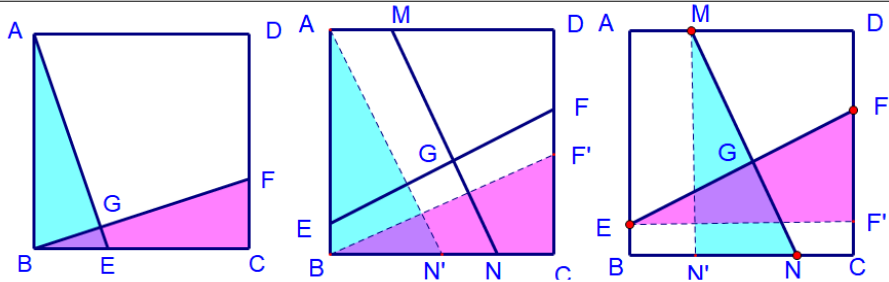
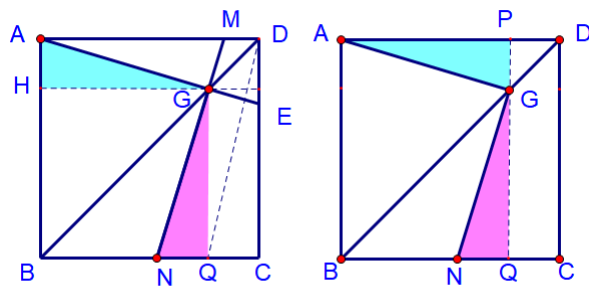


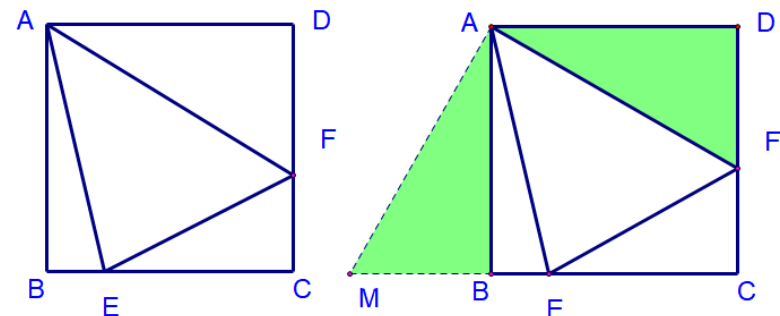
专题 01 特殊平行四边形中的几何模型

题型归纳

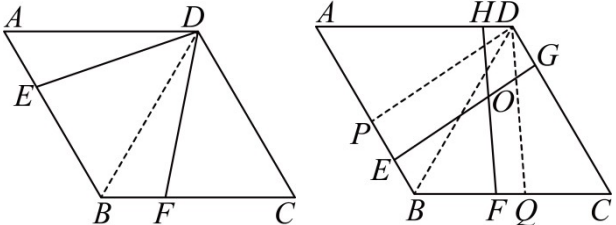
题型一：正方形内十字架模型

基本模型	 若 $AE \perp BF$ 则 $AE=BF$ 若 $EF \perp MN$ 则 $EF=MN$ 反之也成立
模型演变	 $AE \perp MN$ 于点 G，若 G 点在 BD 上 $AE=MN \rightarrow AG=NG$

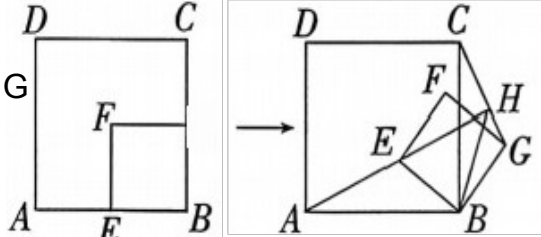
题型二：正方形内半角模型

正方形内半角模型	 若 $\angle EAF=45^\circ$ 则 $BE+DF=EF$ 反之也成立
----------	---

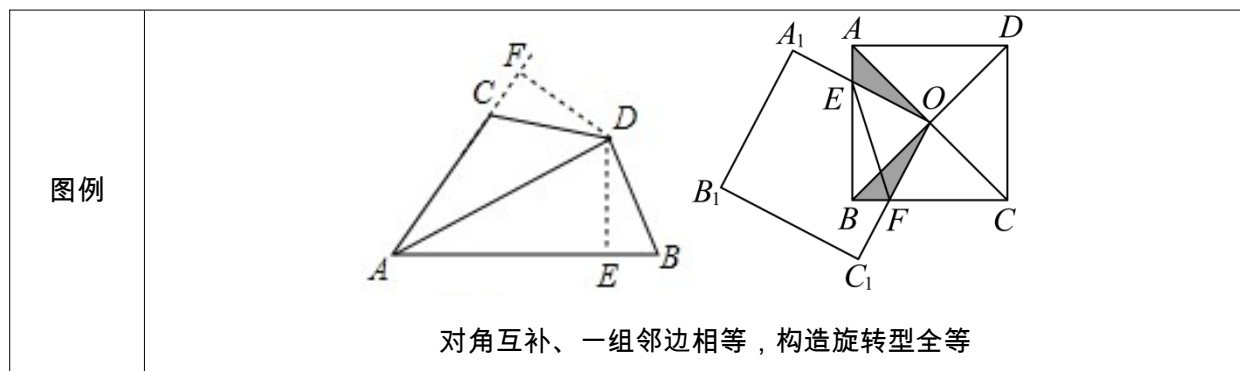
题型三：菱形内半角模型

菱形内 半角模型	 若 $\angle EDF = \frac{1}{2} \angle ADC = 60^\circ$，则 $DE = DF$ (若 $\angle EQF = \frac{1}{2} \angle ADC = 60^\circ$，则 $GE = HF$)
-------------	--

题型四：手拉手模型

图例	 两个正方形共顶点，则 $\triangle ABE \cong \triangle CBG$，所以 $AE = DG$，$AE \perp CG$
----	---

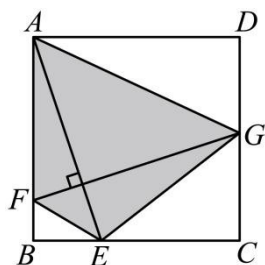
题型五：对角互补模型



题型专练

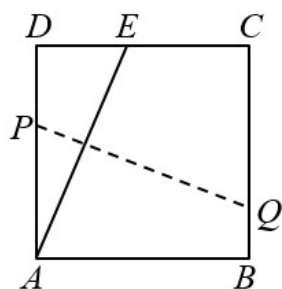
题型 01 正方形内的十字架模型

【典例 1】 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ，点 E 是 BC 边上一点，且 $CE=2BE$ ，连接 AE ，点 F 是 AB 边上一点，过点 F 作 $FG \perp AE$ 交 CD 于点 G ，连接 EF ， EG ， AG ，则四边形 $AFEG$ 的面积为_____。



【变式 1】 如图，将一边长为 12 的正方形纸片 $ABCD$ 的顶点 A 折叠至 DC 边上的点 E ，使 $DE=5$ ，若折痕为 PQ ，则 PQ 的长为 ()

若 $\angle EAF=45^\circ$ 则 $BE+DF=EF$ 反之也成立



A . 13

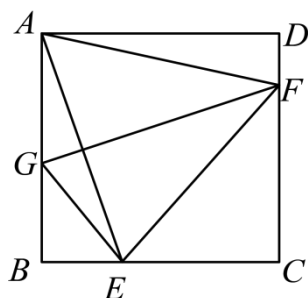
B . 14

C . 15

D . 16

【变式2】 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 3， E 为 BC 边上一点， $BE=1$ 。将正方形沿 GF 折叠，使点 A 恰

好与点 E 重合，连接 AF ， EF ， GE ，则四边形 $AGEF$ 的面积为 ()



A . $2\sqrt{10}$

B . $2\sqrt{5}$

C . 6

D . 5

【变式3】 综合与实践课上，数学兴趣小组对图形中两条互相垂直的线段间的数量关系进行了探究。

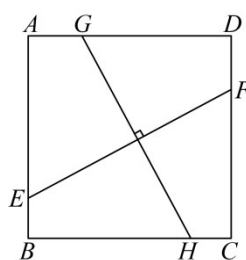


图 (1)

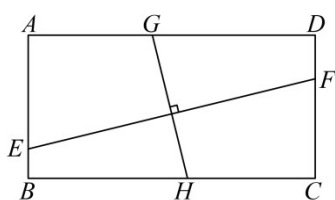


图 (2)

(1) 操作判断

如图 (1)，在正方形 $ABCD$ 中，点 E ， F ， G ， H 分别在边 AB ， CD ， AD ， BC 上，且 $EF \perp GH$ ，请直接写

出 EF 和 GH 数量关系 .

(2) 迁移探究

如图 (2) , 在矩形 $ABCD$ 中 , $BC = 2AB$, 点 E, F, G, H 分别在边 AB, CD, AD, BC 上 , 且 $EF \perp GH$, 若 $EF = 8$, 垂足求 GH 的长 .

【变式 4】 如图 , 已知正方形 $ABCD$, 点 E 在边 AB 上 , 点 H 在射线 BC 上 , 连接 DE .

(1) 如图 1 , 当点 H 在 BC 边上时 , 过点 H 作 $HG \perp DE$ 交 DE 于点 O , 则线段 DE _____ GH ; (填

“ > ” “ < ” 或 “ = ”)

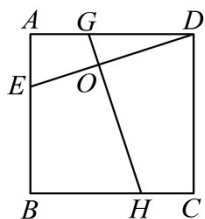


图1

(2) 如图 2 , 平移图 1 中的线段 GH , 使点 G 与点 D 重合 , 点 H 在 BC 的延长线上 , 连接 EH , 取 EH 的

中点 P , 连接 PC , 求证 : $BE = \sqrt{2}PC$;

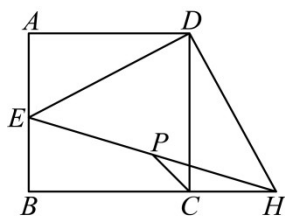
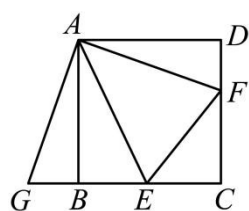


图2

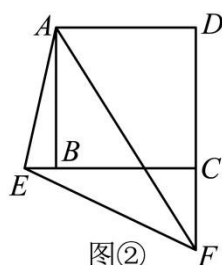
题型 02 正方形内的半角模型

【典例 1】 【问题情境】 如图① , 在正方形 $ABCD$ 中 , $\angle EAF = 45^\circ$, AE , AF 分别与 BC , CD 交于点 E ,

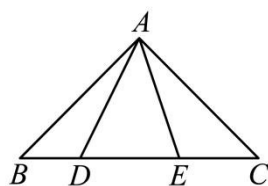
F .



图①



图②



图③

【探索发现】

(1)如图①，为探究线段 BE ， EF ， DF 之间的数量关系，小杨延长 CB 至点 G ，使得 $BG = DF$ ，连接 AG .

先证明 $\triangle ABG \cong \triangle ADF$ ，再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AEG$ ，即可得到 BE ， EF ， DF 之间的数量关系为：_____；

【操作探究】

(2)如图②，当点 E ， F 分别在 CB ， DC 的延长线上时，请根据上述小杨的思路，探究线段 BE ， EF ， DF

之间的数量关系；

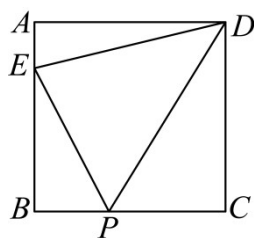
【问题解决】

(3)如图③，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D ， E 在 BC 边上，且 $\angle DAE = 45^\circ$ ，若 $BD = 3$ ，

$DE = 5$ ，则 BC 的长为_____ .

【变式 1】 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4， E 为边 AB 上的一点， $AE = 1$ ， P 为边 BC 上的一点，当

$\angle EDP = 45^\circ$ 时， CP 的长为 ()



A . 1.6

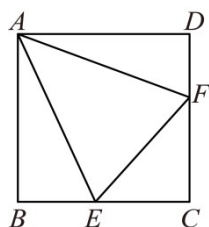
B . 2

C . 2.4

D . 3

【变式 2】 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 BC 边上一点， F 为 CD 边上一点， $BE + DF = EF$. 求 $\angle EAF$

的度数 .



【变式 3】 已知四边形 $ABCD$ 是正方形，一个等腰直角三角板的一个锐角顶点与 A 点重合，将此三角板绕

A 点旋转时，两边分别交直线 BC ， CD 于 M ， N .

(1) 如图 1，当 M ， N 分别在边 BC ， CD 上时，求证： $BM + DN = MN$

(2) 如图 2，当 M ， N 分别在边 BC ， CD 的延长线上时，请直接写出线段 BM ， DN ， MN 之间的数量关系

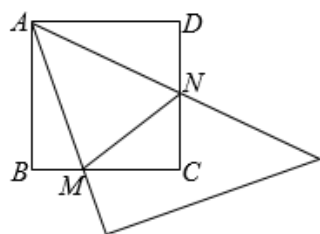


图1

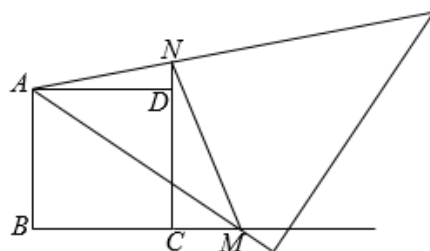


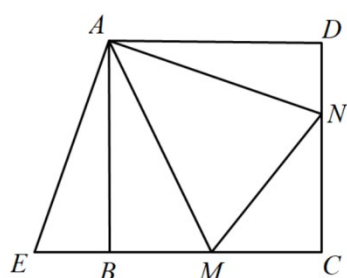
图2

【变式4】 如图，点 M ， N 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC ， CD 上， $\angle MAN = 45^\circ$ ，点 E 在 CB 的延长线上，

连接 AE ， $BE = DN$ 。

(1) 求证： $AE = AN$ ；

(2) 若 $CM = 3$ ， $CN = 4$ ，求 EM 的长。



题型 03 菱形内的半角模型

【典例1】 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，点 E ， F 分别是边 AB ， BC 上的点。

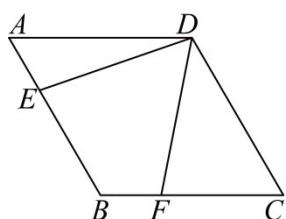


图1

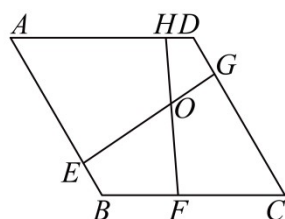


图2

【尝试初探】

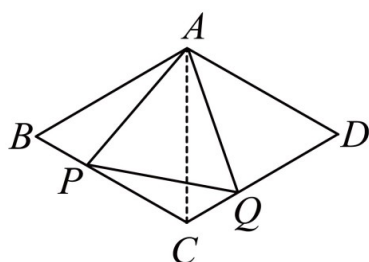
(1) 如图1，若 $\angle EDF = 60^\circ$ ，求证： $DE = DF$

【深入探究】

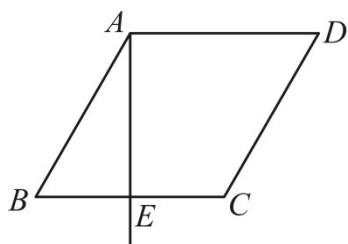
(2) 如图2，点 G ， H 分别是边 CD ， AD 上的点，连接 EG 与 FH 相交于点 O 且 $\angle EOF = 60^\circ$ ，求证：

$$EG = FH$$

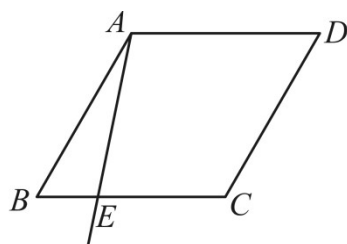
【变式1】 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC=60^\circ$ ， P 、 Q 分别在 BC 、 CD 上，且 $\angle PAQ=60^\circ$ ，求证： $PA=AQ$ 。



【变式2】 综合与探究：如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle B=60^\circ$ ， E 是射线 CB 上一动点，作射线 AE 。



图①



图②

(1) 【操作判断】

如图①， $AE \perp BC$ ，将射线 AE 绕点 A 逆时针旋转 60° 交 CD 于点 F ，根据题意在图①中画出射线 AF ，图中

$\angle AFD$ 的度数为——度；

(2) 【问题探究】

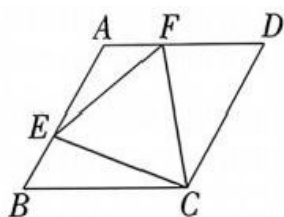
如图②，点 E 在线段 BC 上（不与点 B ， C 重合），将射线 AE 绕点 A 逆时针旋转 60° 交 CD 于点 F ，探究线

段 AB ， CE ， CF 之间的数量关系，并说明理由：

【变式3】 如图，菱形 $ABCD$ 中， $\angle B=60^\circ$ ，点 E, F 分别在 AB, AD 上，且 $\angle ECF=60^\circ$ 。

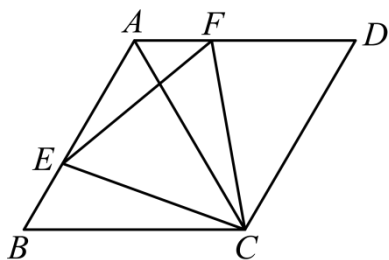
(1) 求证： $\triangle ECF$ 为等边三角形；

(2) 连接 AC ，若 AC 将四边形 $AECF$ 的面积分为 $1:2$ 两部分，当 $AB=6$ 时，则 $\triangle BEC$ 的面积为



【变式4】 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle B=60^\circ$ ，点 E, F 分别在 AB, AD 上，且 $\triangle ECF$ 是等边三角形。求

证： $AE = DF$ 。



题型 04 手拉手模型

【典例1】

【提出问题】 数学讨论课上，小明绘制图 1 所示的图形，正方形 $ABCD$ 与正方形 $BEFG$ ($AB > BE$)，点

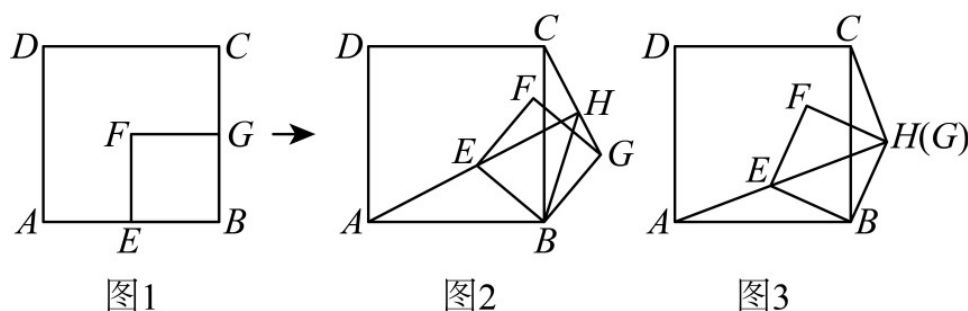
E, G 分别在 AB, BC 上，根据图形提出问题：如图 2，正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转，旋转角为

α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)，直线 AE 与 CG 相交于点 H ，连接 BH ，探究线段 AH, BH, CH 之间的数量关系。

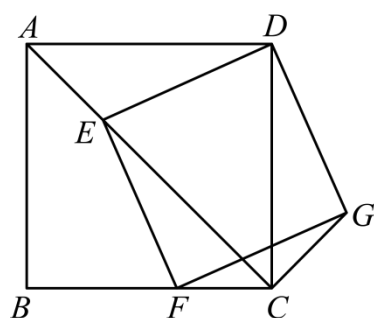
【解决问题】 (1) 小明将上述问题特殊化，如图³，当点 G, H 重合时，请你写出 AH, BH, CH 之间的数量关系，并说明理由；

(2) 小明借鉴 (1) 中特殊化的解题策略后，再解决图²所示的一般化问题，当点 G, H 不重合时，请你写出 AH, BH, CH 之间的数量关系，并说明理由；

【拓展问题】 (3) 小明将图²所示问题中的旋转角 α 的范围再扩大，正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转，旋转角为 $\alpha (180^\circ < \alpha < 360^\circ)$ ，直线 AE 与 CG 相交于点 H ，连接 BH ，请直接写出 AH, BH, CH 之间的数量关系。



【变式1】) 四边形 $ABCD$ 为正方形，点 E 为线段 AC 上一点，连接 DE ，过点 E 作 $EF \perp DE$ ，交射线 BC 于点 F ，以 DE, EF 为邻边作矩形 $DEFG$ ，连接 CG 。

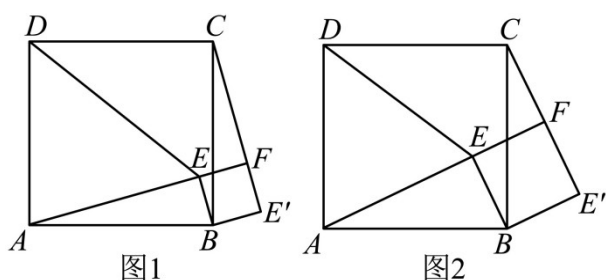


(1) 如图，求证：矩形 $DEFG$ 是正方形；

(2) 若 $AB = 4$ ， $CE = 3\sqrt{2}$ ，求 CG 的长度；

【变式2】 如图1，点 E 为正方形 $ABCD$ 内一点， $\angle AEB = 90^\circ$ ，将 $Rt\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90°

(即 $\angle EBE' = 90^\circ$)，得到 $\triangle CBE'$ (点 A 的对应点为点 C) 延长 AE 交 CE 于点 F ，连接 DE 。



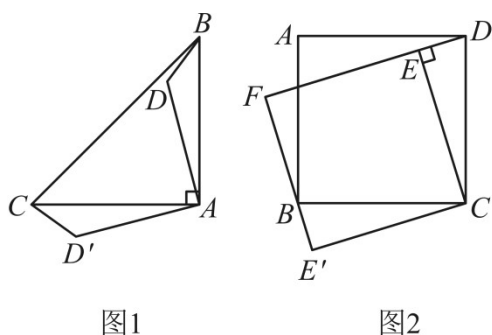
(1) 试判断四边形 $BE'FE$ 的形状，并说明理由。

(2) 如图2，若 $DA = DE$ ，请猜想线段 CF 与 FE' 的数量关系并加以证明。

【变式3】综合与实践

在探索几何图形变化的过程中，通过直观猜想、逻辑推理、归纳总结可以获得典型的几何模型，运用几何

模型能够轻松解决很多问题，让我们共同体会几何模型的“数学之美”。



(1) **【几何直观】** 如图1， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，在 $\triangle ABC$ 内部取一点 D ，连接 AD ，将线段

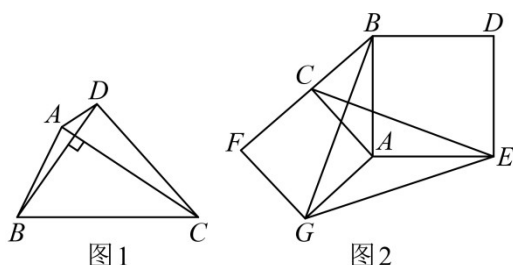
AD 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到线段 AD' ，连接 BD ， CD' ，则 CD' 与 BD 的数量关系是_____；

$\angle AD'C$ 与 $\angle ADB$ 的数量关系是_____；

(2) 【类比推理】如图 2，在正方形 $ABCD$ 内部取一点 E ，使 $\angle CED = 90^\circ$ ，将线段 CE 绕点 C 逆时针旋转

90° 得到线段 CE' ，连接 $E'B$ ，延长 $E'B$ 交 DE 的延长线于点 F ，求证：四边形 $CEFE'$ 是正方形；

【变式 4】如图，我们把对角线互相垂直的四边形叫做垂美四边形。（如图 1）



(1) 概念理解：在平行四边形，矩形，菱形，正方形中，一定是垂美四边形的是_____；

(2) 性质证明：如图 1，四边形 $ABCD$ 是垂美四边形，请写出其两组对边 AB ， CD 与 BC ， AD 之间的数量

关系_____；并给出证明。

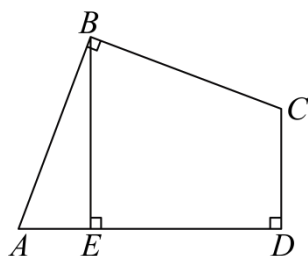
(3) 问题解决：如图 2，分别以 $Rt\triangle ABC$ 的直角边 AC 和斜边 AB 为边向外作正方形 $ACFG$ 和正方形 $ABDE$ ，

连接 CE ， BG ， GE ，已知 $AC = 3$ ， $AB = 5$ ，求 GE 的长。

题型 05 对角互补模型

【典例 1】如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ ， $BE \perp AD$ 于 E ， $S_{\text{四边形}ABCD} = 10$ ，则 BE

的长为_____



【变式1】 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ，点 O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，而且这两个正方形的边长都为 2，四边形 $OEBF$ 为两个正方形重叠部分，正方形 $A_1B_1C_1O$ 可绕点 O 转动。

【变式2】 【问题发现】

(1) ①如图 1，求证： $\triangle AEO \cong \triangle BFO$ ；

②如图 1，四边形 $OEBF$ 的面积为_____；线段 AE ， CF ， EF 之间的数量关系是_____；

背景：“对角互补”是经典的四边形模型，常通过旋转构造全等三角形解决问题；若问题中出现特殊角度

(如 30° ， 45° ， 60°)，则会结合等腰直角三角形或等边三角形等特殊的三角形的知识考查学生的学习情

况。

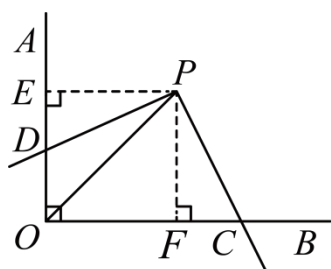


图1

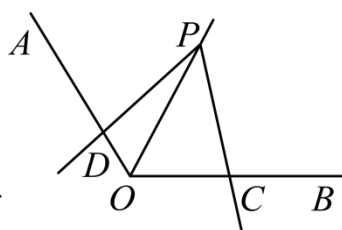


图2

(1) 如图 1， $\angle AOB = \angle CPD = 90^\circ$ ， OP 平分 $\angle AOB$ ，过点 P 作 $PE \perp OA$ ， $PF \perp OB$ ，得正方形 $OFPE$ 。若

$OD = 1$ ， $OC = 3$ ，则 $OP =$ _____；

(2)如图 2, $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle CPD = 60^\circ$, OP 平分 $\angle AOB$, 过点 P 作 $PE \perp OA$, $PF \perp OB$, 连接 EF .

① $\triangle PEF$ 是——三角形;

②若 $OD = 2$, $OC = 5$, 求 EF 的长.

【变式 3】 我们规定：一组邻边相等且对角互补的四边形叫做“完美四边形”.

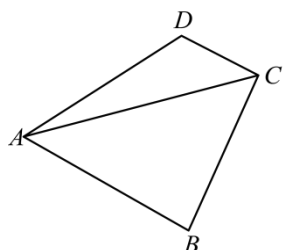


图1

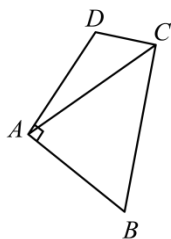


图2

(1)在①平行四边形, ②菱形, ③矩形, ④正方形中, 一定为“完美”四边形的是 ____ (请填序号);

(2)在“完美”四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, 连接 AC .

①如图 1, 求证: AC 平分 $\angle BCD$;

小明通过观察、实验, 提出以下两种想法, 证明 AC 平分 $\angle BCD$:

想法一: 通过 $\angle B + \angle D = 180^\circ$, 可延长 CB 到 E , 使 $BE = CD$, 通过证明 $\triangle AEB \cong \triangle ACD$, 从而可证 AC 平分 $\angle BCD$;

想法二: 通过 $AB = AD$, 可将 $\triangle ACD$ 绕点 A 顺时针旋转, 使 AD 与 AB 重合, 得到 $\triangle AEB$, 可证 C, B, E 三点在一条直线上, 从而可证 AC 平分 $\angle BCD$.

请你参考上面的想法, 帮助小明证明 AC 平分 $\angle BCD$;

②如图2，当 $\angle BAD = 90^\circ$ ，用等式表示线段 AC ， BC ， CD 之间的数量关系，并证明．

【变式4】回答问题：

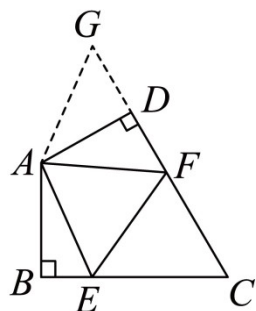


图1

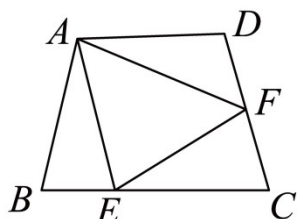


图2

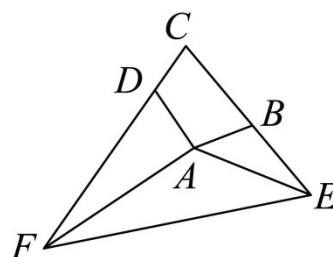


图3

(1) 【初步探索】如图1：在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD, \angle B = \angle ADC = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点，

且 $EF = BE + FD$ ，探究图中 $\angle BAE$ 、 $\angle FAD$ 、 $\angle EAF$ 之间的数量关系．小王同学探究此问题的方法是：延

长 FD 到点 G ，使 $DG = BE$ ．连接 AG ，先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$ ，再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ ，可得出结论，他

的结论应是_；

(2) 【灵活运用】如图2，若在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD, \angle B + \angle D = 180^\circ$ ． E 、 F 分别是 BC 、 CD 上的点，

且 $EF = BE + FD$ ，上述结论是否仍然成立，并说明理由；

(3) 【拓展延伸】如图3，已知在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ, AB = AD$ ，若点 E 在 CB 的延长线

上，点 F 在 CD 的延长线上，如图3所示，仍然满足 $EF = BE + FD$ ，请写出 $\angle EAF$ 与 $\angle DAB$ 的数量关系，

并给出证明过程．

题型强练

1. 【问题情境】

如图¹，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，且 $AE \perp BF$ ，垂足为 M 。那么 AE 与 BF 相等吗？

(1) 直接判断： AE _____ BF (填“=”或“≠”)；

在“问题情境”的基础上，继续探索：

【问题探究】：

(2) 如图²，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 、 G 分别在边 BC 、 CD 和 DA 上，且 $GE \perp BF$ ，垂足为 M 。那么 GE 与 BF 相等吗？证明你的结论：

【问题拓展】：

(3) 如图³，将边长为40cm的正方形 $ABCD$ 折叠，使得点 D 落在 BC 上的点 E 处。若折痕 FG 的长为41cm，则 CE = _____ cm。

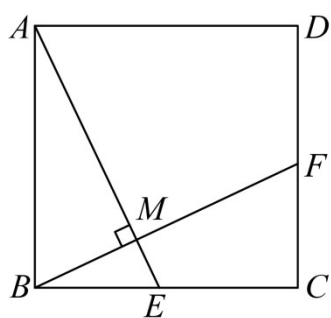


图 1

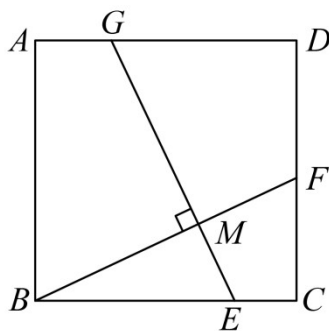


图 2

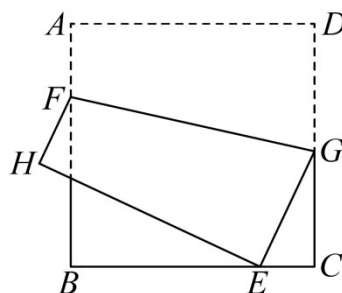


图 3

2. 如图¹，在正方形 $ABCD$ 中， E 为 BC 上一点，连接 AE ，过点 B 作 $BG \perp AE$ 于点 H ，交 CD 于点 G 。

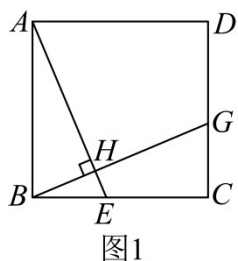


图1

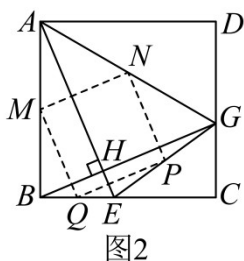


图2

(1) 求证： $AE = BG$ ；

(2) 如图²，连接 AG 、 GE ，点 M 、 N 、 P 、 Q 分别是 AB 、 AG 、 GE 、 EB 的中点，试判断四边形 $MNPQ$ 的形状，并说明理由；

3. 通过类比联想，引申拓展研究典型题目，可达到解一题知一类的目的，下面是一个案例，请补充完整。

原题：如图¹，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上， $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系。

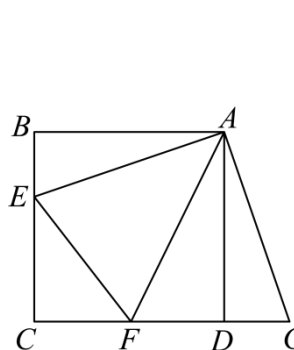


图1

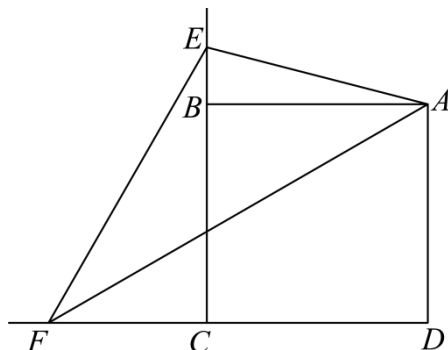


图2

(1) 把 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ADG$ ，可使 AB 与 AD 重合，由 $\angle ADG = \angle B = 90^\circ$ ，得，

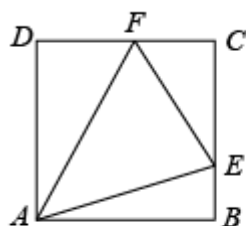
$\angle FDG = 180^\circ$ ，即点 F 、 D 、 G 共线，易证 $\triangle AFG \cong$ _____，故 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为

_____。

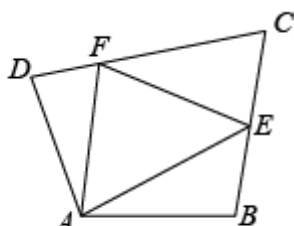
(2) 如图 2，点 E 、 F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 CB 、 CD 的延长线上， $\angle EAF = 45^\circ$ 。连接 EF ，试猜想 EF 、 BE 、 DF 之间的数量关系为 _____，并给出证明。

4. (1) 如图①，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是 BC 、 DC 上的点，且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，探究 BE 、 DF 、 EF 之间的数量关系，并说明理由；

(2) 如图②，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， E 、 F 分别是 BC 、 DC 上的点，且 $\angle EAF = \frac{1}{2} \angle BAD$ ，此时 (1) 中的结论是否仍然成立？请说明理由。



图①



图②

5. 综合与实践：如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC ，点 O 是 AC 的中点，点 E 是线段 OA 上任意一点（不与点 A ， O 重合），连接 DE ， BE 。过点 E 作 $EF \perp DE$ 交直线 BC 于点 F 。

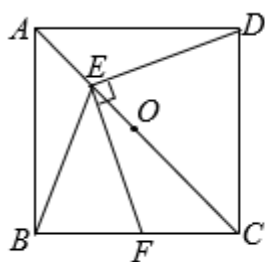


图1

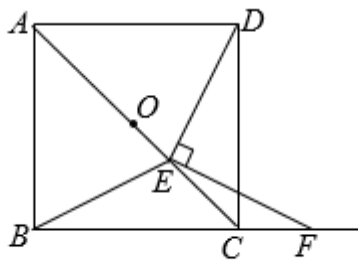
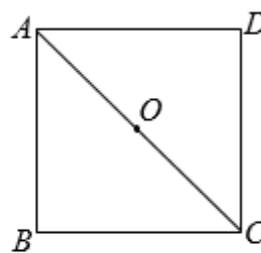


图2



备用图

(1) 试猜想线段 DE 与 EF 的数量关系，并说明理由；

(2) 试猜想线段 CE, CD, CF 之间的数量关系，并说明理由；

(3) 如图 2，当 E 在线段 CO 上时（不与点 C, O 重合）， EF 交 BC 延长线于点 F ，保持其余条件不变，

直接写出线段 CE, CD, CF 之间的数量关系。

6. 已知四边形 $ABCD$ 为菱形， E 是射线 BD 上的一个动点， $BE = a$ 。连接 CE ，将线段 CE 绕点 C 顺时针

旋转得到线段 CF ，旋转角 $\angle ECF = \angle A$ 。

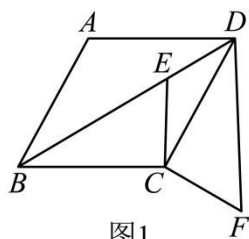


图1

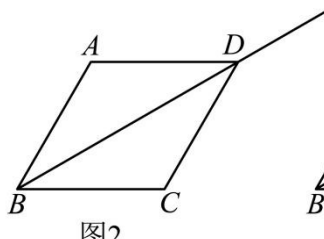
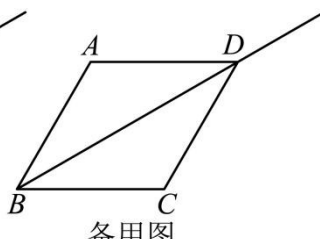


图2

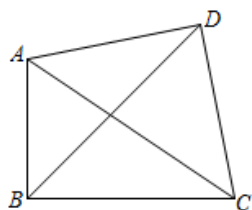


备用图

(1) 如图 1，若点 E 在线段 BD 上，连接 DF ，求证 $DF = BE$ ；

(2) 如图 2，若 $\angle A = 120^\circ$ ，点 F 恰好在边 BC 的延长线上，求 BF 的长（用含 a 的式子表示）；

7. 已知： $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, AD = DC$ ，求证： $BC + AB = \sqrt{2}BD$ 。



8. M 放在 $\triangle ACB$ 的斜边 AB 的中点处，设 $AC = BC = 4$.

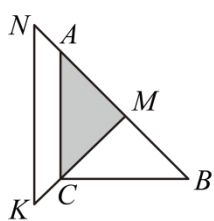


图1

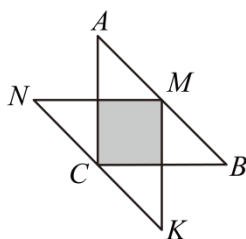


图2

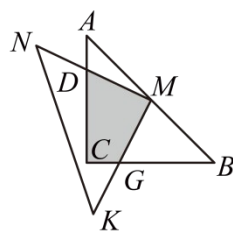


图3

(1) 如图 1 所示，两三角尺的重叠部分为 $\triangle ACM$ ，则重叠部分的面积为——，周长为——。

(2) 将如图 1 所示中的 $\triangle MNK$ 绕顶点 M 逆时针旋转 45° ，得到如图 2 所示，此时重叠部分的面积为——，周长为——。

(3) 如果将 $\triangle MNK$ 绕 M 旋转到不同于如图 1 所示和如图 2 所示的图形，如图 3 所示，请你猜想此时重叠部分的面积为——。

(4) 在如图 3 所示情况下，若 $AD = 1$ ，求出重叠部分图形的周长。