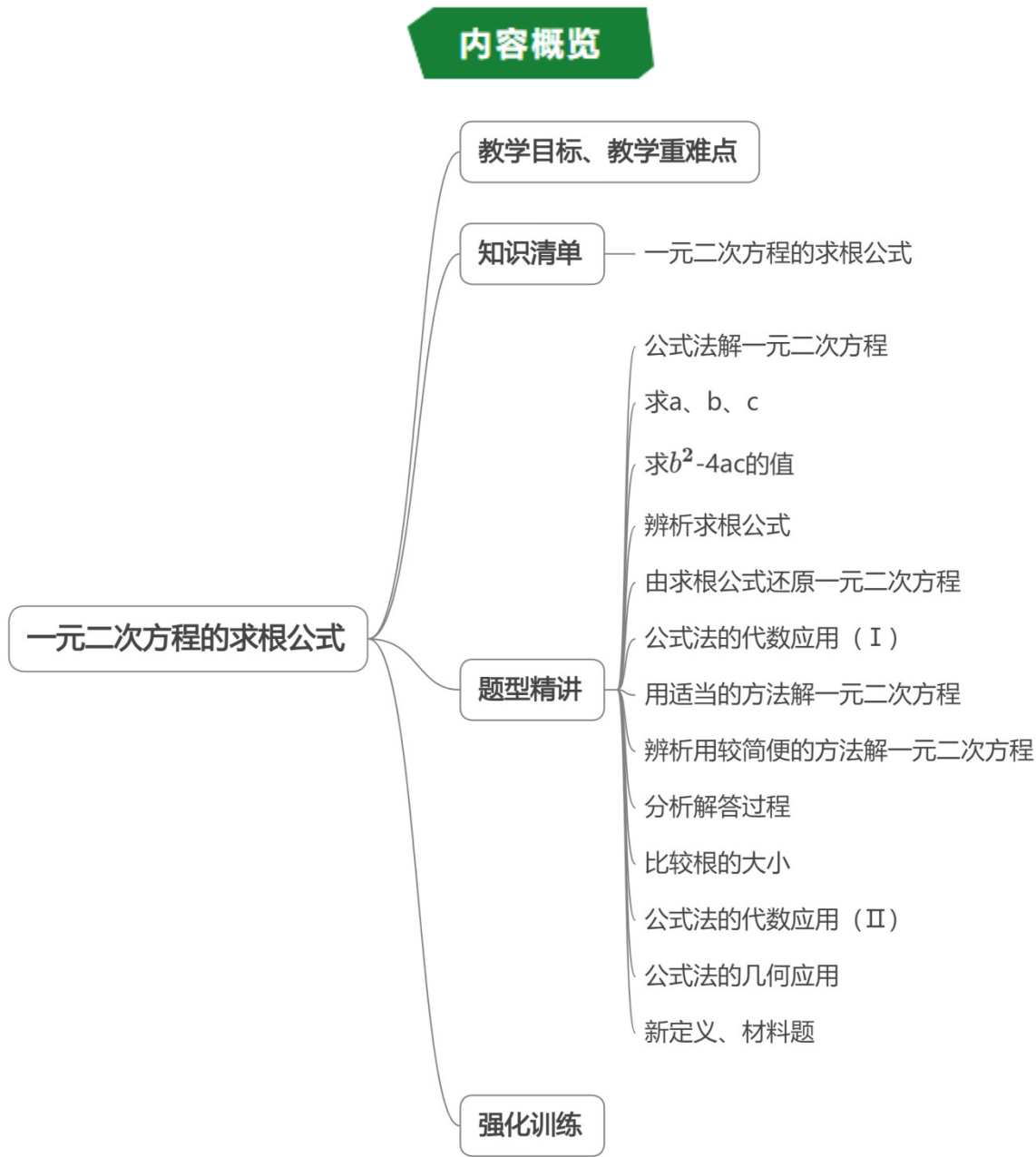


专题 21.4 一元二次方程的求根公式



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 经历推导求根公式的过程，加强推理技能的训练. 2. 会用公式法一元二次方程. 3. 在推导一元二次方程的求根公式过程中，学会分类讨论思想 .
教学重难点	1.重点

	(1) 利用配方法推导一元二次方程的求根公式； (2) 公式法解一元二次方程，； (3) 灵活运用适当的方法解一元二次方程。 2.难点 (1) 公式法解一元二次方程的综合应用； (2) 分类讨论思想；
--	--

知识清单

知识点1 一元二次方程的求根公式

一、情境导入，初步认识

1.用配方法解方程：

$$(1) x^2+3x+2=0; (2) 2x^2-3x+5=0.$$

2.由用配方法解一元二次方程的基本步骤知：对于每个具体的一元二次方程，都使用了相同的一些计算步骤，这启发我们思考，能不能对一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 使用这些步骤，然后求出解 x 的公式？

二、思考探究，获取新知

1.用配方法解方程： $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)

分析：前面具体数字已做了很多，我们现在不妨把 a 、 b 、 c 也当成一个具体数字，根据上面的解题步骤就可以一直推下去.

解：移项，得： $ax^2+bx=-c$

因为 $a \neq 0$ ，所以方程两边同除以 a 得：

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\text{配方，得：} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\text{即} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\because a \neq 0, \therefore 4a^2 > 0$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } b^2-4ac \geq 0 \text{ 时, } \frac{b^2-4ac}{4a^2} \geq 0$$

$$\therefore x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\text{即 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\textcircled{2} \text{ (2) 当 } b^2-4ac < 0 \text{ 时, } \frac{b^2-4ac}{4a^2} < 0 \text{ 这时, 在实数范围内, } x \text{ 取任何数都不能使方程 } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \text{ 左右两边的值相等, 所以原方程没有实数根.}$$

由上可知, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根由方程的系数 a 、 b 、 c 而定, 因此:

①解一元二次方程时, 可以先将方程化为一般形式 $ax^2+bx+c=0$, 当 $b^2-4ac \geq 0$ 时, 它的实数根可以写成 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ($b^2-4ac \geq 0$) 的形式, 这个式子叫做一元二次方程的求根公式.

②在求根公式中, 如果 $b^2-4ac=0$, 那么 $x_1=x_2 = -\frac{b}{2a}$, 即方程有两个相等的实数根(重根).

【强调】用公式法解一元二次方程时, 必须注意两点: (1) 将 a 、 b 、 c 的值代入公式时, 一定要注意符号不能出错. (2) 式子 $b^2-4ac \geq 0$ 是公式的一部分.

2. 确定 a , b , c 的值时, 先要将一元二次方程式化为一般形式, 注意 a , b , c 的符号.

3. 你能总结出用公式法解一元二次方程的一般步骤吗?

【归纳结论】

在解一元二次方程时, 把方程化成一般形式 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), 如果 $b^2-4ac \geq 0$, 那么把 a 、 b 、 c 的值代入求根公式, 就可以求得方程的实数根; 如果 $b^2-4ac < 0$, 那么原方程没有实数根. 这种解一元二次方程的方法称为公式法.

公式法适用所有的一元二次方程.

三、一元二次方程的解法小结（非书面）

1.特殊的一元二次方程解法：①（直接）开平方法；依据：实数平方的非负性

②因式分解法；依据：因式分解

2.一般的一元二次方程解法：③配方法；依据：完全平方公式

④公式法；依据：配方法推导而来

配方法、公式法同途回归；因此，一般的，它们都适用所有的一元二次方程.

【即学即练】

1.用公式法解下列各方程：

(1) $5x^2 + 2x - 1 = 0$

(2) $6y^2 + 13y + 6 = 0$

(3) $3x^2 + 6x + 9 = 7$

2.用公式法解下列方程：

(1) $x(x+8) = 16$

(2) $\sqrt{2}x^2 - 4x = 4\sqrt{2}$

(3) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

3.用公式法解方程 $x^2 + 2x = 3$ 时，求根公式中的 a ， b ， c 的值分别是（ ）

- A. 1, 2, 3 B. 1, -2, 3 C. 1, 2, -3 D. 1, -2, -3

4.下列一元二次方程的根是 $x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \times 1 \times 1}}{2}$ 的是（ ）

A. $x^2 + 2x + 1 = 0$ B. $x^2 - 2x + 1 = 0$

C. $x^2 - 2x - 1 = 0$ D. $x^2 + 2x - 1 = 0$

5.若 $x = \frac{2 \pm \sqrt{b^2 - 4 \times (-1) a}}{2 \times 3}$ 可以表示某个一元二次方程的根，则这个一元二次方程为（ ）

A. $3x^2 + 2x - 1 = 0$ B. $2x^2 + 4x - 1 = 0$

C. $-x^2 - 2x + 3 = 0$ D. $3x^2 - 2x - 1 = 0$

6.解下列方程：① $3x^2 - 27 = 0$ ；② $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ；③ $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ；④ $2(3x-1)^2 = 3x-1$.较简便的方法

是（ ）

- A. ①公式法，②配方法，③直接开平方法，④因式分解法
 B. ①因式分解法，②公式法，③配方法，④直接开平方法
 C. ①②直接开平方法，③公式法，④因式分解法
 D. ①直接开平方法，②公式法，③④因式分解法

题型精讲

题型 01 公式法解一元二次方程

【典例 1】 . 用公式法解下列方程：

(1) $x^2 - 4x - 7 = 0$;

(2) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$;

(3) $5x^2 - 3x = x + 1$;

(4) $x^2 + 17 = 8x$.

【变式 1】 . 用公式法解下列方程：

(1) $x^2 - 6x + 1 = 0$; (2) $2x^2 - x = 6$;

(3) $4x^2 - 3x - 1 = x - 2$; (4) $3x(x - 3) = 2(x - 1) \cdot (x + 1)$;

(5) $(x - 2)(x + 5) = 8$; (6) $(x + 1)^2 = 2(x + 1)$.

题型 02 求 a、b、c

【典例 1】 . 用公式法解方程 $x^2 + x = 2$ 时，求根公式中 a, b, c 的值分别是 () .

A . $a = 1, b = 1, c = 2$

B . $a = 1, b = -1, c = -2$

C . $a = 1, b = 1, c = -2$ D . $a = 1, b = -1, c = 2$

【变式 1】 . 用求根公式解一元二次方程 $5x^2 - 1 = 4x$ 时 a, b, c 的值是 ()

A . $a = 5, b = -1, c = -4$

B . $a = 5, b = -4, c = 1$

C . $a = 5, b = -4, c = -1$

D . $a = 5, b = 4, c = 1$

【变式 2】 . 用公式法解一元二次方程 $3x^2 - 4x = 2$ 时 a, b, c 的值为 ()

A . $a = 3, b = -4, c = -2$

B . $a = 3, b = -4, c = 2$

C. $a=3$, $b=-2$, $c=4$ D. $a=3$, $b=4$, $c=-2$

【变式3】. 求方程 $2x^2 + 7x + 2 = 0$ 的根时, 由求根公式得 $x = \frac{m \pm \sqrt{49 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2}$, 则 m 的值为 ()

A. $-\frac{7}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. -7 D. 7

题型 03 求 $b^2 - 4ac$ 的值

【典例1】. 用公式法解方程 $\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{3}x = 2\sqrt{2}$, 其中求得 $b^2 - 4ac$ 的值是 () .

A. 16 B. ± 4
C. 32 D. 64

【变式1】. 方程 $2x(x+1) - 1 = 0$ 中, $b^2 - 4ac$ 的值为_____, 根是_____.

题型 04 辨析求根公式

【典例1】. 用公式法解方程 $3x^2 - 2x - 1 = 0$ 时, 正确代入求根公式的是 ()

A. $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3}$ B. $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{3}$
C. $x = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3}$ D. $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3}$

【变式1】. 方程 $mx^2 - 4x + 1 = 0 (m < 0)$ 的根是 ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{2 \pm \sqrt{4-m}}{m}$ C. $\frac{2 \pm 2\sqrt{4-m}}{m}$ D. $\frac{2 \pm m\sqrt{4-m}}{m}$

题型 05 由求根公式还原一元二次方程

【典例1】. 若 $x = \frac{2 \pm \sqrt{b^2 - 4 \times (-1)a}}{2 \times 3}$ 可以表示某个一元二次方程的根, 则这个一元二次方程为 ()

A. $3x^2 + 2x - 1 = 0$ B. $2x^2 + 4x - 1 = 0$
C. $-x^2 - 2x + 3 = 0$ D. $3x^2 - 2x - 1 = 0$

【变式1】. 已知某一元二次方程的两根为 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3}$, 则此方程可能是 ()

A. $3x^2 + 5x + 1 = 0$ B. $3x^2 - 5x + 1 = 0$

C. $3x^2 - 5x - 1 = 0$ D. $3x^2 + 5x - 1 = 0$

【变式2】 . 在用求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 求一元二次方程的根时，小璐正确地代入了 a, b, c 得到

$x = \frac{3 \pm \sqrt{[-3]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$ ，则她求解的一元二次方程是 ()

A. $2x^2 - 3x - 1 = 0$ B. $2x^2 + 4x - 1 = 0$

C. $-x^2 - 3x + 2 = 0$ D. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

【变式3】 . 当 $a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0$ 时，下列一元二次方程中两个根是实数 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 的是 ()

A. $ax^2 + bx + c = 0$ B. $ax^2 - bx + c = 0$ C. $ax^2 + bx = c$ D. $ax^2 = bx + c$

题型 06 公式法的代数应用 (I)

【典例1】 . 已知代数式 $2x^2 + 7x - 1$ 与 $x^2 - 19$ 的值互为相反数，则 x 的值为 ()

A. $\frac{3}{5}$ 或 4 B. $-\frac{3}{5}$ 或 4

C. $-\frac{5}{3}$ 或 4 D. $\frac{5}{3}$ 或 -4

【变式1】 . 若方程 $(m-2)x^{|m|} - 2x + 1 = 0$ 是一元二次方程，则方程的根是 ()

A. $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ B. $x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, x_2 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{4}$

C. $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ D. 以上答案都不对

【变式2】 . 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根分别为 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，下

列判断一定正确的是 ()

A. $a = -1$ B. $c = 1$ C. $ac = -1$ D. $\frac{c}{a} = 1$

【变式3】 . 已知 $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ($b^2 - 4ac \geq 0$)，则式子 $x^2 + bx + c$ 的值是_____.

题型 07 用适当的方法解一元二次方程

【典例 1】 . 用适当的方法解下列一元二次方程 .

(1) $3x^2 - 9x + 2 = 0$ (配方法) ;

(2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$ (公式法) ;

(3) $(2x+3)^2 = 4(2x+3)$ (因式分解) ;

(4) $(x-2)(3x-5) = 1$ (适当方法) ;

(5) $x^2 - 4x - 21 = 0$ (适当方法) .

【变式 1】 . 解方程

① $(2x-1)^2 = 9$

② $x^2 + 3x - 4 = 0$

③ $x^2 - 2x - 8 = 0$

④ $(x+4)^2 = 5(x+4)$

⑤ $(x+1)^2 = 4x$

⑥ $(x+1)(x+2) = 2x+4$

⑦ $2x^2 - 10x = 3$

⑧ $(x-2)(x-5) = -2$.

题型 08 辨析用较简便的方法解一元二次方程

【典例 1】 . 解下列方程：① $2x^2 - 18 = 0$; ② $9x^2 - 12x - 1 = 0$; ③ $3x^2 + 10x + 2 = 0$; ④ $2(5x - 1)^2 = 2(5x -$

1) . 用较简便的方法依次是()

A . ①直接开平方法，②配方法，③公式法，④因式分解法

B . ①直接开平方法，②公式法，③、④因式分解法

C . ①因式分解法，②公式法，③配方法，④因式分解法

D . ①直接开平方法，②、③公式法，④因式分解法

【变式 1】 . 解方程① $9(x-3)^2 = 25$, ② $6x^2 - x = 1$, ③ $x^2 + 4x - 3596 = 0$, ④ $x(x-1) = 1$.较简便的方法依次

是() ;

A . 开平方法、因式分解法、公式法、配方法

B . 因式分解法、公式法、公式法、配方法

C . 配方法、因式分解法、配方法、公式法

D . 开平方法、因式分解法、配方法、公式法

【变式2】 . 已知下列方程，请把它们序号填在最适当的解法后的横线上 .

① $2(x-1)^2 = 6$; ② $(x-2)^2 + x^2 = 4$; ③ $(x-2)(x-3) = 3$; ④ $x^2 - 2x - 1 = 0$; ⑤ $x^2 - 2x - 99 = 0$.

(1)直接开平方法：_____；

(2)配方法：_____；

(3)公式法：_____；

(4)因式分解法：_____ .

【变式3】 . 下列方程，最适合用公式法求解的是 ()

A . $(x-1)^2 = 4$

B . $2x^2 = 8$

C . $x^2 - x - 1 = 0$

D . $2(x+1)^2 - 20 = 0$

题型 09 分析解答过程

【典例1】 . 小明在解方程 $x^2 - 4x = 2$ 时出现了错误，解答过程如下：

$\therefore a = 1, b = -4, c = -2$ (第一步) ,

$\therefore b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 24$ (第二步) ,

$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2}$ (第三步) ,

$\therefore x_1 = -2 + \sqrt{6}, x_2 = -2 - \sqrt{6}$ (第四步) .

小明解答过程开始出错的步骤是 ()

A . 第一步

B . 第二步

C . 第三步

D . 第四步

【变式1】 . 下面是小明同学解方程 $x^2 - 5x = -4$ 的过程：

$\therefore a = 1, b = -5, c = -4$ (第一步)

$\therefore b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 41$ (第二步)

$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$, (第三步)

$\therefore x_1 = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}, x_2 = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}$ (第四步)

小明是从第_____步开始出错．

题型 10 比较根的大小

【典例 1】．一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个实数根中较大的根是 ()

- A . $1 + \sqrt{5}$ B . $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ C . $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ D . $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

【变式 1】．已知 a 是一元二次方程 $2x^2 - 2x - 1 = 0$ 较大的实数根，那么 a 的值应在 ()

- A . 3 和 4 之间 B . 2 和 3 之间 C . 1 和 2 之间 D . 0 和 1 之间

【变式 2】．设 x_1 为一元二次方程 $2x^2 - 4x = \frac{5}{4}$ 较小的根，则 ()

- A . $0 < x_1 < 1$ B . $-1 < x_1 < 0$ C . $-2 < x_1 < -1$ D . $-5 < x_1 < -\frac{9}{2}$

【变式 3】．方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a < 0$) 有两个实根，则这两个实根的大小关系是 ()

- A . $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 B . $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 C . $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 D . $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

题型 11 公式法的代数应用 (II)

【典例 1】．若 $x = 2$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - \frac{5}{2}ax - a^2 = 0$ ($a > 0$) 的一个根，下面对 a 的值估计正确的是 ()

- A . $0 < a < \frac{1}{2}$ B . $\frac{1}{2} < a < 1$ C . $1 < a < \frac{3}{2}$ D . $\frac{3}{2} < a < 2$

【变式 1】．已知关于 y 方程 $(m+1)y^2 - 3my - 9 = 0$ 的根都是整数，且 m 满足等式 $\sqrt{(1-m)^2} = (\sqrt{1-m})^2$ ，则满足条件的所有整数 m 的和是 ()

A . -5

B . -4

C . 0

D . -7

题型 12 公式法的几何应用

【典例 1】. 已知 $2, 3, a$ 分别是等腰三角形三边的长，且 a 是关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - x + k^2 + 1 = 0$ 的根，则 k 的值为_____.

【变式 1】. 等腰 $\triangle ABC$ 两边的长是关于 x 的方程 $x^2 - (2k+1)x + k^2 + k = 0$ 的两个实数根，第三边的长为 5，则 k 的值为_____.

题型 13 新定义、材料题

【典例 1】. 将关于 x 的一元二次方程 $x^2 - px + q = 0$ 变形为 $x^2 = px - q$ ，就可以将 x^2 表示为关于 x 的一次多项式，从而达到“降次”的目的，又如 $x^3 = x \cdot x^2 = x(px - q) = \dots$ 我们将这种方法称为“降次法”，通过这种方法可以化简次数较高的代数式. 根据“降次法”，已知： $x^2 + x - 1 = 0$ ，且 $x > 0$ ，则 $x^4 + 2x^3 - 3x$ 的值为_____.

【变式 1】. 定义：我们把关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与 $cx^2 + bx + a = 0$ ($ac \neq 0, a \neq c$) 称为一对“友好方程”. 如 $2x^2 - 7x + 3 = 0$ 的“友好方程”是 $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

(1) 写出一元二次方程 $x^2 + 3x - 10 = 0$ 的“友好方程”_____.

(2) 已知一元二次方程 $x^2 + 3x - 10 = 0$ 的两根为 $x_1 = 2, x_2 = -5$ ，它的“友好方程”的两根 $x_3 = \frac{1}{2}, x_4 =$ _____. 根据以上结论，猜想 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根 x_1, x_2 与其“友好方程” $cx^2 + bx + a = 0$ 的两根 x_3, x_4 之间存在的一种特殊关系为_____，证明你的结论.

(3) 已知关于 x 的方程 $2021x^2 + bx - c = 0$ 的两根是 $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2021}$. 请利用 (2) 中的结论，求出关于 x 的方程 $c(x-1)^2 - bx + b = 2021$ 的两根.

强化训练

一、单选题

1. 方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两根是 ()

A . $x = 1 \pm \sqrt{5}$

B . $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

C. $x = -1 \pm \sqrt{5}$ D. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

2. 用求根公式解一元二次方程 $5x^2 - 4x - 1 = 0$ 时, a, b, c 的值是 ()

A. $a = 5, b = -1, c = -4$ B. $a = 5, b = -4, c = 1$

C. $a = 5, b = -4, c = -1$ D. $a = 5, b = 4, c = 1$

3. 用公式法解方程 $x^2 - 5 = -7x$ 时, 二次项系数、一次项系数和常数项的值依次是 ()

A. $0, -5, -7$ B. $1, -7, -5$ C. $1, 7, -5$ D. $1, -5, -7$

4. 用公式法解方程 $4y^2 = 12y + 3$, 得到 ()

A. $y = \frac{-3 \pm \sqrt{6}}{2}$ B. $y = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}$

C. $y = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{2}$ D. $y = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

5. 在用求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 求一元二次方程的根时, 小慧同学正确地代入了 a, b, c , 得到

$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2}$, 则她求解的一元二次方程是 ()

A. $2x^2 + 3x - 1 = 0$ B. $2x^2 - 3x - 1 = 0$

C. $-2x^2 - 3x + 1 = 0$ D. $3x^2 - 2x - 1 = 0$

6. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0, b^2 - 4ac \geq 0)$ 的求根公式是 ()

A. $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$ B. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$

C. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ D. $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

7. 解下列方程: (1) $(x-2)^2 = 5$; (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$; (3) $x^2 - 4x - 896 = 0$, 较适当的方法为

()

A. (1) 直接开平方法 (2) 公式法 (3) 配方法

B. (1) 因式分解法 (2) 公式法 (3) 公式法

C. (1) 直接开平方法 (2) 因式分解法 (3) 配方法

D. (1) 直接开平方法 (2) 公式法 (3) 因式分解法

8. 利用公式法解得一元二次方程 $3x^2 - 11x - 1 = 0$ 的两个根为 a, b ，且 $a > b$ ，则 a 的值为 ()

- A. $\frac{-11+\sqrt{109}}{6}$ B. $\frac{-11+\sqrt{133}}{6}$ C. $\frac{11+\sqrt{109}}{6}$ D. $\frac{11+\sqrt{133}}{6}$

9. 关于 x 的方程 $x(x-1)=3(x-1)$ ，下列解法完全正确的是 ()

甲	乙	丙	丁
两边同时除以 $(x-1)$ 得到 $x=3$.	移项得： $x(x-1)-3(x-1)=0$, $\therefore (x-1)(x-3)=0$, $\therefore x-1=0$ 或 $x-3=0$, $\therefore x_1=1$, $x_2=3$.	整理得 $x^2-4x=-3$ $\therefore a=1$, $b=-4$, $c=-3$, $\therefore \Delta=b^2-4ac=28$ $\therefore x=\frac{4\pm\sqrt{28}}{2}=2\pm\sqrt{7}$ $\therefore x_1=2+\sqrt{7}$, $x_2=2-\sqrt{7}$.	整理得 $x^2-4x=-3$ 配方得： $x^2-4x+4=1$, $\therefore (x-2)^2=1$, $\therefore x-2=\pm 1$, $\therefore x_1=1$, $x_2=3$.

- A. 只有甲 B. 只有乙 C. 只有丙 D. 乙和丁

10. 定义新运算，对于两个不相等的实根 a, b ，我们规定符号 $\max\{a, b\}$ 表示 a, b 中较大值，如

$\max\{1, 3\}=3$ ，因此 $\max\{-1, -3\}=-1$ ，按照这样的规定，若 $\max\{x, -x\}=\frac{x^2-2x-1}{2}$ ，则 x 的值是 ()

- A. -1 或 $2+\sqrt{5}$ B. -1 C. 1 或 $2-\sqrt{5}$ D. 0 或 $2+\sqrt{5}$

二、填空题

11. 方程 $2x^2-5x+1=0$ 的解是_____.

12. 已知关于 m 的方程 $1+3m+m^2=0$ ，那么 $m=_____$.

13. 若一元二次方程的根为 $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 2\times 1}}{2\times 2}$ ，则该一元二次方程可以为_____.

14. 用公式法解方程 $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$ 时，其中求得的 b^2-4ac 的值是_____.

15. 若代数式 x^2-4x+1 的值与 $-3x+2$ 的值相等，则 x 的值为_____.

16. 用公式法解方程 $ax^2-bx-1=0(a>0)$ ，得_____.

17. 淇淇在计算正数 a 的平方时，误算成 a 与 2 的积，求得的答案比正确答案小 1，则正数 a 的值为_____.

18. 整体思想在解决数学问题中有重要作用. 例如，为将 $0.\dot{1}\dot{3}$ 表示成分数的形式，可设 $x = 0.\dot{1}\dot{3}$ ，得

$100x = 13.\dot{1}\dot{3}$ ，将 $13.\dot{1}\dot{3}$ 拆分为 $13 + x$ ，解出 x ，即得 $0.\dot{1}\dot{3}$ 的分数形式为_____；现有一个无限连分数

$2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{\dots}}}$ ，它的每一个分母都与原数完全一样，可求出此数的值为_____.

三、解答题

19. 用公式法解方程： $5x^2 - 4x - 1 = 0$.

20. 用公式法解下列方程：

(1) $x^2 - x - 2 = 0$ ；

(2) $\frac{4}{3}x^2 - 4x - \frac{1}{3} = 0$ ；

(3) $x^2 - 2\sqrt{5}x - 4 = 0$ ；

(4) $(x+1)(x-3) = 6$.

21. 用公式法解下列方程：

(1) $4x^2 + 9 = 12x$.

(2) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = 0$.

(3) $2x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$.

(4) $0.1y^2 - y - 0.2 = 0$.

22. 用适当的方法解下列方程：

(1) $(3x-1)(x-2) = (4x+1)(x-2)$

(2) $4x^2 - 20x + 25 = 7$

(3) $3x^2 - 4x - 1 = 0$

(4) $x^2 + 2x - 4 = 0$

23. 阅读理解：小明同学进入初二以后，读书越发认真. 在学习“用因式分解法解方程”时，课后习题中有这样一个问题：

下列方程的解法对不对？为什么？ $(x+3)(x-10)=1$

解： $(x+3)=1$ 或 $(x-10)=1$.

解得 $x = -2$ 或 $x = 11$.

所以 $x_1 = -2$, $x_2 = 11$.

同学们都认为不对，原因：有的说该题的因式分解是错误的；有的说将答案代入方程，方程左右两边不成立，等等 .

小明同学除了认为该解法不正确，还给出了一种因式分解的做法，小明同学的做法如下：

取 $(x+3)$ 与 $(x-10)$ 的平均值 $\left(x-\frac{7}{2}\right)$ ，即将 $(x+3)$ 与 $(x-10)$ 相加再除以 2 .

那么原方程可化为 $\left(x-\frac{7}{2}+\frac{13}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}-\frac{13}{2}\right)=1$

左边用平方差公式可化为 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 1$.

再移项，开平方可得 $x = \frac{7 \pm \sqrt{173}}{2}$

请你认真阅读小明同学的方法，并用这个方法推导：

关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的求根公式 (此时 $b^2 - 4ac \geq 0$) .

24 . 阅读下面的材料：

解方程 $x^2 - |x| - 2 = 0$.

解：当 $x > 0$ 时，原方程化为 $x^2 - x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = -1$ (不合题意，舍去)；

当 $x = 0$ 时， $-2 = 0$ ，矛盾，舍去；

当 $x < 0$ 时，原方程化为 $x^2 + x - 2 = 0$

解得 $x_1 = -2, x_2 = 1$ (不合题意，舍去) .

综上所述，原方程的根是 $x_1 = 2, x_2 = -2$.

请参照上面材料解方程 .

(1) $x^2 - |x-1| - 1 = 0$;

(2) $x^2 = |2x-1| + 4$.

25. 综合与探究：如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个实数根，且其中一个根比另一个根大 1，那么称这样的方程是“邻根方程”。例如：一元二次方程 $x^2 + x = 0$ 的两个根是 $x_1 = 0$ ， $x_2 = -1$ ，则方程： $x^2 + x = 0$ 是“邻根方程”。

(1) 通过计算，判断下列方程是否是“邻根方程”：

① $x^2 + x - 6 = 0$ ； ② $2x^2 - 2\sqrt{5}x + 2 = 0$ 。

(2) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m-2)x - 2m = 0$ (m 是常数) 是“邻根方程”，求 m 的值。