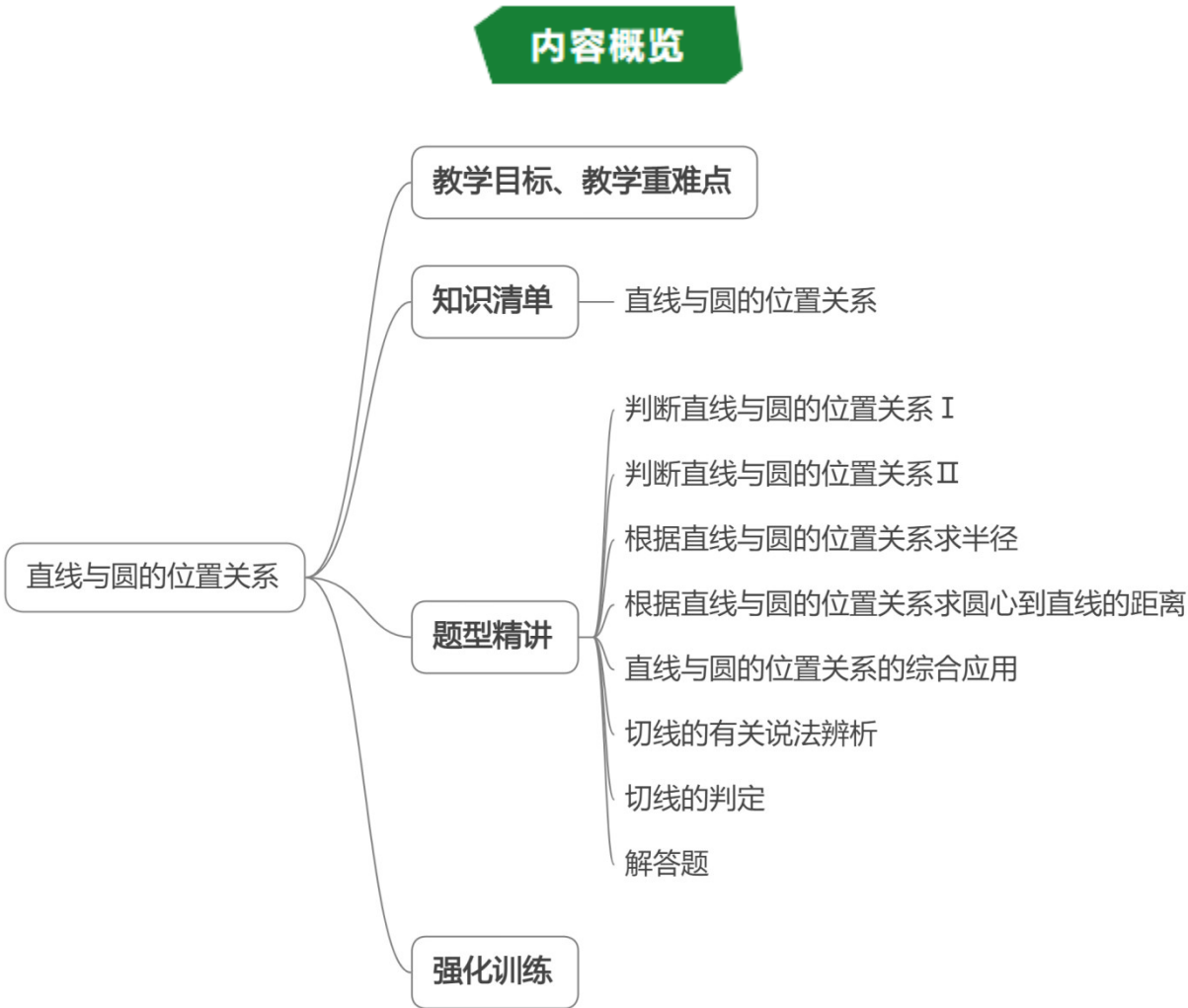


专题 27.4 直线与圆的位置



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 了解直线与圆的三种位置关系； 2. 会判定直线与圆的三种位置关系，并根据位置关系求长度或距离； 3. 掌握切线的判定定理；直线与圆的位置关系的综合应用。
教学重难点	1.重点 (1) 判断直线与圆的位置关系； (2) 根据直线与圆的位置关系求解； (3) 切线的判定及其应用。 2.难点

- (1) 根据直线与圆的位置关系求参数范围；
- (2) 直线与圆的位置关系的综合应用。

知识清单

知识点1 直线与圆的位置

一、直线和圆的位置关系

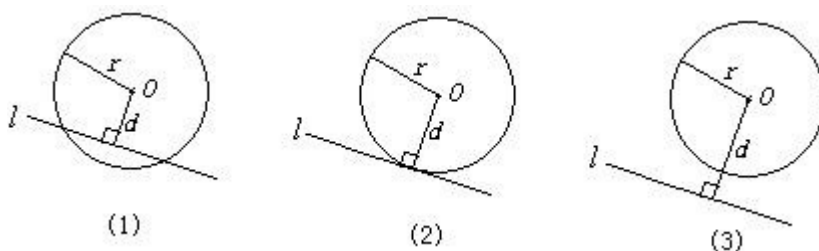
1. 直线和圆的三种位置关系：

- (1) 相交：直线与圆有两个公共点时，叫做直线和圆相交。这时直线叫做圆的割线。
- (2) 相切：直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切。这时直线叫做圆的切线，唯一的公共点叫做切点。
- (3) 相离：直线和圆没有公共点时，叫做直线和圆相离。

2. 直线与圆的位置关系的判定和性质。

直线与圆的位置关系能否像点与圆的位置关系一样通过一些条件来进行分析判断呢？

由于圆心确定圆的位置，半径确定圆的大小，因此研究直线和圆的位置关系，就可以转化为直线和点(圆心)的位置关系。下面图(1)中直线与圆心的距离小于半径；图(2)中直线与圆心的距离等于半径；图(3)中直线与圆心的距离大于半径。



如果 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，那么

- (1) 直线 l 和 $\odot O$ 相交 $\Leftrightarrow d < r$;
- (2) 直线 l 和 $\odot O$ 相切 $\Leftrightarrow d = r$;
- (3) 直线 l 和 $\odot O$ 相离 $\Leftrightarrow d > r$.

要点：

这三个命题从左边到右边反映了直线与圆的位置关系所具有的性质；从右边到左边则是直线与圆的位置关系的判定。

二、切线的判定定理

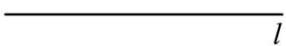
切线的判定定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。

要点：

切线的判定方法：

- (1) 定义：直线和圆有唯一公共点时，这条直线就是圆的切线；
- (2) 定理：和圆心的距离等于半径的直线是圆的切线；
- (3) 判定定理：经过半径外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。(切线的判定定理中强调两点：一是直线与圆有一个交点，二是直线与过交点的半径垂直，缺一不可)。

【即学即练】

1. 已知 $\odot O$ 的半径为7，直线 l 上有一点 P 满足 $PO=5$ ，则直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是()
 A. 相切 B. 相离 C. 相离或相切 D. 相交
2. 已知直线 l 与 $\odot O$ 相交，圆心 O 到直线 l 的距离为4，则 $\odot O$ 的半径可能是()
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 已知圆的半径等于5，直线 l 与圆没有交点，则圆心到直线 l 的距离 d 的取值范围是_____.
4. 在平面直角坐标系中，以点 $A(4,3)$ 为圆心，以 R 为半径作圆 A 与 x 轴相切，则圆 A 的半径 R 是()
 A. 3 B. 4 C. 5 D. $2\sqrt{3}$
5. 如图，已知点 O 到直线 l 的距离为5，如果在以点 O 为圆心的圆上有且只有两个点到直线 l 的距离为2，那么这个圆的半径长 r 的取值范围是()

 A. $2 < r < 5$ B. $3 \leq r < 5$ C. $2 < r \leq 7$ D. $3 < r < 7$

题型精讲

题型 01 判断直线与圆的位置关系I

- 【典例 1】** . 已知 $\odot O$ 的半径为3，圆心 O 到直线的距离为2，则 $\odot O$ 与直线的位置关系是()
 A. 相切 B. 相交 C. 相离 D. 相交或相离
- 【变式 1】** . 已知 $\odot O$ 的半径为2，直线 l 上有一点 M . 若 $OM=2$ ，则直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是()
 A. 相交 B. 相离或相交 C. 相离或相切 D. 相交或相切
- 【变式 2】** . 已知 $\odot O$ 的半径为1，直线 l 上有一点 P 满足 $PO=1$ ，则直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是()
 A. 相切 B. 相离
 C. 相切或相离 D. 相切或相交

题型 02 判断直线与圆的位置关系II

- 【典例 1】** . 设 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，并且方程 $x^2 - 2\sqrt{d}x + r = 0$ 无实数根，则直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是()
 A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不能确定

【变式1】 . 已知 $\odot O$ 的半径是关于 x 的方程 $\frac{3}{x-2} - \frac{kx-1}{x-2} = 1$ 的增根，圆心 O 到直线 l 的距离 $d = 2$ ，则直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是 ()

- A . 相切 B . 相交 C . 相离 D . 平行

【变式2】 . 在平面直角坐标系 xOy 中， $\odot O$ 的半径为 2.5，直线 l 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 3$ ，那么直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是 ()

- A . 相离 B . 相切 C . 相交 D . 无法确定

题型 03 根据直线与圆的位置求半径

【典例1】 . 已知直线 l 与 $\odot O$ 相交，圆心 O 到直线 l 的距离为 4，则 $\odot O$ 的半径可能是 ()

- A . 2 B . 3 C . 4 D . 5

【变式1】 . $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3\text{cm}$ ， $BC = 4\text{cm}$ ，以 C 为圆心， r 为半径作圆，若圆 C 与直线 AB 相切，则 r 的值为 ()

- A . 2cm B . 2.4cm C . 3cm D . 4cm

【变式2】 . 如果一圆的半径为 R ，圆心到直线的距离为 5，且这个圆与这条直线有公共点，那么下列结论正确的是 ()

- A . $R > 5$ B . $R = 5$ C . $0 < R < 5$ D . $0 < R \leq 5$

【变式3】 . 已知 $\odot O$ 的圆心到直线 l 的距离是一元二次方程 $x^2 - x - 20 = 0$ 的一个根，若 $\odot O$ 与直线 l 相离， $\odot O$ 的半径可取的值为 ()

- A . 4 B . 5 C . 6 D . 7

题型 04 根据直线与圆的位置求圆心到直线的距离

【典例1】 . 已知 $\odot O$ 的半径是 5，直线 l 与 $\odot O$ 相交，圆心 O 到直线 l 的距离可能是 ()

- A . 4 B . 5 C . 6 D . 10

【变式1】 . $\odot O$ 的直径为 10，直线 l 与 $\odot O$ 相交，圆心 O 到 l 的距离为 d ，下列结论正确的是 ()

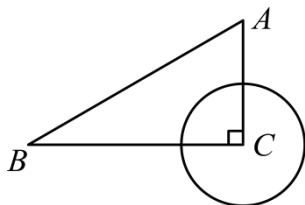
- A . $d > 5$ B . $d < 5$ C . $d = 5$ D . $d = 10$

【变式2】 . 已知 $\odot O$ 的半径为 $\sqrt{3}\text{cm}$ ，直线 l 与圆有公共点，且直线 l 和圆心 O 的距离为 $d\text{cm}$ ，则 ()

- A. $d = \sqrt{3}$ B. $0 \leq d \leq \sqrt{3}$ C. $d > \sqrt{3}$ D. $0 < d < \sqrt{3}$

题型 05 直线与圆的位置的综合应用

【典例 1】. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, \angle B = 30^\circ, BC = 4$, 若 $\odot C$ 与 AB 相离, 则半径为 r 满足 ()

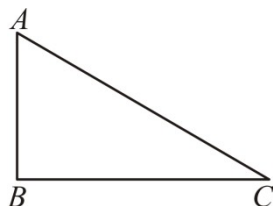


- A. $r > 2$ B. $r = 2$ C. $0 < r < 2$ D. $0 < r < 2\sqrt{3}$

【变式 1】. 在 $\square ABCD$ 中, $BC = 5, S_{\square ABCD} = 20$. 如果以顶点 C 为圆心, BC 为半径作 $\odot C$, 那么 $\odot C$ 与边 AD 所在直线的公共点的个数是 ()

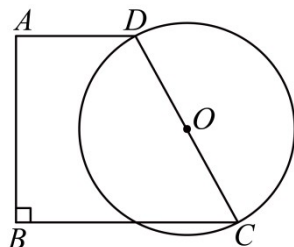
- A. 3 个 B. 2 个 C. 1 个 D. 0 个

【变式 2】. 如图, 已知 $Rt\triangle ABC$, $AC=8, AB=4$, 以点 B 为圆心作圆, 当 $\odot B$ 与线段 AC 只有一个交点时, 则 $\odot B$ 的半径的取值范围是 ()



- A. $r_B = 2\sqrt{3}$ B. $4 < r_B \leq 4\sqrt{3}$
C. $r_B = 2\sqrt{3}$ 或 $4 < r_B \leq 4\sqrt{3}$ D. r_B 为任意实数

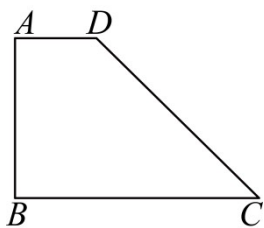
【变式 3】. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, \angle B = 90^\circ, CD = 16, BC = AD + 6$, 如果以 CD 为直径的圆与梯形 $ABCD$ 各边共有 3 个公共点 (C, D 两点除外), 那么 AD 长的取值范围是 ()



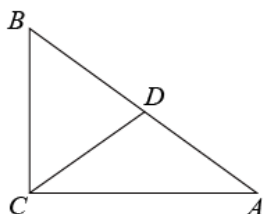
- A. $5 < AD < 16$ B. $5 \leq AD < 8$ C. $5 \leq AD \leq 8$ D. $0 < AD < 5$

【变式 4】. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, \angle B = 90^\circ, AD = 1, AB = 2, BC = 3$, 点 O 是边 BC 上

一点，以 O 为圆心， OC 为半径的 $\odot O$ ，与边 AD 只有一个公共点时，则 OC 的取值范围是_____。



【变式 5】 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\cos A = \frac{4}{5}$ ， CD 为 AB 边上的中线， $CD = 5$ ，以点 B 为圆心， r 为半径作 $\odot B$ 。如果 $\odot B$ 与中线 CD 有且只有一个公共点，那么 $\odot B$ 的半径 r 的取值范围为_____。



题型 06 切线有关说法辨析

【典例 1】 下列说法中，正确的是 ()

- A. 垂直于半径的直线是圆的切线；
- B. 经过半径的外端且垂直于半径的直线是圆的切线；
- C. 经过半径的端点且垂直于半径的直线是圆的切线；
- D. 到圆心的距离等于直径的直线是圆的切线。

【变式 1】 下列说法正确的是 ()

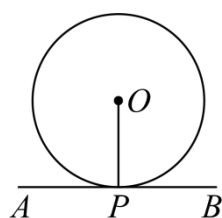
- A. 与圆有公共点的直线是圆的切线
- B. 到圆心的距离等于圆的半径的直线是圆的切线
- C. 垂直于圆的半径的直线是圆的切线
- D. 过圆的半径外端的直线是圆的切线

【变式 2】 下列说法正确的是 ()

- A. 与圆有公共点的直线是圆的切线
- B. 三角形的内心到三角形三个顶点距离相等
- C. 和半径垂直的直线是圆的切线
- D. 到圆心的距离等于圆的半径的直线是圆的切线

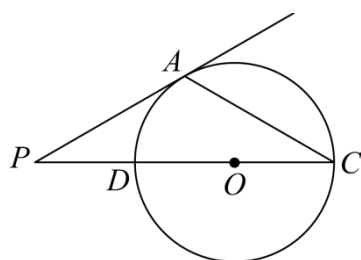
题型 07 切线的判定

【典例 1】 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 5，直线 AB 经过 $\odot O$ 上一点 P ，下列条件不能判定直线 AB 与 $\odot O$ 相切的是 ()



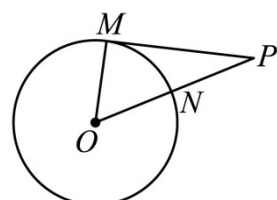
- A. $OP = 5$ B. $\angle APO = \angle BPO$ C. 点 O 到直线 AB 的距离是 5 D. $OP \perp AB$

【变式 1】 . 如图, P 是 $\odot O$ 的直径 CD 的延长线上一点, $\angle P = 30^\circ$, 则当 $\angle ACP = (\quad)$ 时, 直线 PA 是 $\odot O$ 的切线.



- A. 20° B. 30° C. 15° D. 25°

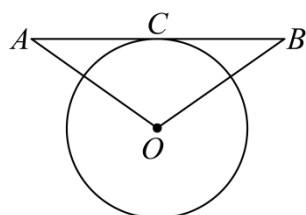
【变式 2】 . 如图所示, $\triangle POM$ 中, 点 M 在 $\odot O$ 上, 点 P 在 $\odot O$ 外, OP 交 $\odot O$ 于点 N , 以下条件不能判定 PM 是 $\odot O$ 的切线的是 ()



- A. $\angle O + \angle P = 90^\circ$ B. $\angle O + \angle P = \angle OMP$
C. $OM^2 + PM^2 = OP^2$ D. 点 N 是 OP 的中点

题型 08 解答题

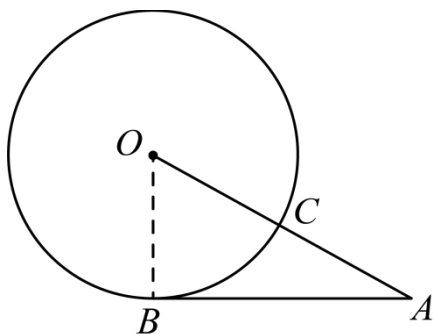
【典例 1】 . 如图, 直线 AB 经过 $\odot O$ 上的点 C , 并且 $OA = OB$, $CA = CB$.



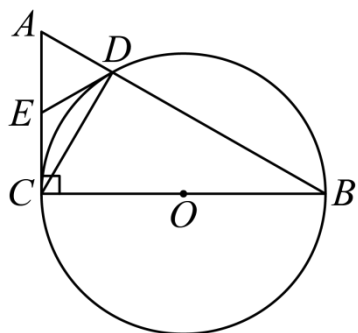
(1) 求证: 直线 AB 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的直径为 8 cm , $AB = 10\text{ cm}$, 求 $\cos \angle A$ 的值.

【变式1】 . 如图， $\angle AOB = 60^\circ$ ，以 OB 为半径的 $\odot O$ 交 OA 于点 C ，且 $OC = CA$ ，求证： AB 是 $\odot O$ 的切线 .



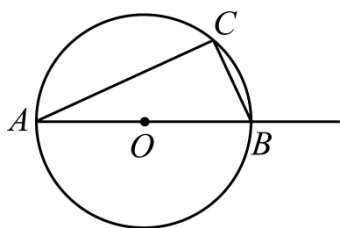
【变式2】 . 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，以 BC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于点 D ，点 E 为 AC 的中点，连接 DE .



(1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\angle ABC = 30^\circ$ ， $DE = 5$ ，求 BD 的长 .

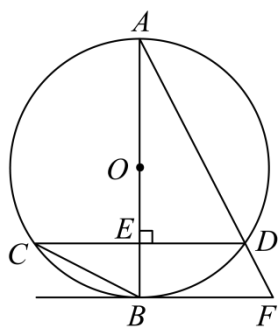
【变式3】 . 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，直径 $AB = 4\text{cm}$ ， $\angle A = 25^\circ$.



(1) 以点 C 为顶点， BC 为边，在 BC 的右侧作 $\angle BCP = \angle A$ ，交 AB 的延长线于点 P ：（要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）

(2) 在 (1) 所作的图中，求证： CP 是 $\odot O$ 的切线 .

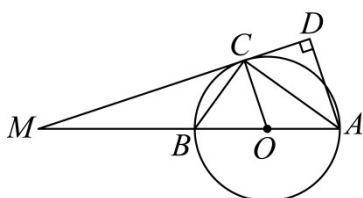
【变式4】 . 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ，垂足为点 E ，直线 BF 与 AD 延长线交于点 F ，且 $\angle AFB = \angle ABC$.



(1) 求证：直线 BF 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $CD = 12$, $BE = 3$, 求 $\odot O$ 的半径.

【变式5】 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C 是 $\odot O$ 上一点，过点 C 的直线交 AB 的延长线于点 M ，作 $AD \perp MC$ ，垂足为 D ，已知 AC 平分 $\angle MAD$.



(1) 求证： MC 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $AB = BM = 4$ ，求 $\tan \angle MAC$ 的值.

强化训练

一、单选题

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3\text{cm}$ ， $BC = 4\text{cm}$ ，以点 C 为圆心， 2cm 长为半径的圆与 AB 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不能确定

2. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，若以 2 为半径作 $\odot C$ ，则斜边 AB 与 $\odot C$ 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 相离 C. 相切 D. 无法确定

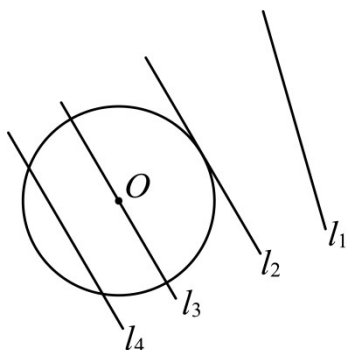
3. 若 $\odot O$ 的半径为 R ，直线 l 与 $\odot O$ 有公共点，若圆心到直线 l 的距离为 d ，则 d 与 R 的大小关系是 () .

- A. $d > R$ B. $d < R$ C. $d \geq R$ D. $d \leq R$

4. 已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切于点 A ， $\odot O_1$ 的半径等于 5 ， $O_1 O_2 = 3$ ，那么 $O_2 A$ 的长等于 ()

- A. 2 B. 3 C. 8 D. 2 或 8

5. 如图，若 $\odot O$ 的直径为 2，点 O 到某条直线的距离为 2，则这条直线可能是 ()

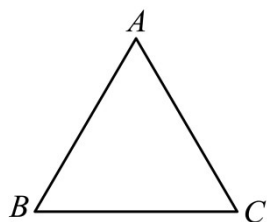


- A. 直线 l_1 B. 直线 l_2 C. 直线 l_3 D. 直线 l_4

6. 在平面直角坐标系中有点 $A(3, 4)$ ，以点 A 为圆心，5 为半径画圆，在同一坐标系中直线 $y = -x$ 与 $\odot A$ 的位置关系是 ()

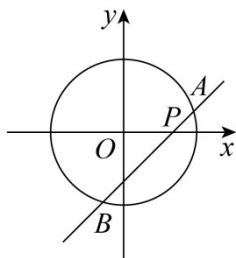
- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 以上都有可能

7. 已知等边三角形 ABC 的边长为 4cm，以点 A 为圆心，以 3.5cm 长为半径作 $\odot A$ ，则 $\odot A$ 与 BC 的位置关系是 ()



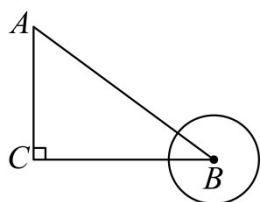
- A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 外离

8. 如图，在平面直角坐标系中， $\odot O$ 的半径是 1，直线 AB 与 x 轴交于点 $P(x, 0)$ ，且与 x 轴的正半轴夹角为 45° ，若直线 AB 与 $\odot O$ 有公共点，则 x 值的范围是 ()



- A. $-1 \leq x \leq 1$ B. $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ C. $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ D. $0 \leq x \leq \sqrt{2}$

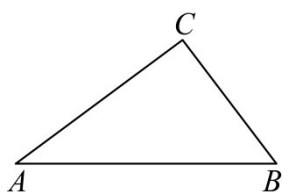
9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $\odot B$ 的半径为 1，已知 $\odot A$ 与直线 BC 相交，且与 $\odot B$ 没有公共点，那么 $\odot A$ 的半径可以是 ()



- A . 4 B . 5 C . 6 D . 7.

10. 如果两个圆相交，且其中一个圆的圆心在另一个圆的圆内时，我们称此两圆的位置关系为“内相交”。

如图1，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，点 O 在边 AC 上。如果 $\odot C$ 与直线 AB 相切，以 OA 为半径的 $\odot O$ 与 $\odot C$ “内相交”，那么 OA 的长度可以是（ ）



- A . $\frac{16}{5}$ B . $\frac{12}{5}$ C . $\frac{8}{5}$ D . $\frac{4}{5}$

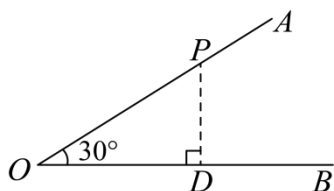
二、填空题

11. 已知直线 l 与 $\odot O$ 相交，圆心 O 到直线 l 的距离为5cm，则 $\odot O$ 的半径可能为_____ cm。（只写一个）

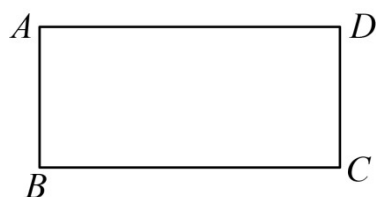
12. 已知一条直线 l 与半径为 r 的 $\odot O$ 相交，且点 O 到直线 l 的距离为2，则 r 的取值范围是_____。

13. 已知 $\odot O$ 的半径是4，圆心 O 到直线 l 的距离是3，则直线 l 与 $\odot O$ 的公共点有_____个。

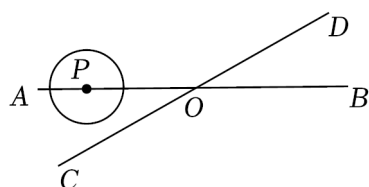
14. 已知 $\angle AOB = 30^\circ$ ， P 是 OA 上的一点， $OP = 4$ cm，以 r 为半径作 $\odot P$ ，若 $r = \sqrt{3}$ cm，则 $\odot P$ 与 OB 的位置关系是_____，若 $\odot P$ 与 OB 相离，则 r 满足的条件是_____。



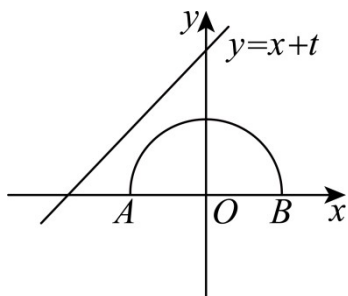
15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $BC = 5$ ， $AB = 2$ ， $\odot O$ 是以 BC 为直径的圆，则直线 AD 与 $\odot O$ 的位置关系是_____。



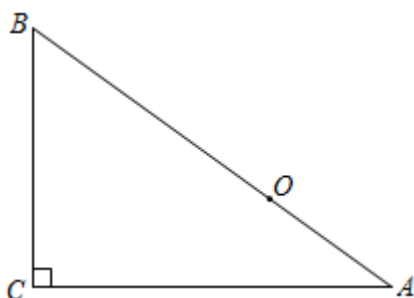
16. 如图，直线 AB ， CD 相交于点 O ， $\angle AOC = 30^\circ$ ，圆 P 的半径为 1cm ，动点 P 在直线 AB 上从点 O 左侧且距离 O 点 6cm 处，以 1cm/s 的速度向右运动，当圆 P 与直线 CD 相切时，圆心 P 的运动时间为 _____ s 。



17. 如图，半圆的圆心与坐标原点重合，半圆的半径 1 ，直线 l 的解析式为 $y = x + t$ 。若直线 l 与半圆有交点，则 t 的取值范围是_____。

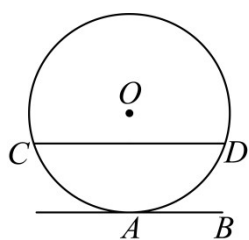


18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 9$ ， $AC = 12$ ，点 O 在边 AB 上，且 $BO = 2OA$ ，以点 O 为圆心， r 为半径作圆，如果 $\odot O$ 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的边共有 4 个公共点，那么半径 r 取值范围是_____。



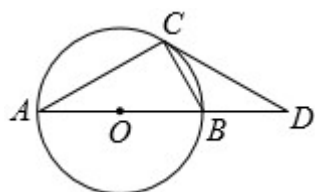
三、解答题

19. 如图，在 $\odot O$ 中， CD 是 $\odot O$ 的弦，点 A 是 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点，过点 A 作直线 $AB \parallel CD$ 。求证： AB 是 $\odot O$ 的切线。



20. 如图， C 是 $\odot O$ 上一点，点 D 在直径 AB 的延长线上， $\odot O$ 的半径为 6， $DB = 4$ ， $DC = 8$.

求证： DC 是 $\odot O$ 的切线.



21. (1) 如图 1，点 A 在圆上，在方格纸中，仅用无刻度直尺过点 A 画出圆的切线；

(2) 如图 2，点 P 在圆 O 外，用圆规直尺作出过点 P 的圆的一条切线.

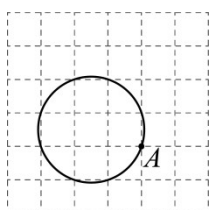


图1

$P \cdot$

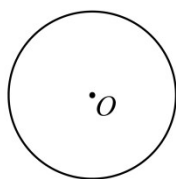
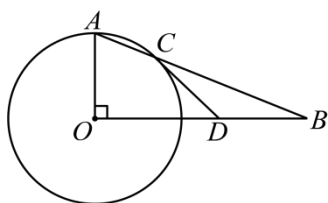


图2

22. 如图，在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ，以点 O 为圆心， OA 长为半径的圆交 AB 于点 C ，点 D 在边 OB 上，且 $CD = BD$.



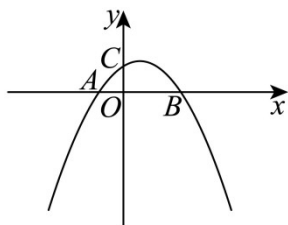
(1) 判断直线 CD 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $\tan \angle ODC = \frac{24}{7}$ ， $OB = 32$ ，求 $\odot O$ 的半径.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，以 AB 边为直径作 $\odot O$ 交 BC 于点 D ，过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E ， ED ， AB 的延长线交于点 F .

(2)若 $BF=4$, 且 $\sin F=\frac{3}{5}$, 求 $\odot O$ 的半径与线段 AE 的长 .

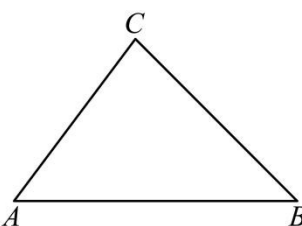
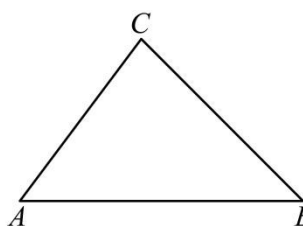
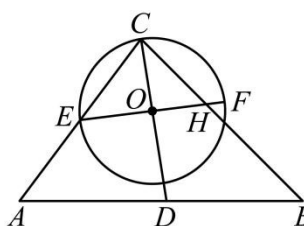
24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴负半轴交于点 A 、与 x 轴正半轴交于点 B ，与 y 轴正半轴交于点 C ，已知 $AO = OC = \frac{1}{2}OB$.



(2) 将抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 平移，平移后得到新抛物线与 y 轴负半轴交于点 P 。

②在原抛物线对称轴右侧部分上取一点 E ，使得 $\angle OCE = \angle CBA$ ，记点 E 在新抛物线上的对应点为 F ，如果点 F 在 CE 的延长线上，且 $OP = 3OB$ ，求平移后的新抛物线的顶点坐标．

25. 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=5$, $AB=7$, $\cos A=\frac{3}{5}$, D 是边 AB 上一动点, 连接 CD . 点 O 在线段 CD 上, 且 $\frac{CO}{OD}=\frac{4}{5}$, 以点 O 为圆心, CO 为半径作 $\odot O$, 交边 AC 于点 E .



- (1) 当点 D 与点 A 重合时，判断 $\odot O$ 与边 AB 的位置关系并说明理由；
- (2) 已知点 F 在 $\odot O$ 上，且 $\angle E = \angle F$ ， EF 与边 BC 交于点 H ，当 EF 经过圆心 O 时（如图），求 $\frac{EH}{EF}$ 的值；
- (3) 过点 D 作 $DP \parallel AC$ ，交边 BC 于点 P ，当 $\odot O$ 与线段 DP 只有一个交点时，求 BD 的取值范围．