

专题 03 数学思想在四边形中的应用

考点归纳

考点 01 分类讨论思想的应用

考点 02 整体思想的应用

考点 03 转化思想的应用

考点 04 方程思想的应用

考点精练

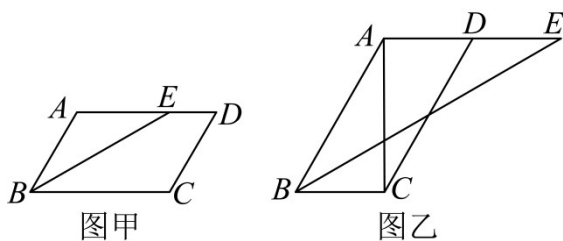
考点 01 分类讨论的思想

【题型 1】根据线段位置分类

1. 在 $\square ABCD$ 中，已知 $AB=6$ ， BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 边于点 E ，点 E 将 AD 分为 $1:3$ 两部分，则 AD 的长为_____。

【题型 2】根据交点位置分类

2. 在平行四边形 $ABCD$ 中， BE 平分 $\angle ABC$ ，交边 AD 所在直线于 E 点，若 $AB=6$ ， $ED=3$ ，则边 BC 的长度为_____。



在平行四边形 $ABCD$ 中， BE 平分 $\angle ABC$ ，交边 AD 所在直线于 E 点，若 $AB=6$ ， $ED=3$ ，则边 BC 的长度为_____。

【题型 3】双角平分线截边（根据重叠分类）

3. 在 $\square ABCD$ 中， BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于点 E ， CF 平分 $\angle BCD$ 交 AD 于点 F ，若 $AB=4$ ， $EF=1$ ，则边 BC 为

A. 7

B. 9

C. 7 或 8

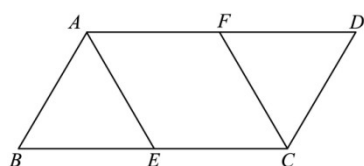
D. 7 或 9

【题型 4】根据高的位置分类

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中， BC 边上的高为 4， $AB = 5$ ， $AC = 2\sqrt{5}$ ，则平行四边形 $ABCD$ 的周长等于_____。
5. 已知在平行四边形 $ABCD$ 中，过点 A 作 BC 边上的高 AE ，若 $AB = 5$ ， $AD = 8$ ，平行四边形 $ABCD$ 的面积是 32，则 CE 的长为_____。

【题型 5】根据动点的位置分类

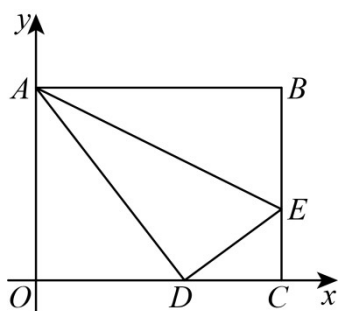
6. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， AE 平分 $\angle BAD$ ，交 BC 于点 E ， CF 平分 $\angle BCD$ ，交 AD 于点 F 。



- 若 $AB = 1$ ， $AD > AB$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，动点 P ， Q 分别从 B ， C 两点同时出发，沿 $\triangle BAE$ 和 $\triangle DFC$ 各边运动，点 P 沿 $B \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B$ 运动，点 Q 沿 $C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow C$ 运动，点 P 的运动速度为 1 个单位长度/秒，点 Q 的运动速度是点 P 的 2 倍，点 Q 到达点 C 时，两点同时停止运动，设运动时间为 t 秒，直接写出 t 为何值时，四边形 $BPDQ$ 是平行四边形。

【题型 5】三定一动求平行四边形顶点位置

7. 已知，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCO$ 的边 OA 在 y 轴的正半轴上，边 OC 在 x 轴的正半轴上，且点 $A(0,8)$ ， $C(10,0)$ ， E 为 BC 上一点，将矩形沿 AE 翻折，使点 B 落在 OC 边上的点 D 处。

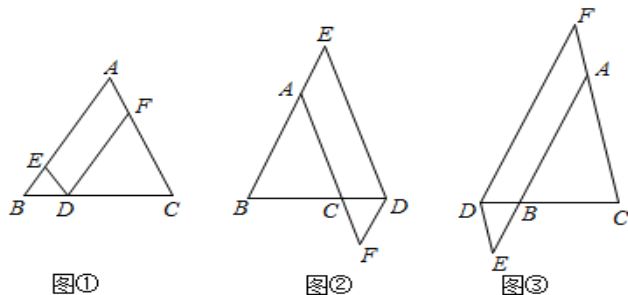


- (1) 求点 D 的坐标；
- (2) 在平面内是否存在一点 Q ，使以 A ， D ， C ， Q 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，请直接写出满足条件的点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

考点 02 整体思想的应用

【题型 1】 周长与邻边之和

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 在边 BC 所在的直线上, 过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交直线 AB 于点 E , $DF \parallel AB$ 交直线 AC 于点 F .

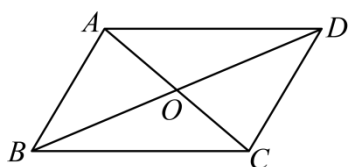


(1) 当点 D 在边 BC 上时, 如图①, 求证: $DE + DF = AC$;

(2) 当点 D 在边 BC 的延长线上时, 如图②; 当点 D 在边 BC 的反向延长线上时, 如图③, 请分别写出图②、图③中 DE 、 DF 、 AC 之间的等量关系式 (不需要证明);

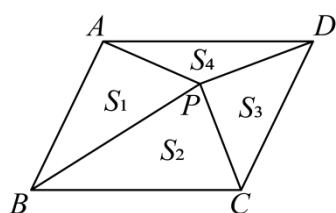
【题型 2】 平行四边形的对角线与周长

9. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 O , 且 $CD = 4$, 若它的对角线的和是 32, 则 $\triangle AOB$ 的周长为 _____.



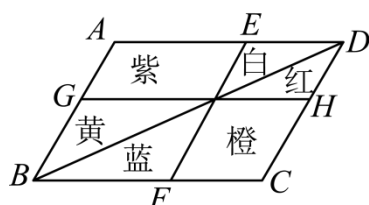
【题型 3】 平行四边形的面积问题

10. 如图, 设 P 为 $\square ABCD$ 内的一点, $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PDC$, $\triangle PDA$ 的面积分别记为 S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , 则有 ()

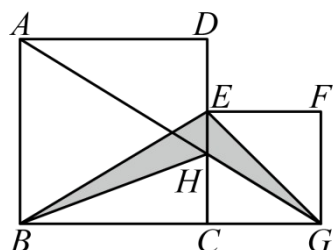


- A. $S_1 = S_4$ B. $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ C. $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$ D. 以上都不对

11. 某广场上一个形状是平行四边形的花坛，分别种有红、黄、蓝、白、橙、紫⁶种颜色的花．如果有 $AB \parallel EF \parallel DC$ ， $BC \parallel GH \parallel AD$ ，那么下列说法中错误的是（ ）



- A. 红花，白花种植面积一定相等
B. 红花，蓝花种植面积一定相等
C. 蓝花，黄花种植面积一定相等
D. 紫花，橙花种植面积一定相等
12. 如图，已知正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ ，点 E 在 CD 边上，连接 AG 交 CD 于点 H ，连接 BE ， BH ， GE ．若要求出图中阴影部分的面积，只需知道（ ）

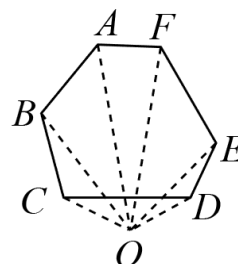
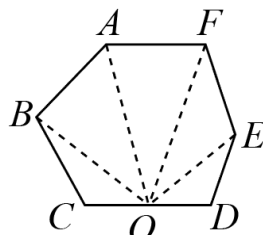
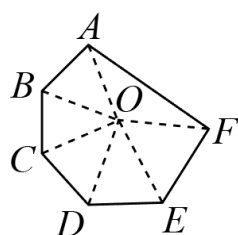
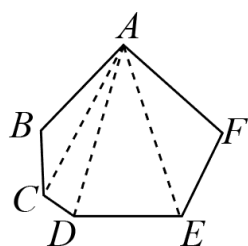


- A. 正方形 $CEFG$ 的面积
B. 三角形 BHG 的面积
C. 正方形 $ABCD$ 的面积
D. 三角形 ADH 的面积

考点 03 转化思想的应用

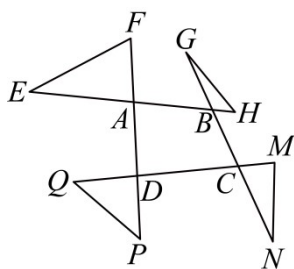
【题型 1】多边形内角和的探究

13. 数学课上，老师在组织同学们探索多边形的内角和公式时，同学们提出了将此问题转化为已学的三角形内角和知识进行探索的思路．如图是四名同学探索多边形内角和公式时运用的不同的分割方法，将多边形转化为多个三角形，并得出了相同的结论．这四名同学在探索过程中主要体现的数学思想是（ ）

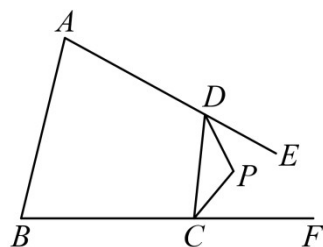


- A. 建模思想
B. 分类讨论思想
C. 数形结合思想
D. 转化思想

14. 如图，以四边形 $ABCD$ 各顶点及各边延长线上的点构成 $\triangle AEF$ ， $\triangle BGH$ ， $\triangle CMN$ ， $\triangle DPQ$ ，则 $\angle E$ ， $\angle F$ ， $\angle G$ ， $\angle H$ ， $\angle M$ ， $\angle N$ ， $\angle P$ ， $\angle Q$ 的度数和为_____。

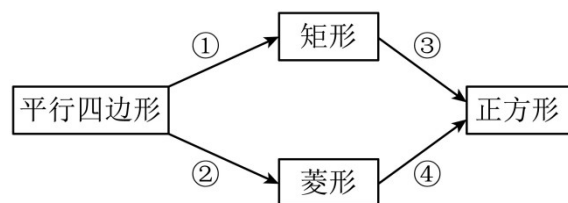


15. 如图， $\angle FCD$ ， $\angle EDC$ 是四边形 $ABCD$ 的外角， CP ， DP 分别平分 $\angle FCD$ 和 $\angle EDC$ 且相交于点 P 。若 $\angle A = 70^\circ$ ， $\angle B = 80^\circ$ ，则 $\angle CPD =$ _____。



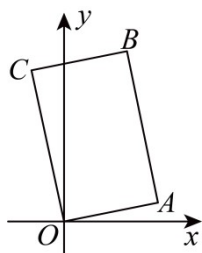
【题型 2】特殊四边形性质的转化

16. 在复习特殊的平行四边形时，某小组同学画出了如图关系图，组内一名同学在箭头处填写了它们之间转化的条件，其中填写错误的是（ ）。



- A. ①对角相等 B. ②对角线互相垂直
C. ③有一条对角线平分一组对角 D. ④对角线相等

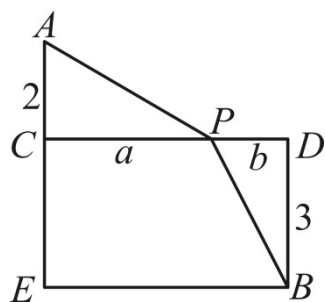
17. 数学家笛卡尔在《几何》一书阐述了坐标几何思想，主张取代数和几何中最好的东西以长补短。如图，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ ，点 B 的坐标是 $(2, 6)$ ，则 AC 的长是（ ）



- A. $2\sqrt{10}$ B. 8 C. 6 D. $\sqrt{10}$

【题型 3】几何模型的转化——最小值模型

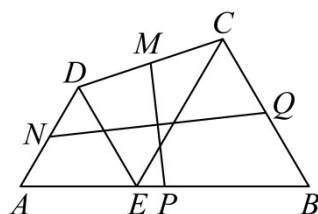
18. 问题：当 $a+b=5$ 时，求代数式 $\sqrt{a^2+4}+\sqrt{b^2+9}$ 的最小值小明的解题思路是：如图，把 $\sqrt{a^2+4}$ 看作两直角边分别为 a 和 2 的 $\text{Rt}\triangle ACP$ 斜边 AP 的长， $\sqrt{b^2+9}$ 看作两直角边分别是 b 和 3 的 $\text{Rt}\triangle BDP$ 斜边 BP 的长，将问题转化为求 $AP+BP$ 的最小值。根据小明的解思路求出该问题的最小值为 ()



- A. $2\sqrt{13}$ B. 7 C. $4\sqrt{3}$ D. $5\sqrt{2}$

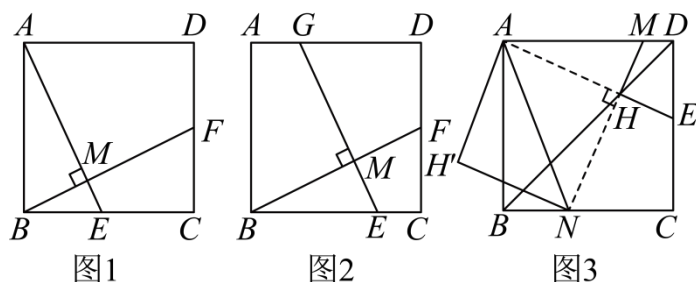
【题型 3】几何模型的转化——手拉手模型

19. 如图所示，在四边形 $ABCD$ 中， E 为 AB 上一点， $\triangle ADE, \triangle BCE$ 都是等边三角形，点 P, Q, M, N 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点，线段 PM 与 NQ 有什么关系？请说明理由。



【题型 3】几何模型的转化——十字架模型

20. 问题情境：如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，点 E, F 分别在边 BC, CD 上，且 $AE \perp BF$ ，垂足为 M 。那么 AE 与 BF 相等吗？



(1) 直接判断： AE _____ BF (填“=”或“ $\neq$ ”)；

在“问题情境”的基础上，继续探索：

问题探究：

(2) 如图 2，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 分别在边 BC 、 CD 和 DA 上，且 $GE \perp BF$ ，垂足为 M 。那么 GE 与 BF 相等吗？证明你的结论；

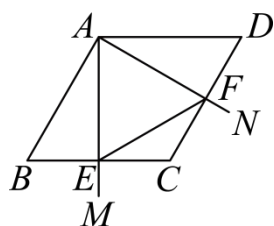
问题拓展：

(3) 如图 3，点 E 在边 CD 上，且 $MN \perp AE$ ，垂足为 H ，当 H 在正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上时，连接 AN ，将 $\triangle AHN$ 沿着 AN 翻折，点 H 落在点 H' 处。

四边形 $AHNH'$ 是正方形吗？请说明理由；

【题型 3】几何模型的转化——半角模型与旋转型全等

21. 已知四边形 $ABCD$ 是菱形， $AB = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle MAN$ 的两边分别与射线 CB ， DC 相交于点 E ， F ，且 $\angle MAN = 60^\circ$ ，连接 EF 。 AE 与 EF 的数量关系为_____。



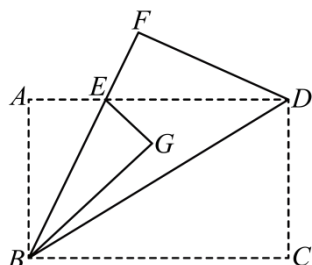
考点 04 方程思想的应用

【题型 1】多边形中边数的计算

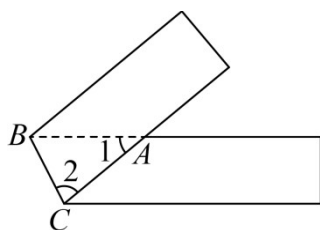
22. 一个多边形的内角和等于 1800° ，则该多边形的边数 n 等于_____。

【题型 2】折叠中倒角问题

23. 如图，在长方形纸片 $ABCD$ 中，将 $\angle CBD$ 沿对角线 BD 折叠得 $\angle FBD$ ， FB 和 AD 相交于点 E ，将 $\angle ABE$ 沿 BE 折叠得 $\angle GBE$ ($\angle GBE < \angle DBE$)。若 $\angle GBD = 12^\circ$ ，则 $\angle ABE$ 的度数为_____。

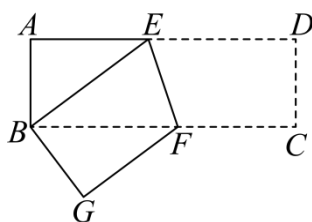


24. 如图，将矩形纸条如图折叠，若 $\angle 1 = 36^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是_____。

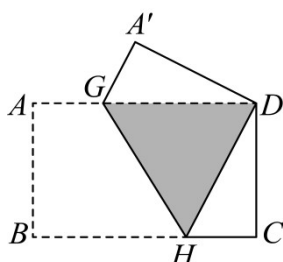


【题型 3】矩形折叠中线段的计算

25. 如图，矩形纸片 $ABCD$ 的长 $AD = 15\text{cm}$ ，宽 $AB = 5\text{cm}$ ，将其折叠，使点 D 与点 B 重合，那么折叠后 DE 长_____ cm 。

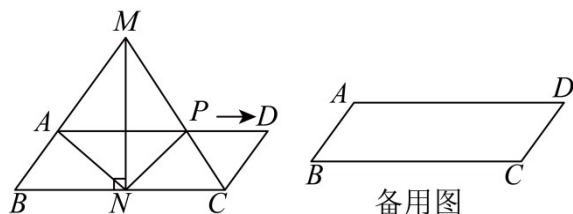


26. 已知矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB < BC$ ， $AB = 4$ 将它沿 GH 折叠，如图，使点 B 与点 D 重合。当折叠后纸片重叠部分（即图中阴影部分）的面积占矩形纸片面积的 $\frac{5}{16}$ 时，则 BC 的长为_____。



【题型 4】动点问题中的图形变化

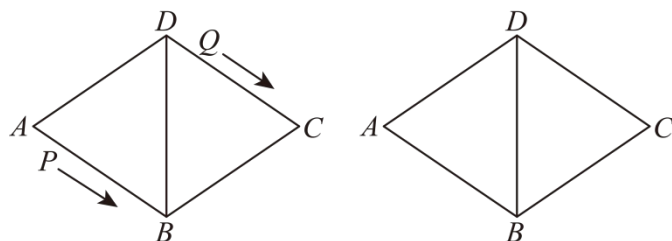
27. 如图四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 P 为 AD 边上一动点，连接 CP 并延长交 BA 的延长线于点 M ，过 M 作 $MN \perp BC$ ，垂足是 N ，连接 AN ， NP ，设点 P 运动时间为 t (s) 解答下列问题：



(1) 若 $AD = 6\text{cm}$ ， $CD = 2\text{cm}$ ， $\angle B = 45^\circ$ ，点 P 从点 A 出发沿 AD 方向运动速度为 3cm/s 。当 t 为何值时，四边形 $ACDM$ 是平行四边形？

(2) 在 (1) 的条件下是否存在某一时刻 t ，使四边形 $ANPM$ 是平行四边形？若存在求出相应的 t 的值；若不存在请说明理由。

28. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 24cm ， $\angle A = 60^\circ$ ，动点 P 从点 A 出发，沿着线路 $AB - BD$ 做匀速运动，动点 Q 从点 D 同时出发，沿着线路 $DC - CB - BA$ 做匀速运动。



(1) $BD =$ _____；

(2) 已知动点 P 、 Q 运动的速度分别为 4cm/s 、 5cm/s 。经过 12 秒后， P 、 Q 分别到达 M 、 N 两点，试判断 $\triangle AMN$ 的形状，并说明理由，同时求出 $\triangle AMN$ 的面积；

(3) 设问题 (2) 中的动点 P 、 Q 分别从 M 、 N 同时沿原路返回，动点 P 的速度不变，动点 Q 的速度改变为 $a\text{cm/s}$ ，经过 3 秒后， P 、 Q 分别到达 E 、 F 两点，若 $\triangle BEF$ 为直角三角形，试求 a 的值。