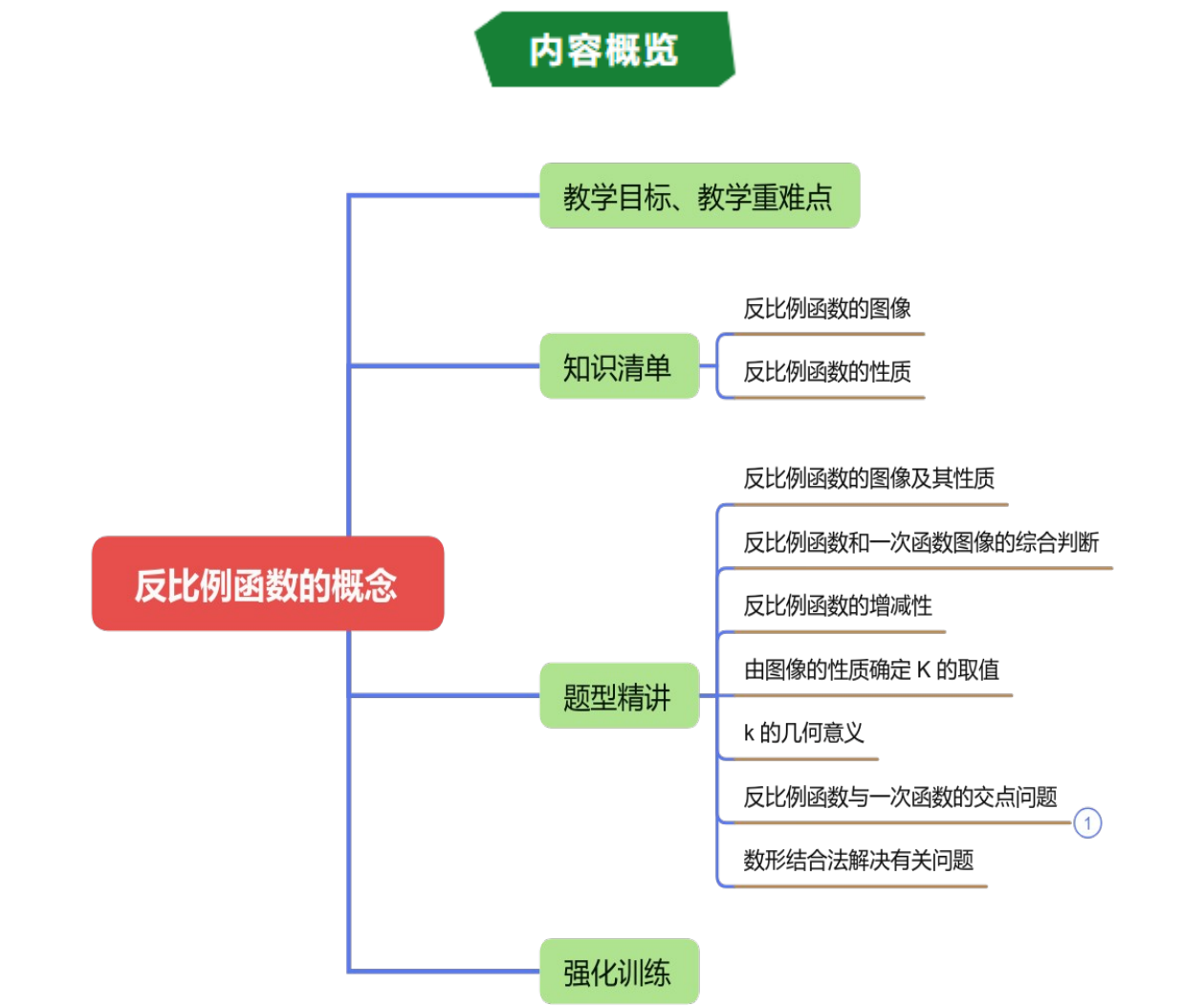


专题 26.2 反比例函数的图像与性质



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 会用描点法画双曲线，归纳图象与性质； 2. 理解反比例函数图象的性质，根据 k 定象限、增减性，或根据图象定 k 符号； 3. 渗透数形结合与分类讨论思想，提升直观想象与数学运算能力.
教学重难点	重点、难点 1.增减性的准确表述：必须强调“在每个象限内”，避免笼统说增减； 2. k 的几何意义与图形面积的综合计算.

知识清单

知识点 01 反比例函数的图像和性质

1. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象是**双曲线**，由两支曲线组成，关于原点成中心对称，且关于直线 $y=x$ 和 $y=-x$ 轴对称；

2. 两支曲线**无限接近坐标轴但永不相交**(坐标轴是渐近线)；

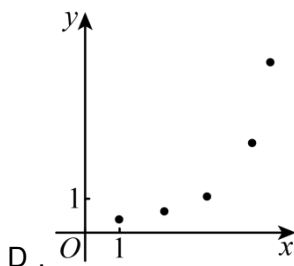
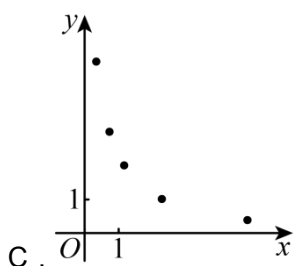
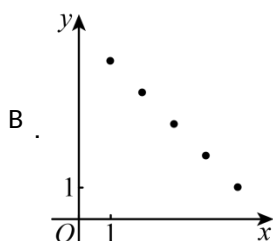
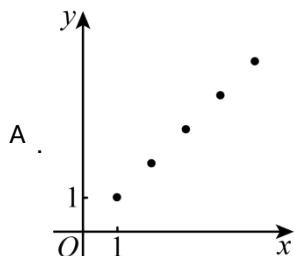
3. $k < 0$ 时，两支曲线分别位于第**二、四**象限；在每个象限内， y 随 x 的**增大而增大**；

4. $k > 0$ 时，两支曲线分别位于第**一、三**象限；在每个象限内， y 随 x 的**增大而减小**；

注意：谈论增减性时必须强调“**在每个象限内**”，跨象限不能直接比较。

【即学即练】

例 1 当菱形的面积一定时，它的两条对角线的长分别为 x 、 y 。选取 5 组数对 (x, y) ，在坐标系中进行描点，则正确的是 ()



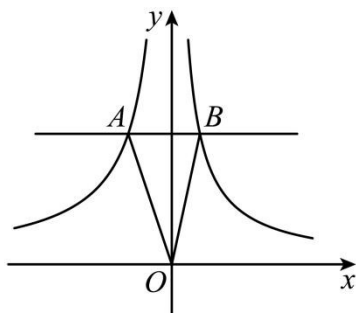
知识点 02 k 的几何意义

过双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上任意一点作 x 轴、 y 轴的垂线，所得矩形的面积为 $|k|$ 。若连接该点与原点，则与坐标轴

围成的直角三角形面积为 $\frac{1}{2}|k|$ 。

【即学即练】

例2 如图，函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 和 $y = \frac{2}{x}$ 的部分图像与直线 $y = a (a > 0)$ 分别交于 A 、 B 两点，如果 $\triangle ABO$ 的面积是 2.5，则 k 的值为 ()



A . 3

B . -3

C . $\frac{3}{2}$

D . $-\frac{3}{2}$

知识点 03 数形结合法解决问题

1. 反比例函数与一次函数图像交点问题

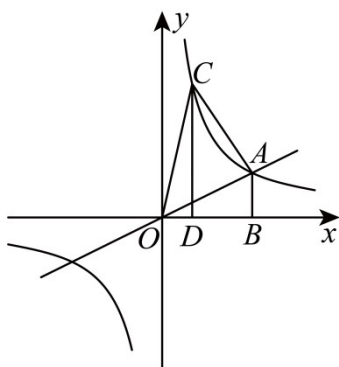
(1) 求交点：联立两个函数解析式，解方程组得到交点坐标。

(2) 利用图象解不等式：在平面直角坐标系中，比较两个函数图象的上下位置，从而确定自变量的取值范围。

2. 比例函数与几何综合

常结合三角形、矩形、梯形等图形，利用点坐标表示线段长，建立方程求解。涉及面积时，通常利用 k 的几何意义或割补法。

例3 如图，直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 交于 A 点，且点 A 的横坐标为 4，曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 上有一动点 $C(m, n) (0 < m < 4)$ ，过点 A 作 x 轴垂线，垂足为 B ，过点 C 作 x 轴垂线，垂足为 D ，连接 OC 。

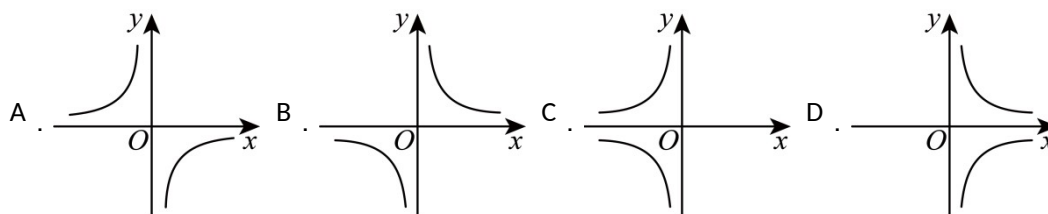


- (1) 求 k 的值 .
- (2) 设 $\triangle COD$ 与 $\triangle AOB$ 的重合部分的面积为 S , 求 S 关于 m 的函数解析式 .
- (3) 连接 AC , 当第 (2) 问中 S 的值为 1 时 , 求 $\triangle OAC$ 的面积 .

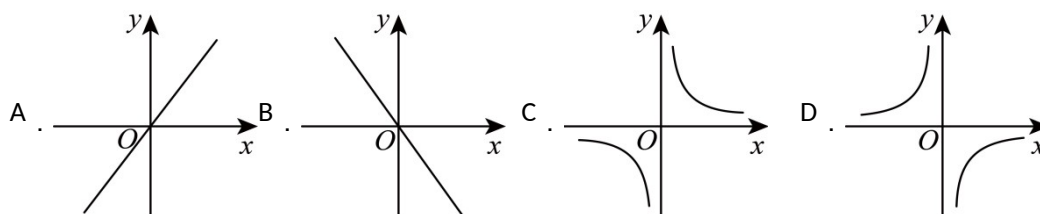
题型精讲

题型 01 反比例函数的图像的辨析

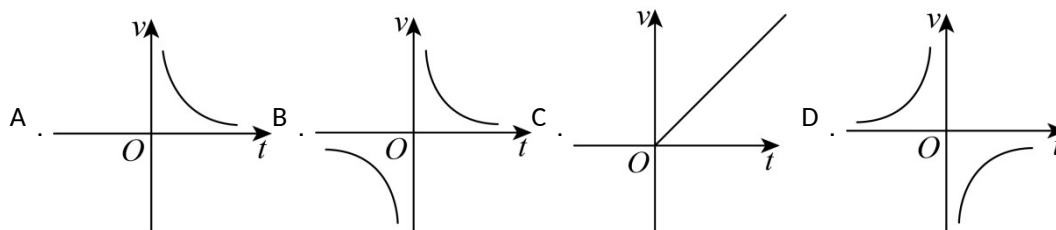
【典例 1】反比例函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图像大致是 ()



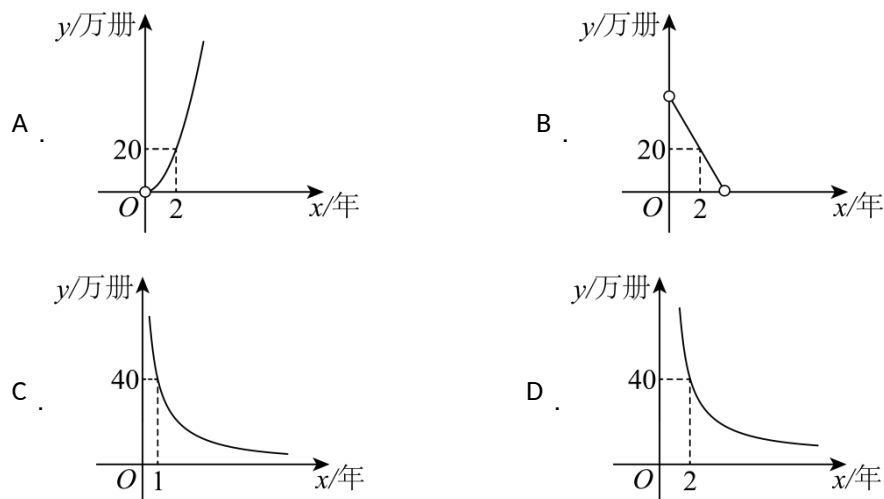
【变式 1】反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的大致图象是 ()



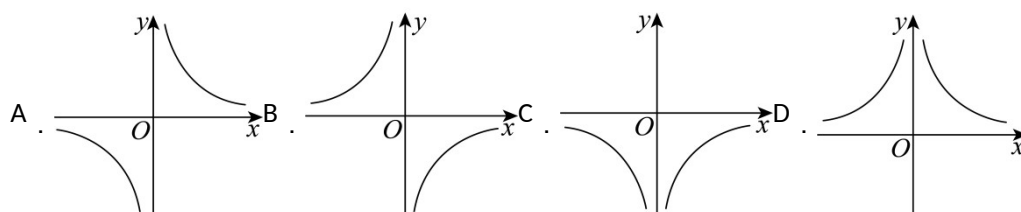
【变式 2】从贵港乘车到南宁，路程一定，行车的速度 $v(\text{km/h})$ 和行车时间 $t(\text{h})$ 之间的函数图象是 ()



【变式3】 一台印刷机每年印刷的书本数量 y （万册）与它的使用时间 x （年）成反比例关系，当 $x=2$ 时， $y=20$ ，则 y 与 x 的函数图像大致是（ ）

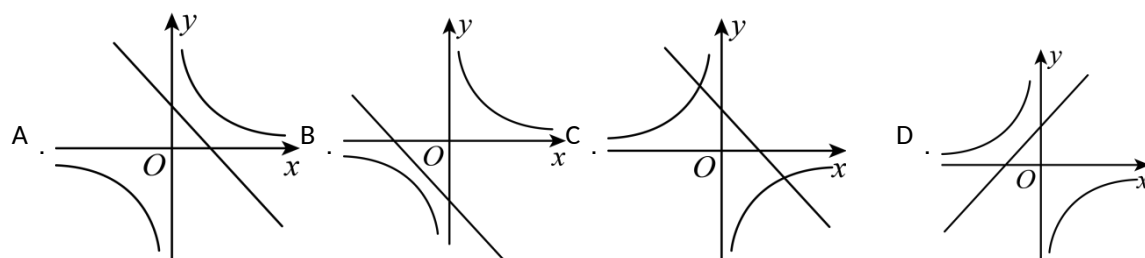


【变式4】 函数 $y = -\frac{1}{|x|}$ 的图像可能是（ ）

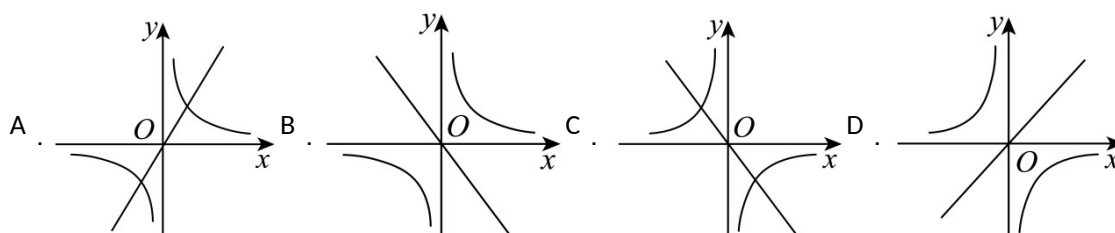


题型 02 反比例函数与一次函数图像的综合判断

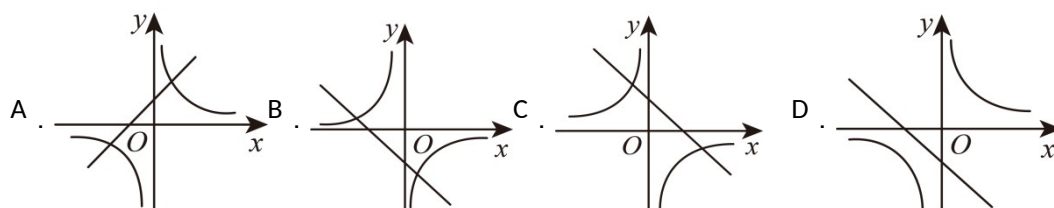
【典例1】 函数 $y = k(x-1)$ 与 $y = -\frac{k}{x}$ 在同一平面直角坐标系内的图像大致是（ ）



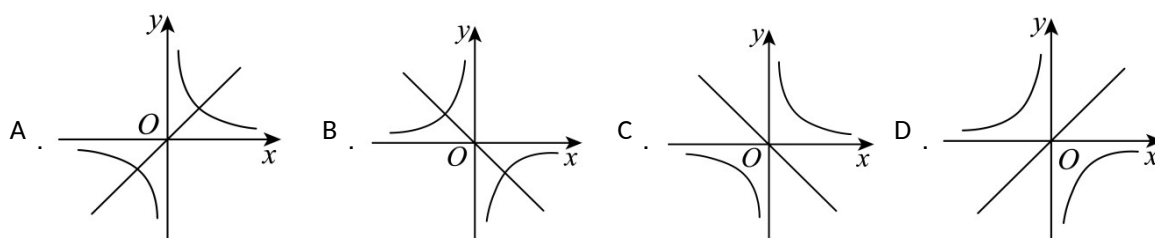
【变式1】如果 $k_1 < 0 < k_2$ ，那么函数 $y = k_1x$ 与 $y = \frac{k_2}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图像可能是 ()



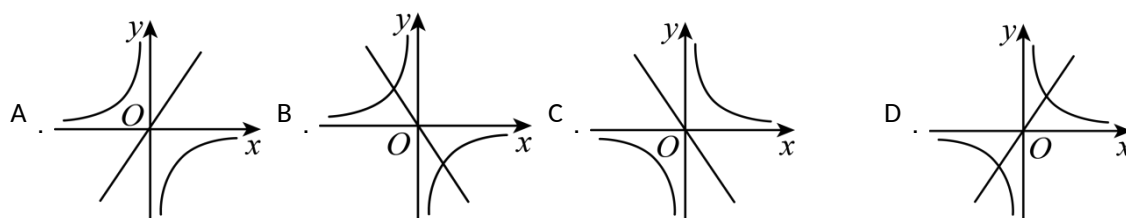
【变式2】函数 $y = k(x-1)$ 与函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在同一直角坐标系中的大致图像可能是 ()



【变式3】正比例函数 $y = kx$ 中，如果 y 随 x 增大而增大，那么它和反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在同一平面直角坐标系内的大致图像是 ()



【变式4】已知函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，那么它和函数 $y = kx (k \neq 0)$ 在同一直角坐标平面内的大致图像是 ()



题型 03 反比例函数的增减性

【典例1】关于反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ ，下列说法正确的是（ ）

- A. y 随 x 的增大而增大 B. y 随 x 的增大而减小
C. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小 D. 当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而增大

【变式1】已知点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ 都是反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 图象上的点，并且 $x_1 < x_2 < 0$ ，则（ ）

- A. $0 < y_1 < y_2$ B. $0 < y_2 < y_1$ C. $y_1 < y_2 < 0$ D. $y_2 < y_1 < 0$

【变式2】若点 $A(-2, a)$ ， $B(-1, b)$ ， $C(4, c)$ 在反比例函数 $y = \frac{-2}{x}$ 的图象上，则 a, b, c 的大小关系是（ ）

- A. $c > b > a$ B. $b > a > c$ C. $a > b > c$ D. $b > c > a$

【变式3】反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $(-2, 3)$ ，则下列说法错误的是（ ）

- A. 图象分布在第二、四象限
B. $k = -6$
C. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大
D. 当 $x < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小

【变式4】在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 中，若 $2 < x < 6$ ，则 y 的取值范围是_____。

题型 04 由反比例函数的图像和性质确定 k 的值

【典例1】已知反比例函数 $y = \frac{k-2026}{x}$ 的图象位于第一、三象限，则 k 的取值范围是（ ）

- A. $k < -2026$ B. $k > -2026$ C. $k < 2026$ D. $k > 2026$

【变式1】若反比例函数 $y = \frac{k-2}{x}$ 的图象在第一、第三象限内，则 k 的取值范围是（ ）

- A. $k \neq 2$ B. $k < 2$ C. $k > 2$ D. 任意实数

【变式2】若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图像在第二、四象限，则一次函数 $y = kx + k$ 的图像经过（ ）

- A. 第一、二、三象限 B. 第一、二、四象限

C. 第一、三、四象限

D. 第二、三、四象限

【变式3】 已知反比例函数 $y = \frac{2k+1}{x}$

(1) 如果这个函数的图象经过点 $(k, -1)$ ，求 k 的值；

(2) 如果在这个函数图象所在的每个象限内， y 的值随 x 的值增大而减小，求 k 的取值范围。

【变式4】 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $A(-5, 2)$ ，

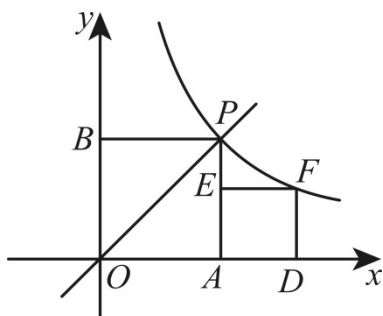
(1) 求这个函数的解析式；

(2) 请判断点 $B(1, 10)$ 是否在这个反比例函数的图象上，并说明理由。

(3) 当 $1 < x < 5$ 时，直接写出 y 的取值范围。

题型 05 “k” 的几何意义

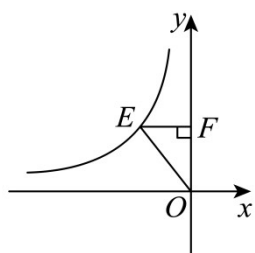
【典例1】 如图，正方形 $OAPB$ 、 $ADFE$ 的顶点 A 、 D 、 B 在坐标轴上，点 E 在 AP 上，点 P 、 F 在函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上，已知正方形 $OAPB$ 的面积为 9。



(1) 求 k 的值和直线 OP 的解析式；

(2) 求正方形 $ADFE$ 的边长。

【变式1】 如图， E 为反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上一点， EF 垂直于 y 轴于点 F ，若 $S_{\triangle OEF} = 3$ ，则 k 的值为 ()。



A. -3

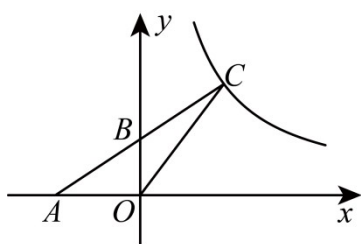
B. 3

C. -6

D. 6

【变式2】如图，点 A 在 x 轴的负半轴上，点 C 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上， AC 交 y 轴于点 B ，

若点 B 是 AC 的中点， $\triangle AOB$ 的面积为3，则 k 的值为（ ）



A. 10

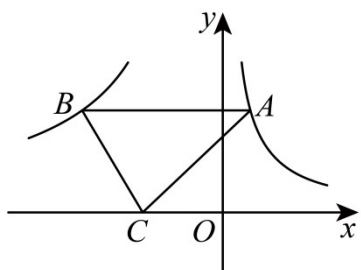
B. 11

C. 12

D. 13

【变式3】如图，点 A 在双曲线 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 上，点 B 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 上， $AB \parallel x$ 轴，点 C 是 x 轴上

一点，连接 AC 、 BC ，若 $\triangle ABC$ 的面积是6，则 k 的值（ ）



A. -6

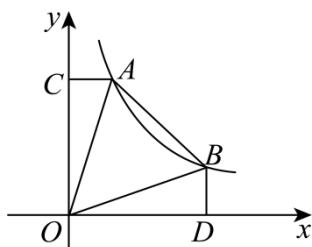
B. 10

C. -10

D. -12

【变式4】如图，在平面直角坐标系中，点 A ， B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上，过点 A 作 $AC \perp y$ 轴

于点 C ，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D ， $AC = BD$ ，若 $OC = 3$ ， $\triangle AOB$ 的面积为4，则 k 的值为（ ）



A. $\frac{5}{2}$

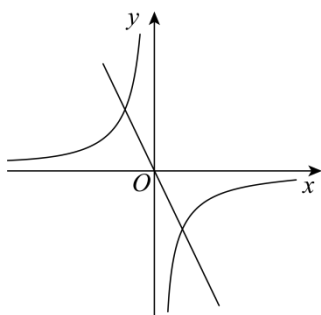
B. 3

C. $\frac{7}{2}$

D. 4

题型 06 反比例函数与一次函数图像的交点问题

【典例 1】 如图，若直线 $y = mx$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 的一个交点坐标为 $(1, -3)$ ，则其另一个交点坐标是 ()



A. $(1, 3)$

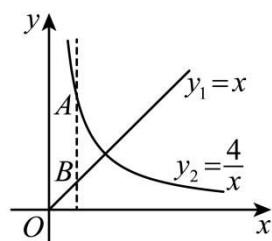
B. $(3, 1)$

C. $(-1, -3)$

D. $(-1, 3)$

【变式 1】 一次函数 $y_1 = x (x > 0)$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象如图所示，则下列结论中错误的是

()



A. 两个函数图象在第一象限的交点坐标为 $(2, 2)$

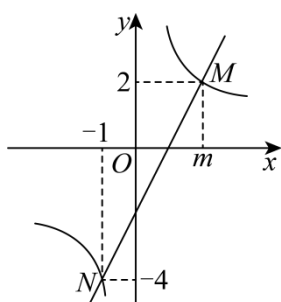
B. 直线 $x = 1$ 分别与反比例函数和一次函数的图象交于 A 、 B 两点，则线段 AB 的长为 3

C. 由图象可知，当 $x > 1$ 时， $y_2 > y_1$

D. 当 $x > 0$ 时， y_1 的值随着 x 值的增大而增大， y_2 的值随着 x 值的增大而减小

【变式 2】 如图，一次函数 $y = ax + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于 M 、 N 两点，则关于 x 的不等式

$ax + b < \frac{k}{x}$ 的解集为 ()



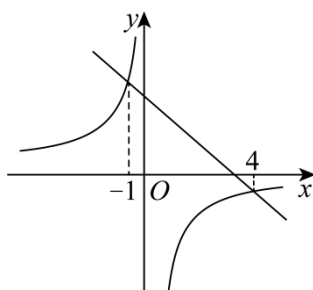
A. $-1 \leq x < 0$ 或 $x > 2$

B. $x \leq -1$ 或 $x > 2$

C. $x \leq 2$

D. $-1 \leq x \leq 2$

【变式3】 一次函数 $y_1 = k_1x + b$ 和反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($k_1 \cdot k_2 \neq 0$) 的图象如图所示，若 $y_1 > y_2$ ，则 x 的取值范围是 ()



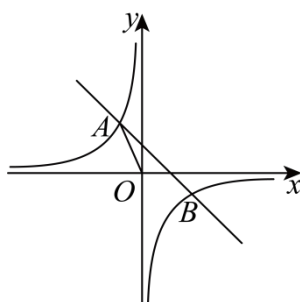
A. $-1 < x < 0$ 或 $x > 4$

B. $-1 < x < 4$

C. $x < -1$ 或 $x > 4$

D. $x < -1$ 或 $0 < x < 4$

【变式4】 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 的图象交于点 $A(-1, 3)$ ，与 x 轴交于点 $B(2, 0)$ 。



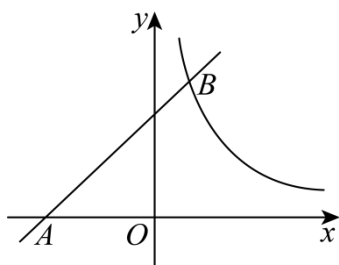
(1) 求反比例函数和一次函数的表达式；

(2) 如果点 P 是 y 轴上的一点，且 $OP = OA$ ，求点 P 的坐标；

(3) 请直接写出在第二象限中，当 $kx + b < \frac{m}{x}$ 时 x 的取值范围。

题型 07 数形结合法解决问题

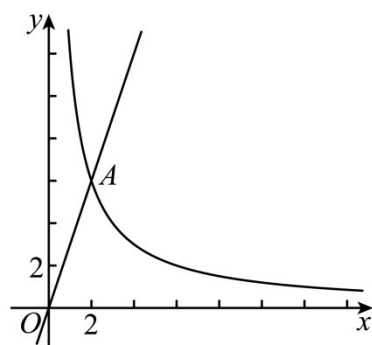
【典例 1】 一次函数 $y = x + 3$ 交 x 轴于点 A ，交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 于点 B ，已知点 B 的横坐标为 1。



(1) 求反比例函数解析式；

(2) 点 C 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 第一象限的图象上，若 $S_{\triangle ACB} = S_{\triangle AOB}$ ，求点 C 的坐标。

【变式 1】 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = 3x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 交于点 $A(2, m)$ 。



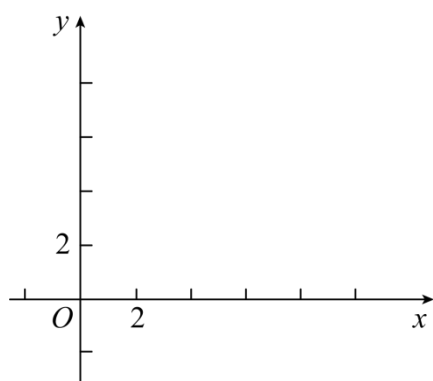
(1) 求双曲线的表达式；

(2) 已知 B 是双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 上一点，且到 y 轴的距离是 12，直线 $x = n (2 < n < 12)$ 与直线 $y = 3x$ 交于点 C ，

与双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 交于点 D 。如果 $S_{\triangle ACD} + \frac{1}{6} S_{\triangle BCD} = 15$ ，求 n 的值。

【变式 2】 已知直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 在第一象限交于 A 点，且点 A 的横坐标为 4，

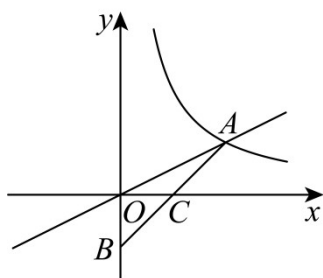
点 B 在双曲线上。



(1)求直线的函数解析式；

(2)若点 B 的纵坐标为 8，求 $\triangle OAB$ 的面积．

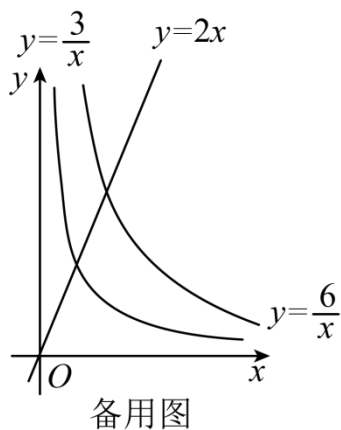
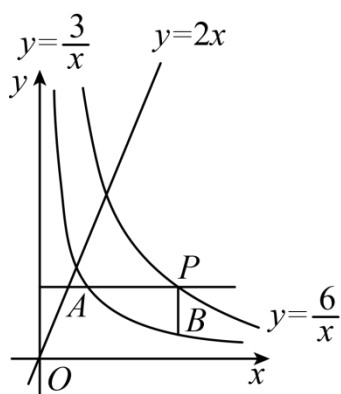
【变式3】 已知：如图，反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象与直线 $y = kx$ 相交于点 A ，直线 AC 与 x 轴交于点 $C(2,0)$ ，与 y 轴交于点 B ，点 C 是 AB 的中点．



(1)求直线 $y = kx$ 的函数解析式；

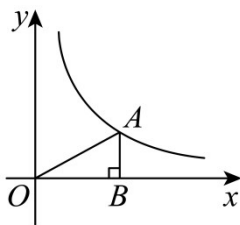
(2)若点 D 是直线 OA 上一点，且 $\triangle ABD$ 是直角三角形，求点 D 的坐标．

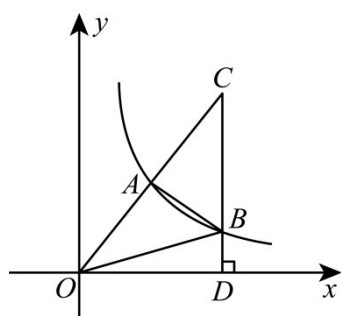
【变式4】 ．已知点 $P(m,n)$ 是反比例函数 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$ 图形上的动点， $PA \parallel x$ 轴， $PB \parallel y$ 轴，分别交反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图像于点 A 、 B ，点 C 是直线 $y = 2x$ 上的一点．



- (1) 请用含 m 的代数式表示 P 、 A 、 B 三点坐标。
- (2) 在点 P 的运动过程中，连接 AB ， $\triangle PAB$ 的面积是否变化，若不变，请求出 $\triangle PAB$ 的面积，若改变，请说明理由。
- (3) 在点 P 运动过程中，是否存在以 AP 为直角边的 $\triangle APC$ 和 $\triangle PAB$ 全等，如果存在，请求出 m 的值。

强化训练

1. 下列关于反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的说法正确的是 ()
- A. 图象经过第二、四象限 B. y 随 x 的增大而减小
- C. 图象与 x 轴有交点 D. 点 $(2, 3)$ 在该函数图象上
2. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过点 $(2, -6)$ ，则该图象也经过点 ()
- A. $(1, 12)$ B. $(-4, 3)$ C. $(3, -7)$ D. $(-4, -2)$
3. 双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 位于第二、第四象限，则下面说法正确的是 ()
- A. y 随 x 的增大而增大 B. y 随 x 的增大而减小 C. $k > 0$ D. $k < 0$
4. 如图，反比例函数在第一象限， $\triangle OAB$ 的面积是 1.5，则反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中， k 是 ()
- 
- A. 1.5 B. -1.5 C. 3 D. -3
5. 如图， $CD \perp x$ 轴，垂足为 D ， CO 、 CD 分别交双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 于点 A 、 B ，若 $OA = AC$ ， $\triangle OCB$ 的面积为 6，则 k 的值为 ()



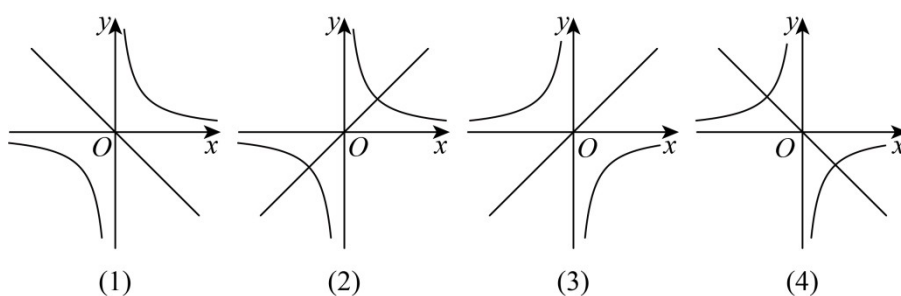
A . 4

B . 6

C . 8

D . 10

6. 函数 $y = kx$ 与 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在同一坐标平面内的大致图象是 ()



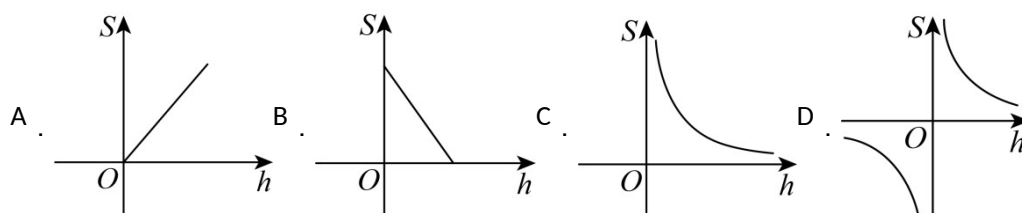
A . (1) 和 (2)

B . (1) 和 (3)

C . (2) 和 (3)

D . (2) 和 (4)

7. 某公司计划新建一个容积 $V(\text{m}^3)$ 一定的长方体污水处理池, 池的底面积 $S(\text{m}^2)$ 与深度 $h(\text{m})$ 之间的函数表达式为 $S = \frac{V}{h}$. 这个函数的图象大致是 () .



8. 一次函数 $y = -x + 3$ 与反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, 当一次函数值大于反比例函数值时, x 的取值范围是 ()

 A . $x < 1$

 B . $1 < x < 2$

 C . $x > 2$

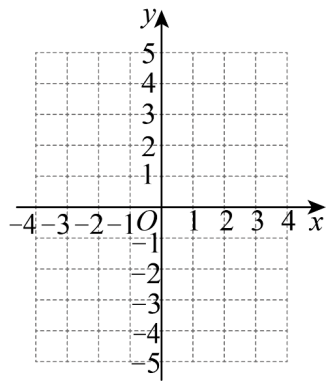
 D . $0 < x < 1$ 或 $x > 2$

9. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(2, -3)$, 则当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而_____ (填“增大”或“减小”) .

10. 已知方程 $x^2 - 3x + m = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 . 而点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 为反比例函数

$y = \frac{m-3}{x}$ 的图象上两点，若 $0 < x_1 < x_2$ ，则 y_1 _____ y_2 （填“ $>$ ”或“ $<$ ”或“ $=$ ”）。

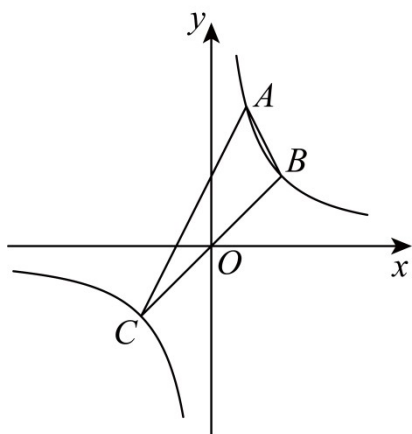
11. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(-1, 4)$ 。



- (1)求 y 与 x 之间的函数表达式；
- (2)在图中画出它在第四象限的图像；并指出在这个象限内， y 随 x 的增大怎样变化？
- (3)判断点 $P\left(\frac{1}{4}, -1\right)$ 是否在这个函数的图像上，说明理由。

x	...	1	2	4	...
y	...	-4	-2	-1	...

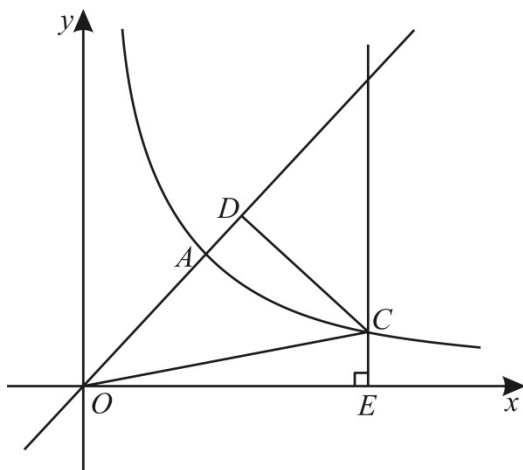
12. 如图，在平面直角坐标系中，点 $A(m, 4)$ 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 上的图像上，将点 A 先向右平移 1 个单位长度，再向下平移 a 个单位长度后得到 B ，点 B 恰好落在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图像上。



(1) 求点 A 、 B 坐标 .

(2) 联结 BO 并延长, 交反比例函数的图像于点 C , 求 $S_{\triangle ABC}$.

13. 如图, 正比例函数 $y = x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像相交于点 A , 其中点 A 的横坐标为 2, 点 C 是双曲线上点 A 右侧的一点 (不与点 A 重合), 过点 C 分别作 $CD \perp OA$, $CE \perp x$ 轴, 垂足分别为点 D 、点 E .



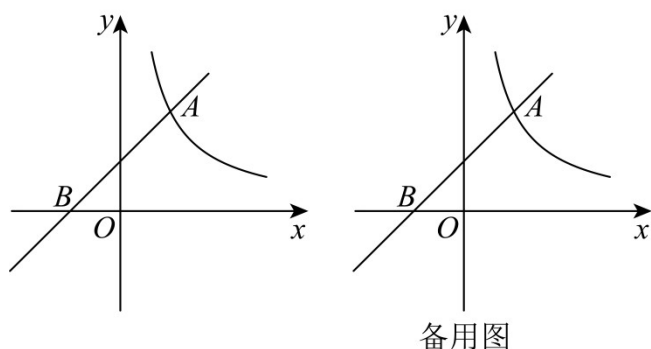
(1) 求反比例函数的解析式 ;

(2) 如果 $OE = 4$, 求点 D 的坐标 ;

(3) 取 OC 的中点 M , 联结 DM 、 DE , 试判断 $\triangle DEM$ 的形状, 并证明你的结论 .

14. 如图, 一次函数 $y_1 = kx + 2$ 的图像与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$, 与反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图像交于点

$A(2, a)$.

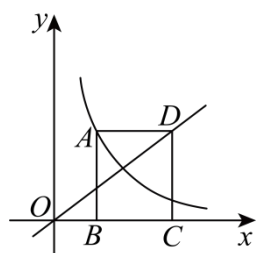


(1) 求 k 和 m 的值；

(2) 若点 D 是反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$ 上一点，在点 A 的下方，且 $\triangle BAD$ 的面积是 8，求出点 D 的坐标。

(3) 将函数 $y_1 = kx + 2$ 的图象沿 y 轴向下平移 4 个单位后交 x 轴于点 C 。点 P 是直线 $y_1 = kx + 2$ 上一点，点 Q 是反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$ 图象上一点。如果以点 B 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形为平行四边形，请直接写出点 P 的坐标。

15. 如图，已知点 $(1, 3)$ 在函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像上，长方形 $ABCD$ 的边 BC 在 x 轴上，函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像又经过点 A ， A 的纵坐标为 $\frac{6}{m}$ ，且 $OB:BC = 1:2$ 。



(1) 求 k 的值；

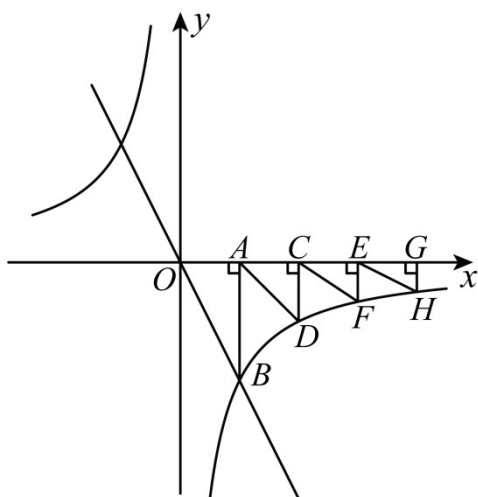
(2) 求 $\triangle OCD$ 的面积；

(3) 当 $\angle ABD = 45^\circ$ 时，求 m 的值。

16. 已知点 $A(-2, m)$ 在双曲线 $y = -\frac{4}{x}$ 上，将点 A 向右平移 5 个单位得到点 B 。

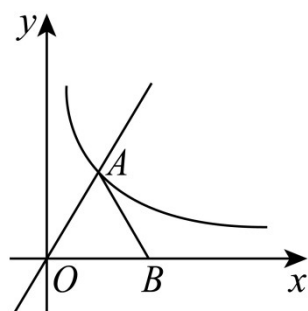
- (1) 当点 B 在直线 $y = -2x + b$ 上时，求直线 $y = -2x + b$ 的表达式；
- (2) 当线段 AB 被直线 $y = -2x + b$ 分成两部分，且这两部分长度的比为 $3:2$ 时，求 b 的值。

7. 如图，已知点 B 是一个反比例函数的图象与正比例函数 $y = -2x$ 的图象的公共点， AB 垂直于 x 轴，垂足 A 的坐标为 $(2, 0)$ 。



- (1) 求这个反比例函数的解析式。
- (2) 在 x 轴正半轴上截取 $OA = AC = CE = EG$ ，分别再过 C 、 E 、 G 作 x 轴的垂线，与反比例函数图象交于点 D 、 F 、 H ，联结 AD 、 CF 、 EH ，求 $\triangle EHG$ 的面积。
- (3) 如果点 M 在这个反比例的图象上，且 $\triangle ABM$ 的面积为 6 ，求点 M 的坐标。

18. 如图，在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像都经过点 $A(2, m)$ 。



- (1) 求反比例函数的解析式

(2) 点 B 在 x 轴上，且 $OA = BA$ ，反比例函数图像上有一点 C ，且 $\angle ABC = 90^\circ$ ，求点 C 坐标。

(3) 在 (2) 的条件下，连接 OC ， AC ，求 $\triangle AOC$ 的面积。