

专题 01 实数 压轴题

题型归纳

题型一：立方根的性质

题型二：算术平方根、立方根小数点移动问题

题型三：算术平方根规律题

题型四：反证法证明无理数

题型五：程序框图题

题型六：无理数的整数部分与小数部分

题型七：实数与数轴

题型八：正方形的裁剪拼接与无理数的表示（中考新方向思想培养）

题型九：新定义题

题型十：材料阅读题

题型专练

题型一：立方根的性质

1. 已知 $\sqrt[3]{2x+1} \cdot 2x-1=0$ ，则 $x=$ _____.

2. 有这样一道题目：“已知 $\sqrt[3]{x-1}=x-1$ ，求 x 的值。”甲、乙二人的说法如下，则下列判断正确的是（ ）

甲： x 的值是 1 ；

乙：甲考虑的不全面， x 还有另一个值

A. 甲说的对， x 的值就是 1

B. 乙说的对， x 的另一个值是 2

C. 乙说的对， x 的另一个值是 -1

D. 两人都不对， x 应有 3 个不同值

3. 已知 $\sqrt[3]{x-2}+2=x$ ，且 $\sqrt[3]{3y-1}$ 与 $\sqrt[3]{1-2x}$ 互为相反数，求 x, y 的值.

题型二：算术平方根、立方根小数点移动问题

4. 完善下面表格，发现平方根和立方根的规律，并运用规律解决问题。

x	...	0.064	0.64	64	6400	64000	...
$\sqrt{x}$	...	0.25298	0.8	8	m	252.98	...
$\sqrt[3]{x}$	...	0.4	0.8618	n	18.566	40	...

(1) 表格中的 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 已知 $\sqrt{15} \approx 3.873$, $\sqrt{1.5} \approx 1.22474$, 估计 $\sqrt{150}$ 和 $\sqrt{0.15}$ 的值 ; (结果保留四位小数)

(3) 若 $\sqrt{a} \approx 14.1421$, $\sqrt[3]{700} \approx b$, 估计 $a + b$ 的值 . (参考数据 :

$\sqrt{2} \approx 1.41421$, $\sqrt{20} \approx 4.4721$, $\sqrt[3]{7} \approx 1.9129$, $\sqrt[3]{0.7} \approx 0.88790$) . (结果保留四位小数)

5. 观察下列各式，并用所得出的规律解决问题：

(1) $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{200} \approx 14.14$, $\sqrt{20000} \approx 141.4$,

$\sqrt{0.03} \approx 0.1732$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{300} \approx 17.32$,

由此可见，被开方数的小数点每向右移动——位，其算术平方根的小数点向——移动——位。

(2) 已知 $\sqrt{15} \approx 3.873$, $\sqrt{1.5} \approx 1.225$, 则 $\sqrt{150} \approx \underline{\hspace{2cm}}$; $\sqrt{0.15} \approx \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{1000} = 10$, $\sqrt[3]{1000000} = 100$,

小数点的变化规律是——。

(4) 已知 $\sqrt[3]{10} \approx 2.154$, $\sqrt[3]{y} \approx -0.2154$, 则 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型三：算术平方根规律题

6. 观察下列各式：

$$\sqrt{2 - \frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = \sqrt{\frac{4 \times 2}{5}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}} , \text{ 即 } \sqrt{2 - \frac{2}{5}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt{3 - \frac{3}{10}} = \sqrt{\frac{27}{10}} = \sqrt{\frac{3 \times 9}{10}} = 3\sqrt{\frac{3}{10}} , \text{ 即 } \sqrt{3 - \frac{3}{10}} = 3\sqrt{\frac{3}{10}} , \text{ 那么 } \sqrt{n - \frac{n}{n^2 + 1}} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

7. 请先在草稿纸上计算下列四个式子的值：① $\sqrt{1^3}$; ② $\sqrt{1^3 + 2^3}$; ③ $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3}$; ④ $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}$, 观

察你计算的结果，用你发现的规律直接写出下面式子的值 $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 26^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型四：反证法证明无理数

8. 【阅读理解】公元前⁵世纪，毕达哥拉斯学派中的一名成员希伯索斯发现了无理数 $\sqrt{2}$ ，导致了第一次数学危机。

定义：可以表示为两个互素整数的商的形式的数称为有理数，整数可以看做分母为¹的有理数；反之为无理数。如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素的整数的商，所以 $\sqrt{2}$ 是无理数。可以这样证明：

设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ， a 与 b 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$ ，

则 $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ，即 $a^2 = \underline{\quad\quad\quad} \textcircled{1}$ 。

因为 b 是整数且不为⁰，

所以 a 是不为⁰的偶数。

设 $a = 2n$ （ n 是整数，且 $n \neq 0$ ），则 $a^2 = 4n^2$ 。

所以 $b^2 = \underline{\quad\quad\quad} \textcircled{2}$ 。

所以 b 也是偶数，与 a, b 是互素的整数矛盾。

所以 $\sqrt{2}$ 是无理数。

【解决问题】

(1) 写出 $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$ 表示的代数式，使证明过程完整；

(2) 证明： $\sqrt[3]{6}$ 是无理数。

9. 【阅读理解】

定义：可以表示为两个互素整数的商的形式的数称为有理数，整数可以看作分母为¹的有理数；反之为无理数。如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素（没有相同的因数）的整数的商，所以 $\sqrt{2}$ 是无理数。可以这样证明：

解：设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ， a 与 b 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$ ，

则 $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ，即 $a^2 = \underline{\quad\quad\quad} \textcircled{1}$ 。

$\therefore b$ 是整数且不为⁰，

$\therefore a$ 是2的倍数。

设 $a = 2n$ (n 是整数, 且 $n \neq 0$) ,

则 $a^2 = 4n^2$.

$\therefore b^2 = \underline{\hspace{2cm}} \textcircled{2}$.

$\therefore b$ 也是 2 的倍数, 与 a, b 是互素的整数矛盾 .

$\therefore \sqrt{2}$ 是无理数 .

【解决问题】

(1) 写出 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 表示的代数式, 使证明过程完整 ;

$\textcircled{1} \underline{\hspace{2cm}}$; $\textcircled{2} \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 证明 : $\sqrt{3}$ 是无理数 .

10 . 【阅读理解】

定义 : 可以表示为两个互素整数的商的形式数称为有理数, 整数可以看做分母为 1 的有理数 ; 反之, 为无理数 . 如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素的整数的商, 所以 $\sqrt{2}$ 是无理数 . 可以这样证明 :

设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, a 与 b 是互素的两个整数, 且 $b \neq 0$,

则 $2 = \frac{a^2}{b^2}$

即 $a^2 = \underline{\textcircled{1}}$.

因为 b 是整数且不为 0 ,

所以 a 是不为 0 的偶数 .

设 $a = 2n$ (n 是整数, 且 $n \neq 0$) ,

则 $a^2 = 4n^2$.

所以 $b^2 = \underline{\textcircled{2}}$.

所以 b 也是偶数, 与 a, b 是互素的整数矛盾 .

所以 $\sqrt{2}$ 是无理数 .

【解决问题】

(1) 写出 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 表示的代数式, 使证明过程完整 ;

(2)证明： $\sqrt{7}$ 是无理数，

11. 在数学课本中，运用反证法说明“ $\sqrt{2}$ 是一个无理数”，请模仿这种方法，说明 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数．

阅读材料：

“无理数”的由来

为什么 $\sqrt{2}$ 不可能是一个有理数？现在我们用代数方法来解答这个问题．

假设 $\sqrt{2}$ 是一个有理数，那么可以得到 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ，其中 a 、 b 是整数且 a 、 b 互素且 $b \neq 0$ ，这时，就有：

$$2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

于是 $a^2 = 2b^2$ ，则 a 是 2 的倍数．

再设 $a = 2m$ ，其中 m 是整数，就有： $(2m)^2 = 2b^2$ ，

也就是： $b^2 = 2m^2$ ，

所以 b 也是 2 的倍数，可见 a 、 b 不是互素数，与前面所假设的 a 与 b 互素相矛盾，因此 $\sqrt{2}$ 不可能是一个有理数．

解：假设 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是一个有理数．

则 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ (a 、 b 是整数且 a 、 b 互素且 $b \neq 0$)，

则 $\sqrt{3} = \frac{a}{b} - \sqrt{2}$ ，

两边同时平方得：_____，

所以： $2\sqrt{2}\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1$ ，可得： $2\sqrt{2} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ ，

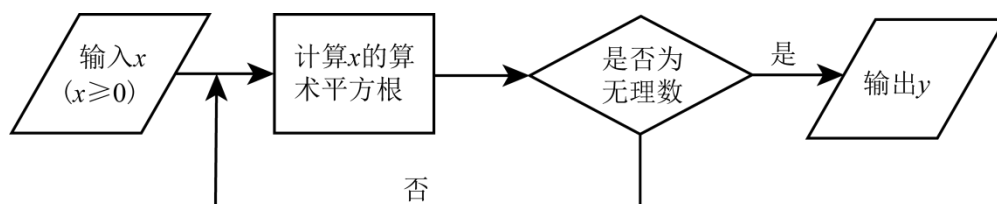
所以： $\sqrt{2} =$ _____，

因为：_____，

所以： $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是一个无理数．

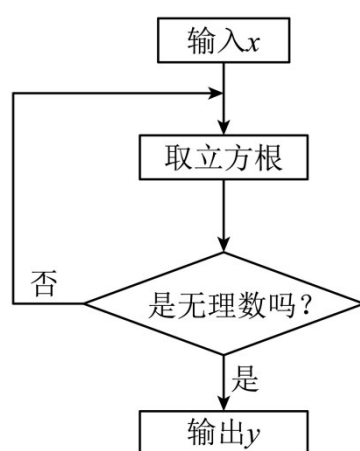
题型五：程序框图题

12. 如图是一个数值转换器示意图：



- (1) 当输入的 x 为 36 时，输出的 y 的值是_____；
- (2) 若输入 x 值后，始终输不出 y 的值，则满足题意的 x 值是_____；
- (3) 若输出的 $y > 2$ ，则 x 的最小整数值是_____。

13. 如图所示的是一个无理数筛选器的工作流程图，根据下面叙述回答相关问题。



- (1) 当 x 为 8 时， y 的值为_____。
- (2) 当输出的 y 值是 $\sqrt[3]{3}$ 时，输入的 x 值唯一吗？若不唯一，请写出其中两个输入的 x 值。
- (3) 是否存在输入某个 x 值后，却始终输不出 y 值？如果存在，写出所有满足要求的 x 值；如果不存在，请说明理由。

题型六：无理数的整数部分与小数部分

14. 阅读下面的文字，解答问题：

我们规定：用 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，用 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分，例如 $[3.14] = 3$ ， $\{3.14\} = 0.14$ ，

$[\sqrt{2}] = 1$ ，大家知道 $\sqrt{2}$ 是无理数，而无理数是无限不循环小数，因此 $\sqrt{2}$ 的小数部分我们不可能全部地写出来，但是由于 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，所以 $\sqrt{2}$ 的整数部分为 1 ，将 $\sqrt{2}$ 减去其整数部分 1 ，所得的基就是其小数部分 $\sqrt{2} - 1$ ，即 $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$ 根据以上的内容，解答下面的问题：

- (1) $[\sqrt{5} + 1] = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\{\sqrt{5} + 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 如果 $(\sqrt{5}) = a$, $[\sqrt{41}] = b$, 求 $a + b - \sqrt{5}$ 的平方根 .

15 . 阅读下面文字 , 然后回答问题 . 大家知道 $\sqrt{2}$ 是无理数 , 而无理数是无限不循环小数 , 所以 $\sqrt{2}$ 的小数部分不可能全部写出来 , 由于 $\sqrt{2}$ 的整数部分是 1 , 将 $\sqrt{2}$ 减去它的整数部分 , 差就是它的小数部分 , 因此 $\sqrt{2}$ 的小数部分可用 $\sqrt{2} - 1$ 表示 , 由此我们得到一个真命题 : 如果 $\sqrt{2} = x + y$, 其中 x 是整数 , 且 $0 < y < 1$, 那么 $x = 1$, $y = \sqrt{2} - 1$. 请解答下列问题 :

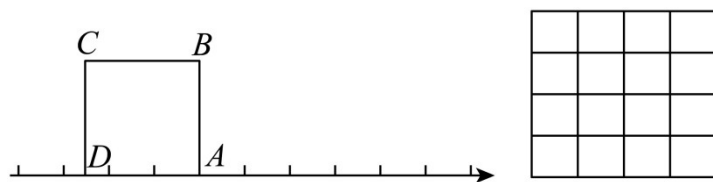
(1) 如果 $\sqrt{6} = a + b$, 其中 a 是整数 , 且 $0 < b < 1$, 那么 $a = \underline{\quad}$, $b = \underline{\quad}$.

(2) 如果 $-\sqrt{6} = c + d$, 其中 c 是整数 , 且 $0 < d < 1$, 那么 $c = \underline{\quad}$, $d = \underline{\quad}$.

(3) 已知 $2 - \sqrt{6} = m + n$, 其中 m 是整数 , 且 $0 < n < 1$, 求 $|m - n|$ 的值 .

题型七：实数与数轴

16 . 如图 , 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{5}$.

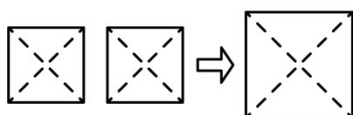


(1) 有 4×4 的网格 , 每个方格的边长为 1 , 把正方形 $ABCD$ 画在网格中 , 要求顶点在格点上 .

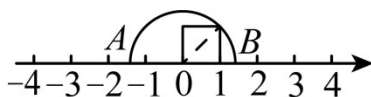
(2) 如图 , 把正方形 $ABCD$ 放到数轴上 , 使得点 A 与数 -1 重合 , 边 AD 在数轴上 , 那么点 D 数轴上表示的数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 在 (2) 的条件下 , 如果 a 和 b 分别表示点 D 对应的无理数的整数部分和小数部分 , 求 $a - b$ 的值 .

17 . 如图① , 把两个边长为 1 的小正方形沿对角线剪开 , 所得的 4 个直角三角形拼成一个面积为 2 的大正方形 . 由此得到了一种能在数轴上画出无理数对应点的方法 .



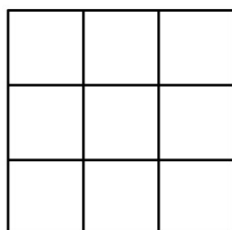
图①



图②



图③



图④

(1) 图②中 A 、 B 两点表示的数分别为_____，_____；

(2) 请你参照上面的方法：

把图③中 5×1 的长方形进行剪裁，并拼成一个大正方形。在图③中画出裁剪线，并在图④的正方形网格中画出拼成的大正方形，该正方形的边长 $a =$ _____。（注：小正方形边长都为1，拼接不重叠也无空隙）

18. 下面是小敏写的数学日记的一部分，请你认真阅读，并完成相应的任务。

2023 年 9 月 22 日 天气：晴

无理数与线段长。

今天我们借助勾股定理，在数轴上找到了一些特殊的无理数对应的点，认识了“数轴上的点与实数一一对应”这一事实。

回顾梳理：要在数轴上找到表示 $\pm\sqrt{2}$ 的点，关键是在数轴上构造线段 $OA = OA' = \sqrt{2}$ 。如图 1，正方形的边长为 1 个单位长度，以原点 O 为圆心，对角线长为半径画弧与数轴上分别交于点 A ， A' ，则点 A 对应的数为 $\sqrt{2}$ ，点 A' 对应的数为 $-\sqrt{2}$ 。

类似地，我们可以在数轴上找到表示 $\pm\sqrt{5}$ ， $\pm\sqrt{10}$ ，... 的点。

拓展思考：如图 2，改变图 1 中正方形的位置，用类似的方法作图，可在数轴上构造出线段 OB 与 OB' ，其中 O 仍在原点，点 B ， B' 分别在原点的右侧、左侧，可由线段 OB 与 OB' 的长得到点 B ， B' 所表示的无理数！按照这样的思路，只要构造出特定长度的线段，就能在数轴上找到无理数对应的点！

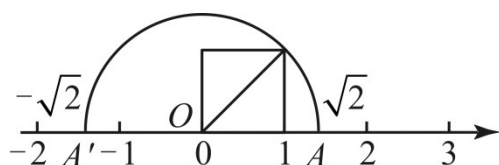


图1

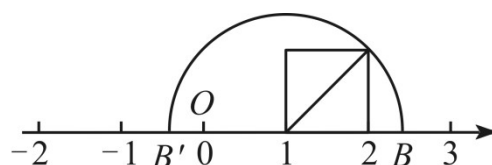


图2

任务：

(1)在图 3 中画图确定表示 $\sqrt{10}$ 的点 M .

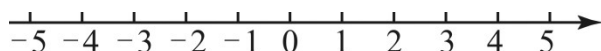


图3

(2)把 5 个小正方形按图中位置摆放，并将其进行裁剪，拼成一个大正方形．请在图中画出裁剪线，并在图 4 中画出所拼得的大正方形的示意图．

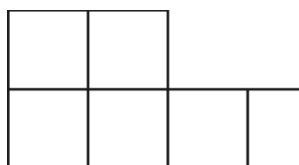


图4

(3)小丽想用一块面积为 36cm^2 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 20cm^2 的长方形纸片如图 5，使它的长是宽的 2 倍．小丽能用这块纸片裁出符合要求的纸片吗？请你通过计算说明理由．

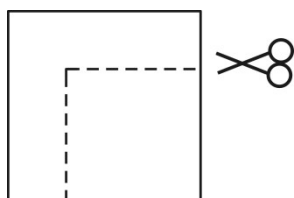


图5

(4)在图 6 中的数轴上分别标出表示数 -0.5 以及 $-3+\sqrt{5}$ 的点，并比较它们的大小．

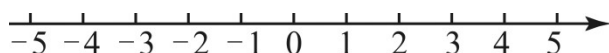


图6

19. 教材中，如图 1，把两个边长为 1 的小正方形分别沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角形拼在一起，就可以得到一个面积为 2 的大正方形，它的边长是无理数 $\sqrt{2}$. 由此启发，我们可以尝试用两个同样大小的长方形拼出一个正方形的方式找出其他无理数的大小．

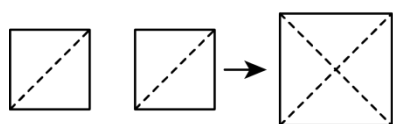


图1

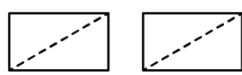


图2

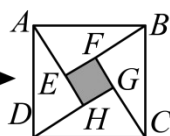


图3

如图2，将两个长和宽分别为3和2的长方形沿对角线剪开，将所得到的4个直角三角形拼出了一个中间有一个镂空小正方形的大正方形。

(1) 所得到的小正方形EFGH的边长为——；大正方形ABCD的边长为——。

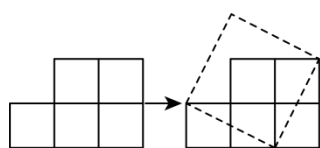
(2) 把图2中的正方形ABCD放在数轴上，如图3，点C表示的数为1，若正方形ABCD从当前状态沿数轴正方向翻滚，我们把点B翻滚到数轴上的点P时，记为第一次翻滚，点A翻滚到数轴上时，记为第二次翻滚，以此类推。是否存在正整数 n ，使得该正方形经过 n 次翻滚后，其顶点A，B，C，D中的某个点与数轴上的2025重合？

题型八：正方形的裁剪拼接与无理数的表示（中考新方向思想培养）

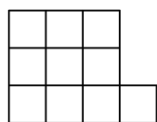
20. (1) 如图①，由五个边长为1的小正方形组成的图形纸，我们可以把它剪开，拼成一个正方形。这个正方形的面积为——，边长为——。

(2) 如图②，你能把由十个边长为1的正方形组成的图形纸剪开，并拼成正方形吗？请仿照上题用虚线在图②中画出拼成的正方形，并求得它的边长为——。

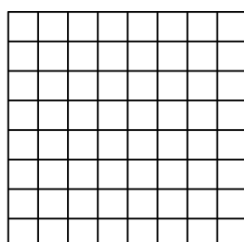
(3) 请仿照上题，在图③中画出边长为 $\sqrt{29}$ 的正方形。



图①



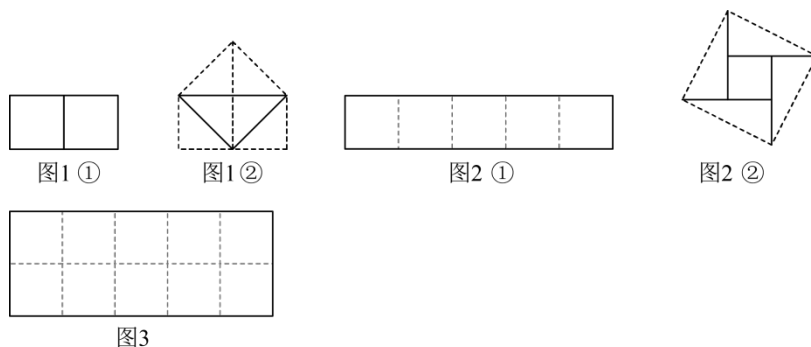
图②



图③

21. 阅读材料，并完成下列问题：

寻找无理数：小明把两个面积为1的小正方形（图1①）分别沿对角线剪开，将所得的4个直角三角形拼成一个面积为2的大正方形（图1②），从而找到无理数 $\sqrt{2}$ 。问题再发现：



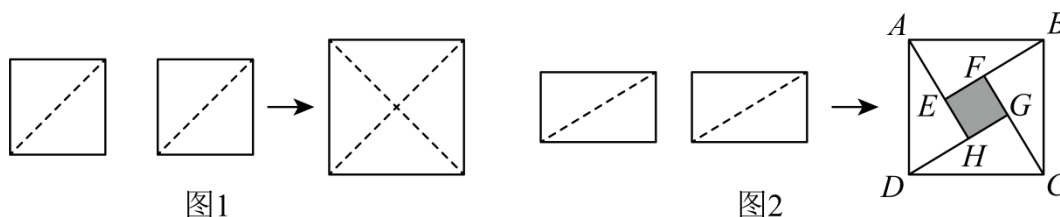
(1) 小刚受到小明的启发，把图 2① 剪拼成图 2② 后，找到无理数 $\sqrt{5}$ ，请在图 2① 中画出裁剪线（用实线）；

(2) 参考小明、小刚的作法，请你将图 3 中长为 5，宽为 2 的长方形裁剪成若干块，拼成一个正方形；

① 求该正方形的边长；

② 请在图 3 中画出一一种满足条件的裁剪线（用实线）。

22. 【问题发现】(1) 如图 1，把两个边长为 1 的小正方形分别沿对角线剪开，将所得的 4 个直角三角形拼在一起，就可以得到一个大正方形，所得到的大正方形的面积为_____，大正方形的边长为_____。



【知识迁移】(2) 爱钻研的小思同学受到启发，尝试用两个同样大小的长方形拼出一个正方形。如图 2，将两个长和宽分别为 3 和 2 的长方形沿对角线剪开，将所得到的 4 个直角三角形拼出了一个中间有一个镂空小正方形的大正方形，所得到的正方形 $EFGH$ 的边长为_____；大正方形 $ABCD$ 的面积为_____；边长为_____。

【拓展延伸】(3) 小明想用一块面积为 900 cm^2 的正方形纸片，沿着边的方向裁出一块面积为 740 cm^2 的长方形纸片，使它的长与宽之比为 5 : 4。请通过计算说明是否可行。

23. 数学活动课上，数学兴趣小组的几名同学探究用 n 个面积为 $1(\text{dm}^2)$ 的小正方形纸片剪拼成一个面积为 $n(\text{dm}^2)$ 的大正方形。下面是他们探究的部分结果：

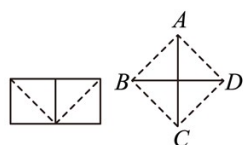


图1

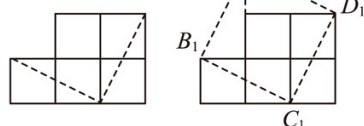


图2

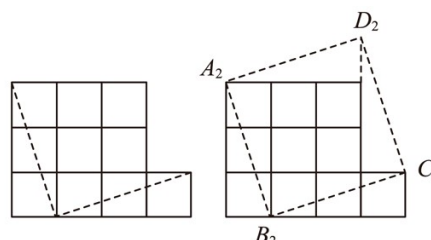


图3

(1)如图 1，当 $n=2$ 时，拼成的大正方形 $ABCD$ 的边长为

如图 2，当 $n=5$ 时，拼成的大正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的边长为

如图 3，当 $n=10$ 时，拼成的大正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 的边长为

(2)小李想沿着正方形纸片 $A_1B_1C_1D_1$ 边的方向能否裁出一块面积为 $2.42(\text{dm}^2)$ 的长方形纸片，使它的长宽之比为 $2:1$ ？他能裁出吗？请说明理由。

(3)小周想沿着正方形纸片 $A_2B_2C_2D_2$ 边的方向能否裁出一块面积为 $4.86(\text{dm}^2)$ 的长方形纸片，使它的长宽之比为 $3:2$ ，且要求长方形的四周至少留出 0.3dm 的边框？若能，请给出一种合适的裁剪方案；若不能，请说明理由。

题型九：新定义题

24. 规定 $[a]$ 取 a 的整数部分，例如： $[3.9]=3$ ， $[5.2]=5$ ， $[8]=8$ ，则

$[\sqrt{1}]-[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]-[\sqrt{4}]+\cdots-[\sqrt{48}]+[\sqrt{49}]$ 的值等于 ()

A. 4

B. -4

C. 5

D. -5

25. 阅读理解题：定义：如果一个数的平方等于 -1 ，记为 $i^2=-1$ ，这个数 i 叫做虚数单位，把形如 $a+bi$ (a, b 为实数) 的数叫做复数，其中 a 叫这个复数的实部， b 叫做这个复数的虚部，它的加，减，乘法运算与整式的加，减，乘法运算类似。

例如计算： $(2-i)+(5+3i)=(2+5)+(-1+3)i=7+2i$ ；

$(1+i)\times(2-i)=1\times 2-i+2\times i-i^2=2+(-1+2)i+1=3+i$ ；

根据以上信息，完成下列问题：

(1)填空： $i^3=$ _____， $i^4=$ _____；

(2)计算： $(1+i)\times(3-4i)$ ；

(3) 计算： $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2023}$.

26. 喜欢探索数学知识的小明遇到一个新的定义：对于三个互不相等的正整数，若其中任意两个数乘积的算术平方根都是整数，则称这三个数为“老根数”，其结果中最小的整数称为“最小算术平方根”，最大的整数称为“最大算术平方根”. 例如：1，4，9这三个数， $\sqrt{1 \times 4} = 2$ ， $\sqrt{1 \times 9} = 3$ ， $\sqrt{4 \times 9} = 6$ ，其结果分别为2，3，6，都是整数，所以1，4，9这三个数称为“老根数”，其中“最小算术平方根”是2，“最大算术平方根”是6 .

(1) 试说明：2，8，50这三个数是“老根数”，并求出它们的最小算术平方根与最大算术平方根；

(2) 已知16， a ，36，这三个数是“老根数”，且它们的最大算术平方根是最小算术平方根的2倍，求 a 的值 .

题型十：材料阅读题

27. 阅读材料：我们知道，任意一个有理数与无理数的和为无理数，任意一个不为零的有理数与一个无理数的积为无理数，而零与无理数的积为零，由此可得，如果 $mx + n = 0$ ，其中 m 、 n 为有理数， x 为无理数，那么 $m = 0$ ， $n = 0$. 运用上述知识解决下列问题：

(1) 若 m 、 n 均为有理数，且 $(m+1)\sqrt{3} + n - 2 = 0$ ，求 $m+n$ 的立方根；

(2) 若 m 、 n 均为有理数，且 $(m+1)\sqrt{2} + m - 17 = 2\sqrt{2} - n^2$ ，求 m 和 n 的值 .

28. 我们知道：任意一个有理数与无理数的和为无理数，任意一个不为零的有理数与一个无理数的积为无理数，而零与无理数的积为零，由此可得，如果 $ax + b = 0$ ，其中 a 、 b 为有理数， x 为无理数，那么 $a = 0$ ，且 $b = 0$ ，运用上述知识解决下列问题：

(1) 如果 $\sqrt{2}(a+2) - b + 3 = 0$ ，其中 a 、 b 为有理数，那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 如果 $2b - a - \sqrt{3}(a+b-4) = 5$ ，其中 a 、 b 为有理数，求 $a+8b$ 的算术平方根；

(3) 若 a 、 b 都是有理数，且 $a^2 + 2b + \sqrt{7}(b+4) = 17$ ，试求 $a+b$ 的立方根 .

29. 【阅读材料】

数学家华罗庚在一次出国访问途中，看到飞机上邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题：求 59319 的立方根 . 华罗庚脱口而出：“39” . 邻座的乘客十分惊奇，忙问其中计算的奥妙 .

你知道怎样迅速准确的计算出结果吗？请你按下面的步骤试一试：

第一步： $\because \sqrt[3]{1000} = 10$ ， $\sqrt[3]{1000000} = 100$ ， $1000 < 59319 < 1000000$ ，

$\therefore 10 < \sqrt[3]{59319} < 100$ 。

$\therefore$ 能确定 59319 的立方根是个两位数。

第二步： $\because 59319$ 的个位数是 9 ， $9^3 = 729$

$\therefore$ 能确定 59319 的立方根的个位数是 9 。

第三步：如果划去 59319 后面的三位 319 得到数 59 ，

而 $\sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{59} < \sqrt[3]{64}$ ，则 $3 < \sqrt[3]{59} < 4$ ，可得 $30 < \sqrt[3]{59319} < 40$ ，

由此能确定 59319 的立方根的十位数是 3 ，因此 59319 的立方根是 39 。

【解答问题】

根据上面材料，解答下面的问题

(1) 求 110592 的立方根，写出步骤。

(2) 填空： $\sqrt[3]{21952} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

30. 先阅读下面材料，再解答问题：

材料：任意一个有理数与无理数的和为无理数，任意一个不为零的有理数与一个无理数的积为无理数，而零与无理数的积为零。由此可得：若 $a + b\sqrt{m} = 0$ ，其中 a, b 为有理数， $\sqrt{m}$ 是无理数，则 $a = 0, b = 0$ 。

证明： $\because a + b\sqrt{m} = 0$ ， a 为有理数

$\therefore b\sqrt{m}$ 是有理数

$\because b$ 为有理数， $\sqrt{m}$ 是无理数

$\therefore b = 0$

$\therefore a + 0\sqrt{m} = 0$

$\therefore a = 0$

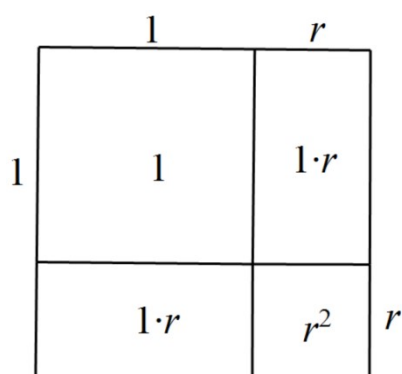
(1) 若 $a + b\sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$ ，其中 a, b 为有理数，请猜想 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ，并根据以上材料证明你的猜想；

(2) 已知 $\sqrt{11}$ 的整数部分为 a ，小数部分为 b ，且 x, y 为有理数， x, y, a, b 满足

$11y + \sqrt{11}(y - \sqrt{11}x) = (b+2)\sqrt{11} + a\sqrt{11}$ ，求 x, y 的值。

31. 单项式“ a^2 ”可表示边长为 a 的正方形的面积，这就是数学中的数形结合思想的体现。康康由此探究 $\sqrt{2}$ 的近似值，以下是他的探究过程：

面积为 2 的正方形边长为 $\sqrt{2}$ ，可知 $\sqrt{2} > 1$ ，因此设 $\sqrt{2} = 1 + r$ ，画出示意图：图中正方形的面积可以用两个正方形的面积与两个长方形面积的和表示，即 $S_{\text{正方形}} = x^2 + 2 \times r + 1$ ，另一方面 $S_{\text{正方形}} = 2$ ，则 $x^2 + 2 \times r + 1 = 2$ ，由于 r^2 较小故略去，得 $2r + 1 \approx 2$ ，则 $r \approx 0.5$ ，即 $\sqrt{2} \approx 1.5$



(1) 仿照康康上述的方法，探究 $\sqrt{7}$ 的近似值。（精确到 0.01）（画出示意图，标明数据，并写出求解过程）；

(2) 继续仿照上述方法，在 (1) 中得到的 $\sqrt{7}$ 的近似值的基础上，再探究一次，使求得的 $\sqrt{7}$ 的近似值更加准确，精确到 0.001（画出示意图，标明数据，并写出求解过程）；

(3) 综合上述具体探究，已知非负整数 n, m, b ，若 $n < \sqrt{b} < n+1$ ，且 $b = n^2 + m$ ，试用含 m 和 n 式子表示 $\sqrt{b}$ 的估算值。