\angle EDC = \angle EFP$ ，试判断四边形 $ABCD$ 的形状，并说明理由。

【变式1】 若菱形周长为 20cm ，两对角线之和为 12cm ，则菱形面积为_____。

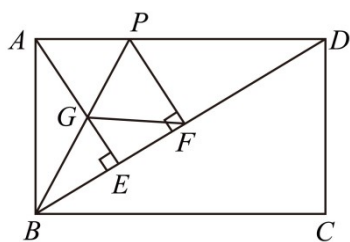
【变式2】 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 和 AD 的中点，连接 AE 、 CF ， CA 平分 $\angle FCE$ 。



(1) 求证：四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 作 $\angle GBC = \angle CAE$ ， BG 与 DC 的延长线交于点 G 。求证：四边形 $ABGC$ 是矩形。

【变式3】 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AE \perp BD$ 于点 E ，点 P 是边 AD 上一点，若 BP 平分 $\angle ABD$ ，交 AE 于点 G ， $PF \perp BD$ 于点 F 。



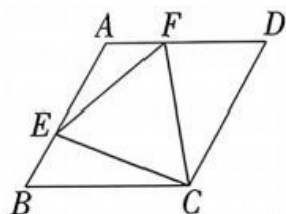
(1) 求证： $AP = AG$ ；

(2) 求证：四边形 $AGFP$ 是菱形。

【变式 4】 如图，菱形 $ABCD$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ，点 E, F 分别在 AB, AD 上，且 $\angle ECF = 60^\circ$ 。

(1) 求证： $\triangle ECF$ 为等边三角形；

(2) 连接 AC ，若 AC 将四边形 $AECF$ 的面积分为 $1:2$ 两部分，当 $AB = 6$ 时，则 $\triangle BEC$ 的面积为



题型 05 正方形

【典例 1】 下列说法正确的是 ()

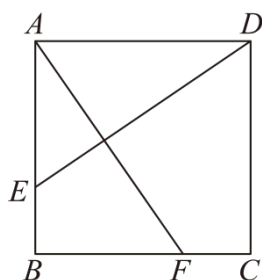
A. 菱形的四个内角都是直角

B. 矩形的对角线互相垂直

C. 正方形的每一条对角线平分一组对角

D. 平行四边形是轴对称图形

【典例 2】 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在 AB, BC 上，且 $AE = BF$ 。



(1) 求证： $DE = AF$ ；

(2) 连接 EF 、 FD ，分别取 AE 、 EF 、 FD 、 AD 的中点 H 、 I 、 J 、 K ，四边形 $HIJK$ 是什么特殊的平行四边形？请在图中补全图形，并说明理由。

【变式 1】 正方形具备而菱形不具备的性质是 ()

A. 对角线互相平分

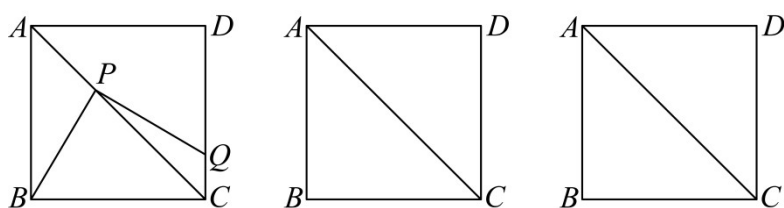
B. 对角线互相垂直

C. 对角线相等

D. 每条对角线平分一组对角

【变式 2】 如图，已知：正方形 $ABCD$ 边长为 1，点 P 是对角线 AC 上一点， $PQ \perp BP$ ， P 交射线 DC 于点

Q 。



(1) 当点 Q 在边 CD 上时，线段 PQ 与线段 PB 之间有怎样的大小关系？试证明你观察得到的结论；

(2) 当点 Q 在边 DC 的延长线上， $\triangle PCQ$ 是等腰三角形时，求 PC 的长；

(3) 当以 P 、 B 、 C 、 Q 为顶点的四边形的面积为 $\frac{1}{3}$ 时，直接写出 AP 的长。

【变式3】 【问题情景】

数学实践小组的同学利用两个正方形进行了如下的探究与操作：

将正方形 $ABCD$ 的点 D 和正方形 $EFGH$ 的点 E 重合，并旋转正方形 $EFGH$ 同时确保点 H 在正方形 $ABCD$

内部，在旋转中同学们尝试对此情景进行画图，提出了不同的研究方向。

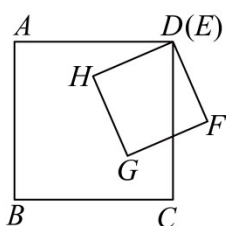


图1

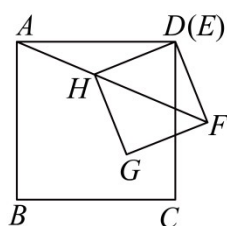


图2

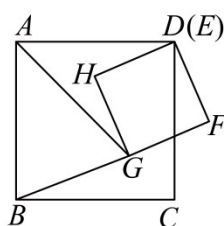


图3

(1) 【思考尝试】

如图 1，同学们发现，连接 AH 、 CF 后，随着旋转， AH 和 CF 有着一定的数量关系，请在图 1 中补全图

形，并证明 AH 和 CF 的数量关系；

(2) 【应用迁移】

如图 2，励志小组继续旋转 $EFGH$ ，发现 AHF 三点共线时，可以由正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 的边长

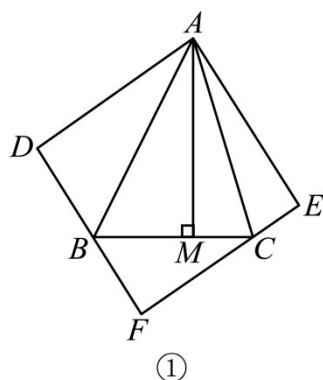
求出 AH 的长，若 $AB = 2\sqrt{2}$ ， $EH = \sqrt{2}$ ，请你思考并求 AH 的长。

(3) 【拓展探究】励志小组在旋转正方形 $EFGH$ 时，发现并提出新的探究点：如图 3，连接 AG 、 BG ，当

正方形 $EFGH$ 旋转时， $\triangle ABG$ 的形状和面积也随之改变，若 $AB = 2\sqrt{2}$ ， $EH = \sqrt{2}$ ，直接写出 $\triangle ABG$ 的面积取值范围。

【点睛】 本题考查了旋转的性质，正方形的性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质，二次根式的混合运算，解一元二次方程。正确引出辅助线解决问题是解题的关键。

【变式 4】 如图①，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 45^\circ$ ， AM 是边 BC 上的高。将 $\triangle ABM$ ， $\triangle ACM$ 分别沿 AB ， AC 翻折得到 $\triangle ABD$ ， $\triangle ACE$ 。延长 DB ， EC 交于点 F 。



①求证：四边形 $ADFE$ 是正方形；

②若 $AM = 6$ ，则 $\triangle BCF$ 的周长为_____。

【变式 5】 已知四边形 $ABCD$ 是正方形，一个等腰直角三角板的一个锐角顶点与 A 点重合，将此三角板绕 A 点旋转时，两边分别交直线 BC ， CD 于 M ， N 。

(1)如图 1，当 M, N 分别在边 BC, CD 上时，求证： $BM+DN=MN$

(2)如图 2，当 M, N 分别在边 BC, CD 的延长线上时，请直接写出线段 BM, DN, MN 之间的数量关系

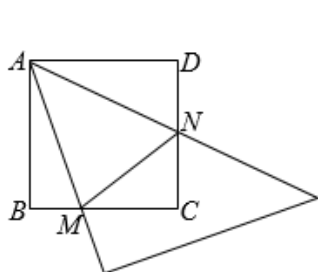


图1

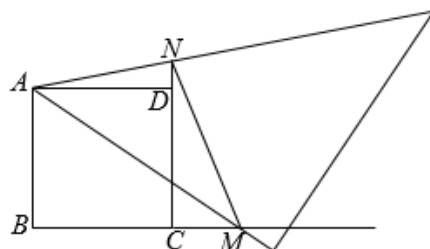
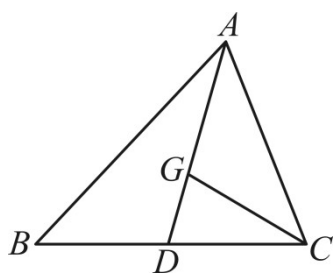


图2

题型 06 三角形的中位线与重心

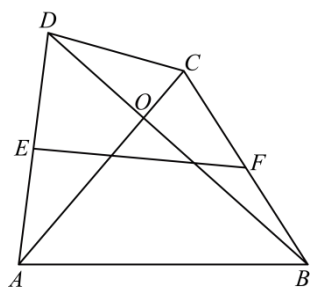
【典例 1】如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，连接 AG 并延长交 BC 于点 D ，连接 CG ，则 $S_{\triangle CDG} : S_{\triangle ABC} =$

_____ .



【典例 2】如图，已知在四边形 $ABCD$ 中， AC, BD 相交于点 O ，且 $AC \perp BD, AC = 6, BD = 6\sqrt{2}$ ， E, F

分别是 AD, BC 的中点，连接 EF .



(1) 求四边形 $ABCD$ 的面积；

(2) 求 EF 的长。

【变式 1】 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，如果 $AB = AC = 5$ ， $AG = 2$ ，那么底边 BC 的长是 ()

A . 4

B . 6

C . 8

D . 10

【变式 2】 顺次连接菱形各边中点所得的四边形一定是 ()

A . 平行四边形

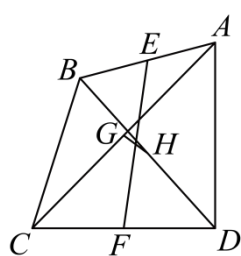
B . 菱形

C . 矩形

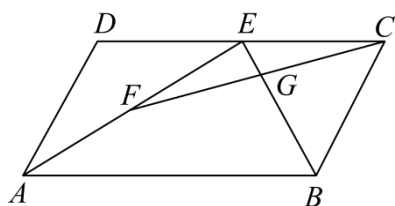
D . 正方形

【变式 3】 如图，已知四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 CD 、 AC 、 BD 的中点。求证：

EF 和 GH 互相平分。



【变式 4】 如图，在 $\square ABCD$ 中， E 为边 CD 上一点， AE 、 BE 分别平分 $\angle DAB$ 、 $\angle ABC$ 。



(1) 求证： E 为 CD 的中点；

(2) 如果点 F 为 AE 的中点，联结 CF 交 BE 于点 G 。写出 BG 与 EG 满足的数量关系，并说明理由。