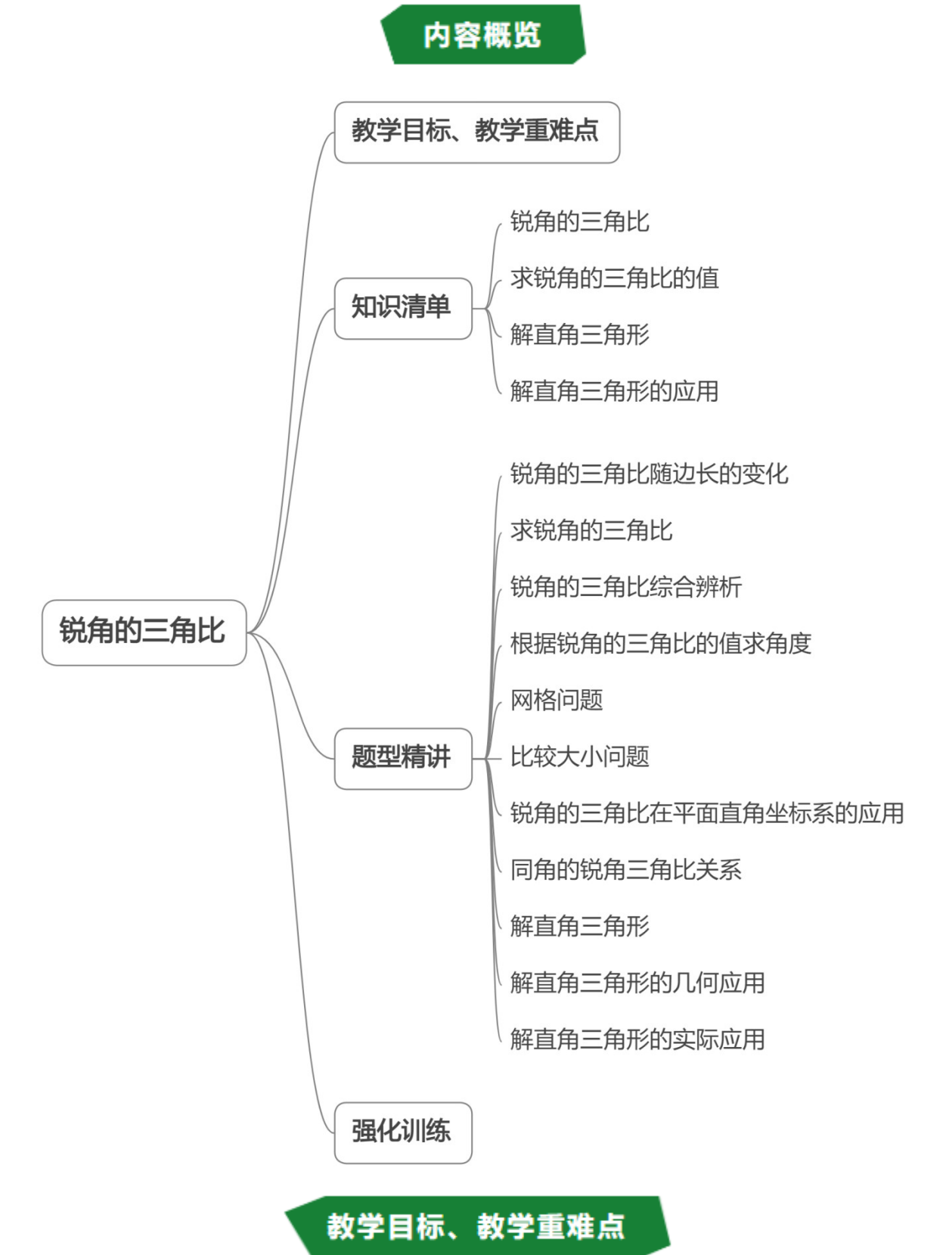


第 25 章 锐角的三角比



教学目标	1. 理解锐角三角比的几何意义；
------	------------------

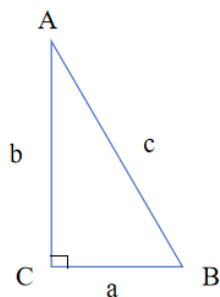
	2. 会求一个锐角的锐角三角比及特殊角的锐角三角比的值； 3. 知道如何解直角三角形，及常用构建的直角三角形模型； 4. 学会在实际问题中构建直角三角形模型来解决。
教学重难点	1.重点 (1) 探索锐角的三角比的意义；会求特殊锐角的三角比的值； (2) 解直角三角形； (3) 解直角三角形的应用； 2.难点 (1) 解直角三角形的几何应用； (2) 边角互化的重要性；

知识清单

知识点 1 锐角的三角比

一、锐角的三角比

如图,在 $Rt\triangle ABC$ 中 ($\angle C=90^\circ$),当锐角 A 的大小确定后,不论 $Rt\triangle ABC$ 的边长怎样变化,



我们把直角三角形中一个锐角的对边与邻边的比叫做这个锐角的正弦.锐角 A 的正切记作 $\tan A$,

$$\tan A = \frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{锐角}A\text{的邻边}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

同理,

我们把直角三角形中一个锐角的邻边与对边的比叫做这个锐角的余弦.锐角 A 的余切记作 $\cot A$,

$$\cot A = \frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{锐角}A\text{的对边}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

我们把直角三角形中一个锐角的对边与斜边的比叫做这个锐角的正弦.锐角 A 的正弦记作 $\sin A$,

$$\sin A = \frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{斜边}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

同理,

我们把直角三角形中一个锐角的邻边与斜边的比叫做这个锐角的余弦.锐角 A 的余弦记作 $\cos A$,

$$\cos A = \frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

二、锐角三角比的值的关系、比值范围

1. 由正切、余切的意义可以得到，

$$\tan A = \frac{1}{\cot A}$$

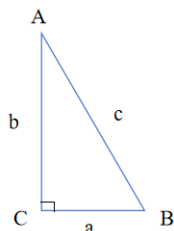
2. 一个锐角的正切、余切、正弦、余弦统称为这个锐角的三角比

3. 任何一个锐角的三角比的值都是正实数，其中正弦和余弦的值小于 1(为什么?).

$$0 < \sin A < 1, 0 < \cos A < 1.$$

提示：我们可以画一个三角形，已知 $\angle C = 90^\circ$ ，当锐角 A 无限接近 90° 时，a 无限接近 c，b 无限接近 0；

当锐角 A 无限接近 0° 时，b 无限接近 c，a 无限接近 0



4. 锐角 A 的三角比 $\tan A$ 、 $\cot A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ 中，

$$\tan A > 0, \cot A > 0; 0 < \sin A < 1, 0 < \cos A < 1.$$

【即学即练】

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，那么锐角 A 的正弦等于 ()

- A. $\frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{锐角}A\text{的邻边}}$ B. $\frac{\text{锐角}A\text{的对边}}{\text{斜边}}$ C. $\frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$ D. $\frac{\text{锐角}A\text{的邻边}}{\text{锐角}A\text{的对边}}$

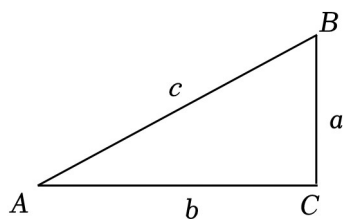
2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，如果 $\angle C = 90^\circ$ ，那么 $\frac{AC}{BC}$ 表示 $\angle A$ 的 ()

- A. 正弦 B. 正切 C. 余弦 D. 余切

3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，如果各边长都缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ ，那么 $\angle A$ 的正弦值 ()

- A. 扩大为原来的 2 倍 B. 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$
C. 大小不变 D. 不能确定

4. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，a，b，c 分别是 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 的对边，则下列式子正确的是 ()



A. $\cos A = \frac{a}{b}$ B. $\cos A = \frac{a}{c}$ C. $\tan A = \frac{a}{c}$ D. $\tan A = \frac{a}{b}$

知识点 2 求锐角的三角比的值

一、特殊角的锐角三角比的值

利用三角比的定义，列出特殊锐角的三角比的值，如下表：

α	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

二、锐角三角比之间的关系

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ 。

(1) 互余关系： $\sin A = \cos(90^\circ - \angle A) = \cos B$ ， $\cos A = \sin(90^\circ - \angle A) = \sin B$ ；
 $\tan A = \cot(90^\circ - \angle A) = \cot B$ ， $\tan B = \cot(90^\circ - \angle B) = \cot A$ 。

(2) 平方关系： $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ；

(3) 倒数关系： $\tan A \cdot \tan(90^\circ - \angle A) = 1$ 或 $\tan A = \frac{1}{\tan B}$ ；
 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ ， $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

(4) 商的关系：

【即学即练】

1. 计算： $\cos^2 45^\circ - \frac{\tan 60^\circ}{2\sin 30^\circ + 1} + |\cot 45^\circ - \cot 30^\circ|$ 。

2. 计算： $|\cos 45^\circ - 1| + 2\sin 60^\circ - \sqrt{2}(\tan 15^\circ)^0 - (\cot 60^\circ)^{-1}$ 。

3. 已知实数 $a = \tan 30^\circ$ ， $b = \cos 60^\circ$ ， $c = \sin 45^\circ$ ，则下列判断正确的是 ()

A. $b > a > c$

B. $c > a > b$

C. $b > c > a$

D. $a > c > b$

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，则 $\tan A$ 的值为_____。

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 、 $\angle C$ 都是锐角，且 $\left| \sin C - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin B \right)^2 = 0$ ，则 $\angle A$ 的度数为 ()
- A. 120° B. 100° C. 90° D. 60°

知识点 3 解直角三角形

一、解直角三角形

在直角三角形中，由已知元素(直角除外)求未知元素的过程，叫做解直角三角形.

在直角三角形中，除直角外，一共有 5 个元素，即三条边和两个锐角.

设在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别为 a 、 b 、 c ，则有：

①三边之间的关系： $a^2+b^2=c^2$ (勾股定理).

②锐角之间的关系： $\angle A+\angle B=90^\circ$.

③边角之间的关系：

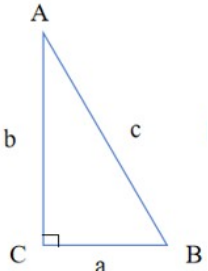
$$\sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}, \tan A = \frac{a}{b}, \cot A = \frac{b}{a}$$

$$\sin B = \frac{b}{c}, \cos B = \frac{a}{c}, \tan B = \frac{b}{a}, \cot B = \frac{a}{b}$$

$$\textcircled{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch, \text{ h 为斜边上的高.}$$

二、解直角三角形的常见类型及解法

	已知条件		解法步骤
Rt $\triangle ABC$	两边	两直角边(a, b)	$\tan A = \frac{a}{b}$ 由 求 $\angle A$ $\angle B = 90^\circ - \angle A$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
		一直角边，斜边(a, c)	$\sin A = \frac{a}{c}$ 由 求 $\angle A$

				$\angle B = 90^\circ - \angle A$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
	一边一角	一直角边 和一锐角	一个锐角及其邻边 (如 $\angle A$, b)	$\angle B = 90^\circ - \angle A$ $a = b \cdot \tan A$ $c = \frac{b}{\cos A}$
			一个锐角及其对边 (如 $\angle A$, a)	$\angle B = 90^\circ - \angle A$ $c = \frac{a}{\sin A}$ $b = \frac{a}{\tan A}$;
		一个锐角、斜边(如 $\angle A$, c)		$\angle B = 90^\circ - \angle A$ $a = c \cdot \sin A$ $b = c \cdot \cos A$

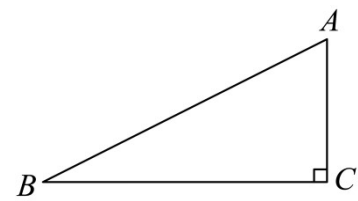
【即学即练】

1 . 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $\angle C = 90^\circ$.

(1)已知 $c = 25$, $b = 15$, 求 a 的值 ;

(2)已知 $a = 12$, $\angle A = 60^\circ$, 求 b 、 c 的值 .

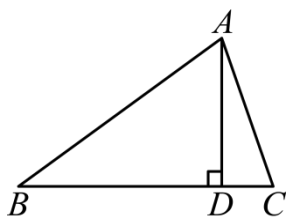
2 . 如图 , 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $\angle C = 90^\circ$, $AC = 2$, $\tan B = \frac{1}{2}$.



(1)求 BC 的长 ;

(2)求 $\cos A$ 的值 .

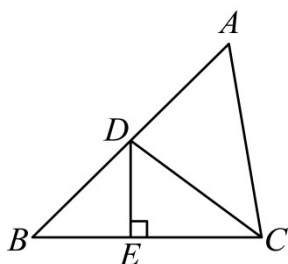
3. 如图, 已知在锐角三角形 ABC 中, $AD \perp BC$, $AB = AC = 5$, $\sin B = \frac{3}{5}$.



(1)求 AD , BD , DC 的长 .

(2) $\cos C$ 的值为_____ .

4. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, CD 是 AB 边上的中线, 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为 E , 若 $CD = 5$, $\sin \angle BCD = \frac{3}{5}$.



(1)求 BC 的长 ;

(2)求 $\angle ACB$ 的正切值 .

知识点 4 解直角三角形的应用

解直角三角形的知识应用很广泛, 关键是把实际问题转化为数学模型, 善于将某些实际问题中的数量关系化归为直角三角形中的边角关系是解决实际应用问题的关键.

解这类问题的一般过程是 :

- (1)弄清题中名词、术语的意义, 如仰角、俯角、坡度、坡角、方向角等概念, 然后根据题意画出几何图形, 建立数学模型.
- (2)将已知条件转化为几何图形中的边、角或它们之间的关系, 把实际问题转化为解直角三角形的问题.
- (3)根据直角三角形(或通过作垂线构造直角三角形)元素(边、角)之间的关系解有关的直角三角形.
- (4)得出数学问题的答案并检验答案是否符合实际意义, 得出实际问题的解.

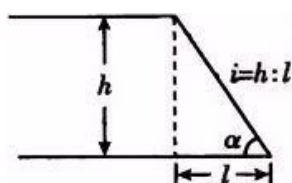
应用举例 :

在用直角三角形知识解决实际问题时, 经常会用到以下概念 :

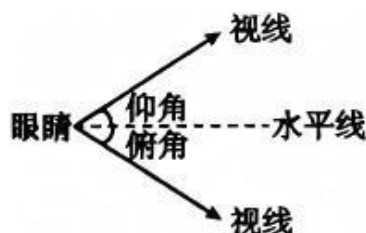
(1)坡角: 坡面与水平面的夹角叫做坡角, 用字母 α 表示.

坡度(坡比): 坡面的铅直高度 h 和水平距离 l 的比叫做坡度, 用字母 i 表示, 则 $i = \frac{h}{l} = \tan \alpha$, 如图, 坡度

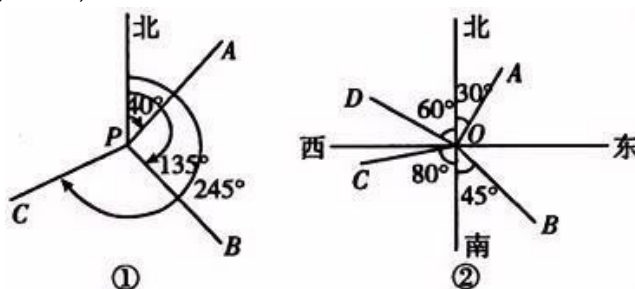
通常写成 $i=h:l$ 的形式.



(2)仰角、俯角：视线与水平线所成的角中，视线中水平线上方的叫做仰角，在水平线下方的叫做俯角，如图.



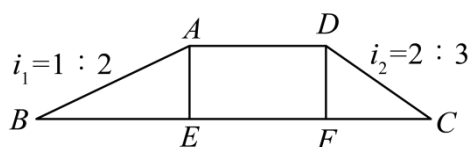
(3)方位角：从某点的指北方向线按顺时针转到目标方向的水平角叫做方位角，如图①中，目标方向 PA ， PB ， PC 的方位角分别为是 40° ， 135° ， 245° .



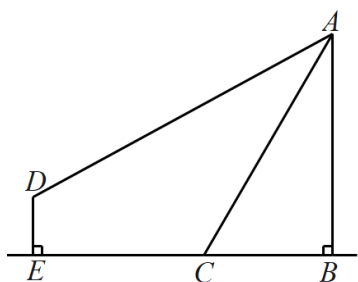
(4)方向角：指北或指南方向线与目标方向线所成的小于 90° 的水平角，叫做方向角，如图②中的目标方向线 OA ， OB ， OC ， OD 的方向角分别表示北偏东 30° ，南偏东 45° ，南偏西 80° ，北偏西 60° . 特别地：东南方向指的是南偏东 45° ，东北方向指的是北偏东 45° ，西南方向指的是南偏西 45° ，西北方向指的是北偏西 45° .

【即学即练】

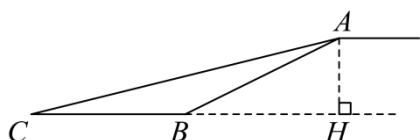
1. 如图，梯形 $ABCD$ 是某水库大坝的横断面，其坝顶宽 5 米，坝底宽 33 米，坝的迎水坡度是 $i_1=1:2$ ，背水坡的坡度 $i_2=2:3$ ，求：水坝横截面的面积.



2. 如图，小明想测量河对岸的一幢高楼 AB 的高度，小明在河边 C 处测得楼顶 A 的仰角是 60° . 距 C 处 60 米的 E 处有幢楼房，小明从该楼房中距地面 20 米的 D 处测得楼顶 A 的仰角是 30° (点 B 、 C 、 E 在同一直线上，且 AB 、 DE 均与地面 BE 垂直). 求楼 AB 的高度.



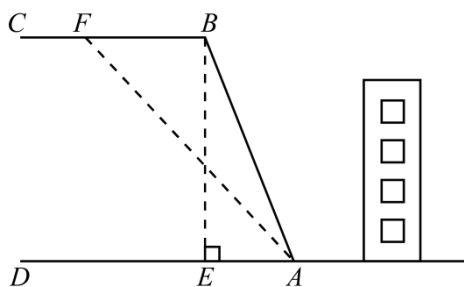
3. 如图，某地下车库的入口处有斜坡 AB ，它的坡度为 $i=1:2$ ，斜坡 AB 的长为 $6\sqrt{5}\text{m}$ ，斜坡的高度为 AH ($AH \perp BC$)，为了让行车更安全，现将斜坡的坡角改造为 14° (图中的 $\angle ACB = 14^\circ$)。



(1) 求车库的高度 AH ；

(2) 求点 B 与点 C 之间的距离 (结果精确到 1m ，参考数据： $\sin 14^\circ \approx 0.24$ ， $\cos 14^\circ \approx 0.97$ ， $\tan 14^\circ \approx 0.25$)。

4. 如图，山区某教学楼后面紧邻着一个土坡，坡面 BC 平行于地面 AD ，斜坡 AB 的坡比为 $i = 1 : \frac{5}{12}$ ，且 $AB = 26$ 米。为了防止山体滑坡，保障安全，学校决定对该土坡进行改造。经地质人员勘测，当坡角不超过 53° 时，可确保山体不滑坡。



(1) 求改造前坡顶与地面的距离 BE 的长。

(2) 为了消除安全隐患，学校计划将斜坡 AB 改造成 AF (如图所示)，那么 BF 至少是多少米？(结果精确到 1 米)

(参考数据： $\sin 53^\circ \approx 0.8$ ， $\cos 53^\circ \approx 0.6$ ， $\tan 53^\circ \approx 1.33$ ， $\cot 53^\circ \approx 0.75$)。

题型精讲

题型 01 锐角的三角比随边长的变化

【典例 1】. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若 $\triangle ABC$ 的三边都缩小 5 倍, 则 $\sin A$ 的值 ()

- A. 放大 5 倍 B. 缩小 5 倍 C. 不变 D. 无法确定

【变式 1】. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 各边的长度都缩小 4 倍, 那么锐角 A 的余切值 ()

- A. 扩大 4 倍 B. 保持不变 C. 缩小 2 倍 D. 缩小 4 倍

【变式 2】. 如果 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的各边长都缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 那么锐角 A 的正弦、余弦值是 ()

- A. 都扩大为原来的 2 倍 B. 都缩小为原来的 $\frac{1}{2}$
C. 没有变化 D. 不能确定

题型 02 求锐角的三角比

【典例 1】. 如果 $\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$, 那么 $\frac{BC}{AB} =$ _____ (填 $\angle B$ 的三角比)

【变式 1】. 已知三角形三边长为 3、4、5, 则最小角的正弦是_____.

【变式 2】. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$, $AC = 5$, 那么 $\cot B$ 等于 ()

- A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{5}{12}$

【变式 3】. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 那么 $\cot A$ 等于 ()

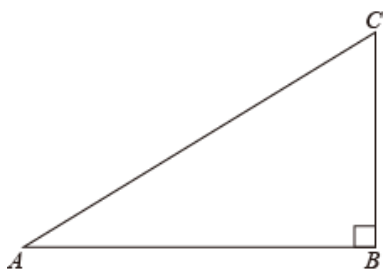
- A. $\frac{AC}{BC}$ B. $\frac{AC}{AB}$ C. $\frac{BC}{AC}$ D. $\frac{BC}{AB}$

【变式 4】. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$, 那么 $\tan A$ 的值是 ()

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

题型 03 锐角的三角比综合辨析

【典例 1】. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 下列结论中正确的是 ()

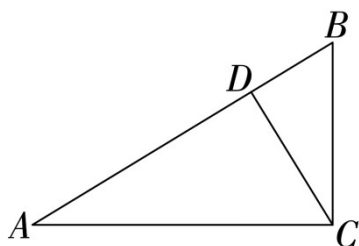


- A. $\sin A = \frac{BC}{AB}$ B. $\cos A = \frac{BC}{AC}$ C. $\tan C = \frac{AB}{BC}$ D. $\cos C = \frac{AC}{BC}$

【变式1】 . 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， a 、 b 、 c 分别为 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边，下列各式成立的是 ()

- A . $\sin B = \frac{a}{c}$ B . $\cos B = \frac{b}{c}$ C . $\tan B = \frac{a}{b}$ D . $\tan B = \frac{b}{a}$

【变式2】 . 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 是斜边 AB 上的高， $\angle A \neq 45^\circ$ ，则下列比值中不等于 $\cos B$ 的是 ()



- A . $\frac{CD}{AC}$ B . $\frac{BD}{CB}$ C . $\frac{CD}{CB}$ D . $\frac{CB}{AB}$

题型 04 根据锐角的三角比的值求角度

【典例1】 . 已知 α 为锐角，且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 α 的度数为 ()

- A . 30° B . 45° C . 60° D . 75°

【变式1】 . 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{1}{2}$ ，那么 $\angle A$ 的度数是 ()

- A . 30° B . 45° C . 60° D . 90°

【变式2】 . 若 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则锐角 $\angle A = \underline{\quad}^\circ$.

【变式3】 . 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle C$ 都是锐角，若 $\left| \frac{1}{2} - \sin A \right| + \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A . 锐角三角形 B . 直角三角形 C . 等腰三角形 D . 等边三角形

【变式4】 . 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 、 $\angle C$ 都是锐角，且 $\left| \sin C - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin B \right)^2 = 0$ ，则 $\angle A$ 的度数为 ()

- A . 120° B . 100° C . 90° D . 60°

【变式5】 . 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\left| \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| + \sqrt{\tan B - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 0$ ，则 $\angle C$ 的度数为 ()

A . 90°

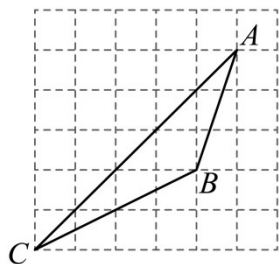
B . 60°

C . 120°

D . 75°

题型 05 网格问题

【典例 1】 . 如图， $\triangle ABC$ 的三个顶点都在正方形网格的格点上，那么 $\angle A$ 的正切值是 ()



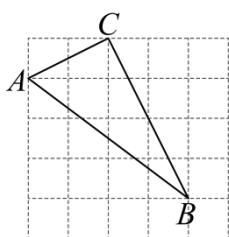
A . $2\sqrt{5}$

B . $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C . $\frac{1}{2}$

D . 2

【变式 1】 . 如图，网格中小正方形的边长均为 1， $\triangle ABC$ 的顶点都在格点上，则 $\tan \angle BAC$ 等于 ()



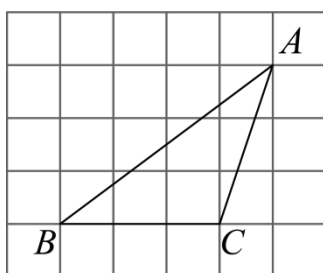
A . 2

B . $\frac{1}{2}$

C . $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D . $\frac{\sqrt{10}}{2}$

【变式 2】 . 如图， $\triangle ABC$ 的顶点在 5×6 网格图的格点上， $\cos B$ 的值为 ()



A . $\frac{4}{5}$

B . $\frac{3}{5}$

C . $\frac{3}{4}$

D . $\frac{4}{3}$

题型 06 比较大小问题

【典例 1】 . 比较 $\tan 52^\circ$ ， $\cos 21^\circ$ ， $\sin 49^\circ$ 的大小关系是 ()

A . $\tan 52^\circ < \cos 21^\circ < \sin 49^\circ$

B . $\tan 52^\circ < \sin 49^\circ < \cos 21^\circ$

C . $\sin 49^\circ < \tan 52^\circ < \cos 21^\circ$

D . $\sin 49^\circ < \cos 21^\circ < \tan 52^\circ$

【变式1】. 若 $a = \cos 20^\circ$, $b = \sin 40^\circ$, $c = \cos 80^\circ$, 则 ()

- A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

题型 07 锐角的三角比在平面直角坐标系的应用

【典例1】. 点 $M(-\sin 60^\circ, \cos 60^\circ)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是 ()

- A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【变式1】. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(2, 1)$ 与原点 O 的连线与 x 轴的正半轴的夹角为 β , 那么 $\tan \beta$ 的值是 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\sqrt{5}$

【变式2】. 在直角坐标平面的第一象限内有一点 $A(a, b)$, 如果射线 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 α , 那么下列各式正确的是 ()

- A. $b = a \cdot \tan \alpha$ B. $b = a \cdot \cot \alpha$
C. $b = a \cdot \sin \alpha$ D. $b = a \cdot \cos \alpha$

题型 08 同角的锐角三角比关系

【典例1】. 如果 $0^\circ < \angle A < 60^\circ$, 那么 $\sin A$ 与 $\cos A$ 的差 () .

- A. 大于0 B. 小于0 C. 等于0 D. 不能确定

【变式1】. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 则 $\sin A + \cos A$ 的值 ()

- A. 大于1 B. 等于1 C. 小于1 D. 不确定, 与 $\angle A$ 的值有关

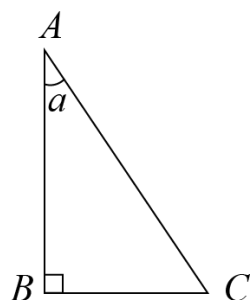
题型 09 解直角三角形

【典例1】. 已知, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 9$, $\tan A = \frac{3}{4}$. 求:

(1) AB 的长;

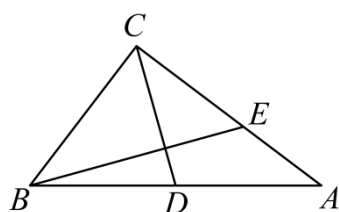
(2) $\tan B$ 的值.

【变式1】. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $\angle A = \alpha$, $BC = a$, 那么 AC 的长是 ()



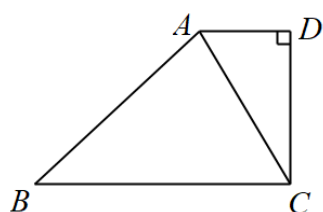
- A. $a \cdot \tan \alpha$ B. $a \cdot \cot \alpha$ C. $\frac{a}{\cos \alpha}$ D. $\frac{a}{\sin \alpha}$

【变式2】 . 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $\tan A = \frac{3}{4}$ ， CD 是中线，作 $BE \perp CD$ ，交边 AC 于点 E .



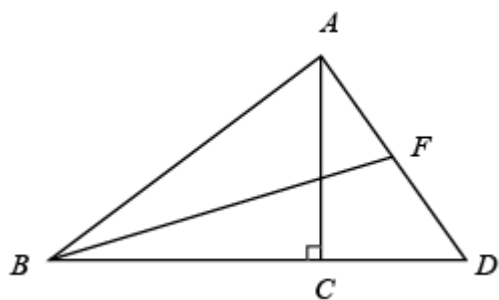
- (1) 求 CE 的长；
 (2) 求 $\angle EBA$ 的正切值 .

【变式3】 . 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp CD$ ， $AD = 1$ ， $CD = 2$.



- (1) 如果 $BC = 3$ ，求 $\cot B$ 的值；
 (2) 如果 $AB = BC$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积 .

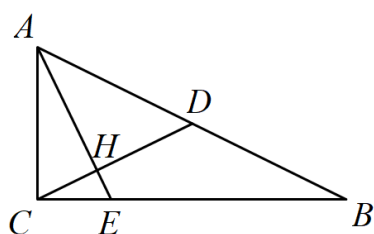
【变式4】 . 已知在 $\triangle ABD$ 中， $AC \perp BD$ ， $BC = 8$ ， $CD = 4$ ， $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}$ ， BF 为 AD 边上的中线 .



(1) 求 AC 的长；

(2) 求 $\tan \angle FBD$ 的值。

【变式5】 . 如图5, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle CAB > \angle B$, CD 是斜边 AB 上的中线, 过点 A 作 $\angle CAE=\angle B$, 交 BC 于点 E , 交 CD 于点 H , 且 $AH=2CH$.

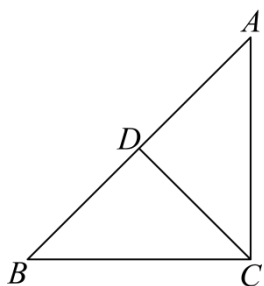


(1) 求 $\sin B$ 的值；

(2) 当 $CD=\sqrt{5}$ 时, 求 BE 的长。

题型10 解直角三角形的几何应用

【典例1】 . 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, CD 是斜边 AB 上的中线, 已知 $CD=2$, $AC=3$, 则 $\sin B$ 的值是 () .



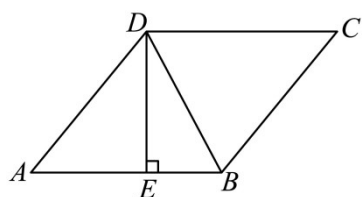
A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

【变式1】 . 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $DE \perp AB$, $\cos A = \frac{3}{5}$, $BE=2$, 则 $\tan \angle DBE$ 的值是 ()



- A. 2 B. $\frac{12}{7}$ C. $\frac{12}{7}$ 或 2 D. $\frac{12}{5}$ 或 2

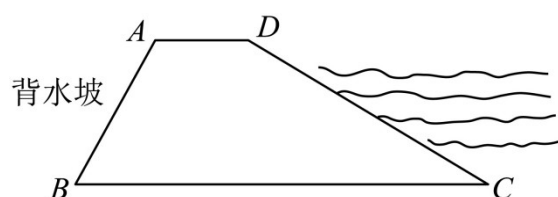
【变式 2】 . 在 $\triangle ABC$ 中， 如果 $AB = AC = 10, \cos B = \frac{4}{5}$ ， 那么 $\triangle ABC$ 的重心到顶点 A 的距离为 _____ .

题型 11 解直角三角形的实际应用

【典例 1】 . 已知一坡面的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$ ， 则坡角 α 为 ()

- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

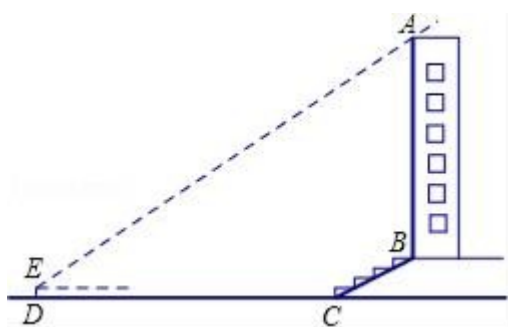
【变式 1】 . 如图为一大坝的横截面图， $AD \parallel BC$ ， 背水坡 AB 的坡度为 $\sqrt{3} : 1$ ， 迎水坡的坡角为 30° ， 若 $AD = 4$ 米， 坝高为 $4\sqrt{3}$ 米， 则坡底 BC 长为 () 米 .



- A. 17 B. 18 C. 19 D. 20

【变式 2】 . 某校兴趣小组想测量一座大楼 AB 的高度 . 如图， 大楼前有一段斜坡 BC ， 已知 BC 的长为 12 米， 它的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$. 在离 C 点 40 米的 D 处， 用测角仪测得大楼顶端 A 的仰角为 37° ， 测角仪 DE 的高为 1.5 米， 求大楼 AB 的高度约为多少米？ (结果精确到 0.1 米)

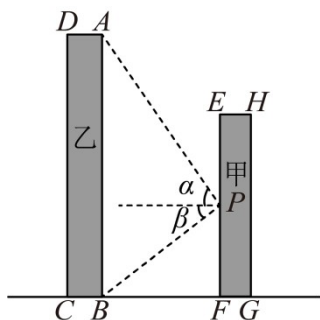
(参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$.)



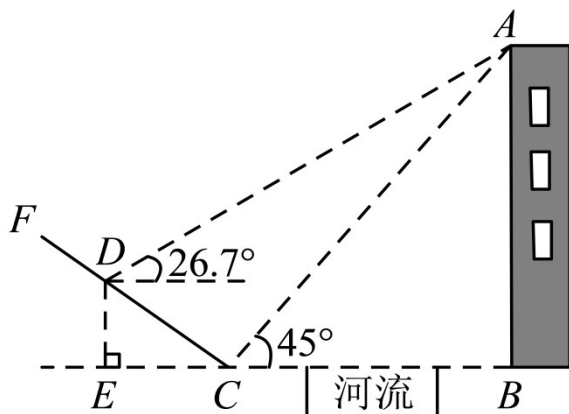
【变式 3】 . 小乐同学家住大楼甲中， 某个周末， 他站在阳台眺望远方， 当看到正对面的大楼乙时， 陷入了思考： 对面的大楼乙有多高？ 于是小乐做了一个简易的测角仪用来观测大楼乙的顶端与底端 . 如图， 小

乐家在点 P 处，当他抬头观察大楼乙的顶端 A 时，记其仰角为 α ，观测大楼乙的底端 B 时，记其俯角为 β ，

整理所测数据： $\alpha = 60^\circ$ ， $\tan \beta = \frac{3}{4}$ 。已知甲、乙两栋大楼的间距为 48m 。请根据题目数据帮助小乐计算出大楼乙的高度。（图中所有点都在同一个平面内， $AB \perp CG$ ， $EF \perp CG$ ，结果保留根号）



【变式 4】 如图，在河流的右岸边有一高楼 AB ，左岸边有一坡度 $i = 1:2$ 的山坡 CF ，点 C 与点 B 在同一水平面上， CF 与 AB 在同一平面内。某数学兴趣小组为了测量楼 AB 的高度，在坡底 C 处测得楼顶 A 的仰角为 45° ，然后沿坡面 CF 上行了 $20\sqrt{5}$ 米（即 $CD = 20\sqrt{5}$ 米）到达点 D 处，此时在 D 处测得楼顶 A 的仰角为 26.7° 。（参考数据： $\sin 26.7^\circ \approx 0.45$ ， $\cos 26.7^\circ \approx 0.89$ ， $\tan 26.7^\circ \approx 0.5$ ）



(1) 求点 C 到点 D 的水平距离 CE 的长；

(2) 求楼 AB 的高度。

强化训练

一、单选题

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，如果各边长都缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ ，那么 $\angle A$ 的正弦值（ ）

A. 扩大为原来的 2 倍

B. 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$

C. 大小不变

D. 不能确定

 2. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于点 D , 下列式子表示 $\sin B$ 错误的是 ()

A. $\frac{CD}{BC}$

B. $\frac{AC}{AB}$

C. $\frac{AD}{AC}$

D. $\frac{CD}{AC}$

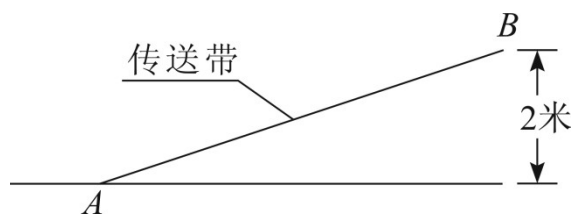
 3. 已知 α 为锐角, 且 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, 那么 α 的正切值为 ()

A. $\frac{5}{12}$

B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{5}{13}$

D. $\frac{12}{13}$

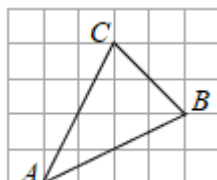
 4. 如图, 传送带和地面所成斜坡的坡度为 $1:3$, 若它把物体从地面点 A 处送到离地面 2 米高的 B 处, 则物体从 A 到 B 所经过的路程为 ()


A. 6 米

B. $\sqrt{10}$ 米

C. $2\sqrt{10}$ 米

D. $3\sqrt{10}$ 米

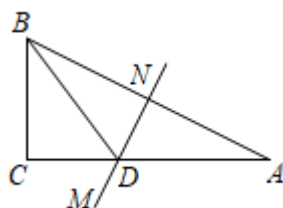
 5. 如图所示, 网格中的每个小正方形的边长都是 1, $\triangle ABC$ 的顶点都在网格的交点处, 则 $\angle ABC$ 的正弦值为 ()


A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

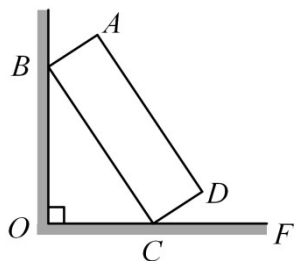
C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

 6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8\text{cm}$, AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于 D , 连接 BD , 若 $\cos \angle BDC = \frac{3}{5}$, 则 BC 的长是 ()


- A . 4cm B . 6cm C . 8cm D . 10cm

7. 如图，一块矩形木板 $ABCD$ 斜靠在墙边，（ $OC \perp OB$ ，点 A 、 B 、 C 、 D 、 O 在同一平面内），已知 $AB = a$ ， $AD = b$ ， $\angle DCF = x$ ，则点 A 到 OC 的距离等于（ ）



- A . $a \sin x + b \sin x$ B . $a \cos x + b \cos x$ C . $a \sin x + b \cos x$ D . $a \cos x + b \sin x$

8. 将图 1 所示的七巧板，拼成图 2 所示的四边形 $ABCD$ ，连接 AC ，则 $\tan \angle CAB =$ （ ）

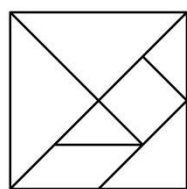


图1

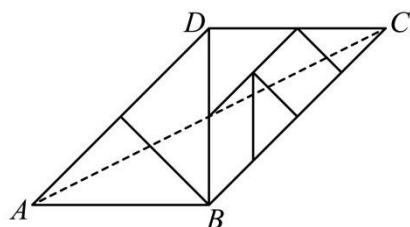


图2

- A . $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B . $\sqrt{3}$ C . $\frac{1}{2}$ D . $\frac{1}{3}$

二、填空题

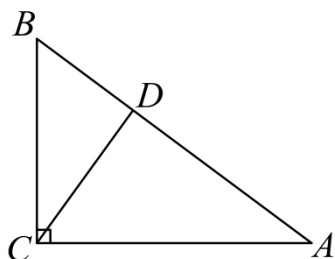
9. $\sin 30^\circ - \tan 45^\circ + \sqrt{8} = \underline{\hspace{2cm}}$

10. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ， $\cos A = \frac{1}{2}$ ，则 $\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$.

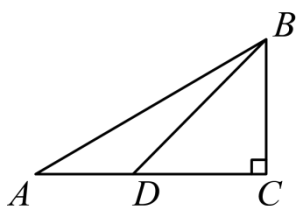
11. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $\tan A = \frac{1}{2}$ ，则 BC 的长是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 等腰三角形两条边长分别是 4cm ， 9cm ，则等腰三角形的底角的余弦值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

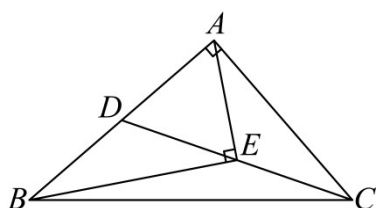
13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是斜边上的高，若 $\cos B = \frac{3}{5}$ ，则 $\cot \angle ACD = \underline{\hspace{2cm}}$.



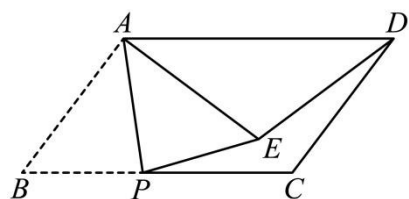
14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 D 在 AC 上，已知 $\angle BDC = 45^\circ$ ， $BD = 10\sqrt{2}$ ， $AB = 20$ 。则 $\angle ABD =$ _____。



15. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， CD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 CD 的中点，连接 AE ， BE ，若 $AE \perp BE$ ，垂足为 E ，则 AC 的长为_____。



16. 如图，已知 P 是平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 上一点，将 $\triangle ABP$ 沿直线 AP 折叠，点 B 落在平行四边形 $ABCD$ 内的点 E 处，且 $EA = ED$ ，如果 $AB = 5$ ， $AD = 8$ ， $\sin B = \frac{4}{5}$ ，那么 BP 的长为_____。

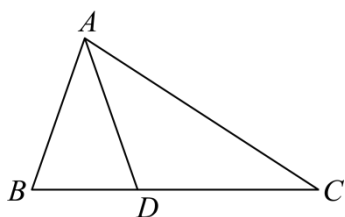


三、解答题

17. 计算： $\frac{\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ}{\cot 60^\circ \cdot \cot 30^\circ} - \tan 45^\circ$ 。

18. 计算： $\frac{\sin^2 45^\circ}{\tan 30^\circ \cdot \cos 60^\circ} + \frac{\sin 60^\circ \cdot \cot 45^\circ}{\sin 30^\circ}$ 。

19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 2\angle C$ ，点 D 在边 BC 上， $AB = AD = 13$ ， $BC = 23$ 。

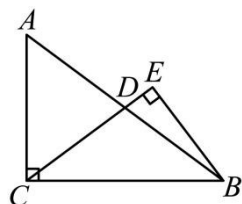


(1) 求 BD 的长；

(2)求 $\tan C$ 的值 .

20 . 如图 , 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $\angle ACB = 90^\circ$, D 是边 AB 的中点 , $BE \perp CD$, 垂足为点 E . 已知

$$AC = 6, \cos A = \frac{3}{5} .$$

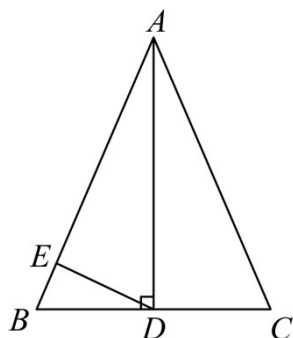


(1)求线段 CD 的长 ;

(2)求 $\cos \angle DBE$ 的值 .

21 . 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = AC$, AD 为 BC 边上的中线 , 点 E 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点 , 且

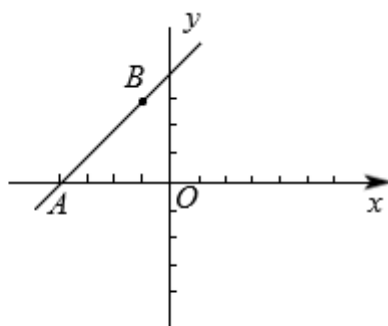
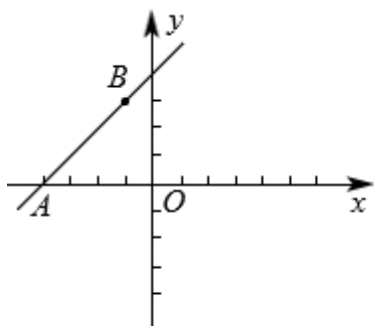
$$BD^2 = BE \cdot BA , \text{ 连接 } DE .$$



(1)求证 : $DE \perp AB$;

(2)若 $AB = 13$, $BC = 10$, 求 $\angle EDB$ 的余弦值 .

22 . 如图 , 已知平面直角坐标系 xOy , 直线 $y = x + m$ 的经过点 $A(-4, 0)$ 和点 $B(n, 3)$.



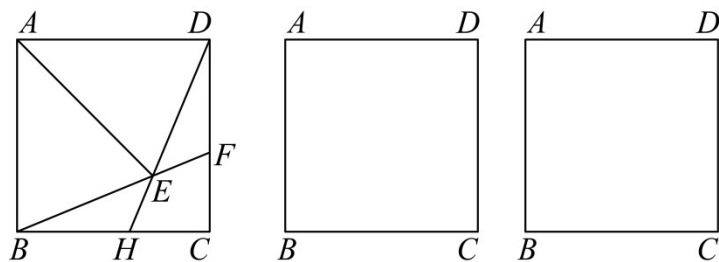
备用图

(1)求 m 、 n 的值 ;

(2) 设点 P 在平面直角坐标系 xOy 内，过点 P 作 $PA \perp AB$ ，垂足为 A ，且 $\tan \angle ABP = \frac{1}{3}$ ，求点 P 的坐标。

(3) 设点 Q 在直线 $y = x + m$ 上，且在第一象限内，直线 $y = x + m$ 与 y 轴的交点为点 D ，如果 $\angle AQO = \angle DOB$ ，求点 Q 的坐标。

23. 如图，已知正方形 $ABCD$ ，点 H 是边 BC 上的一个动点（不与点 B 、 C 重合），点 E 在 DH 上，满足 $AE = AB$ ，延长 BE 交 CD 于点 F 。



备用图

(1) 求： $\sin \angle FED$ ；

(2) 点 M 、 N 分别是边 AB 、 AD 的中点，已知点 P 在线段 MN 上，连结 AP 、 BP ，此时 $\angle APB = 90^\circ$ ，求： $\cot \angle ABP$ ；

(3) 连结 CE 。如果 $\triangle CEF$ 是以 CE 为腰的等腰三角形，求 $\angle FBC$ 的正切值。