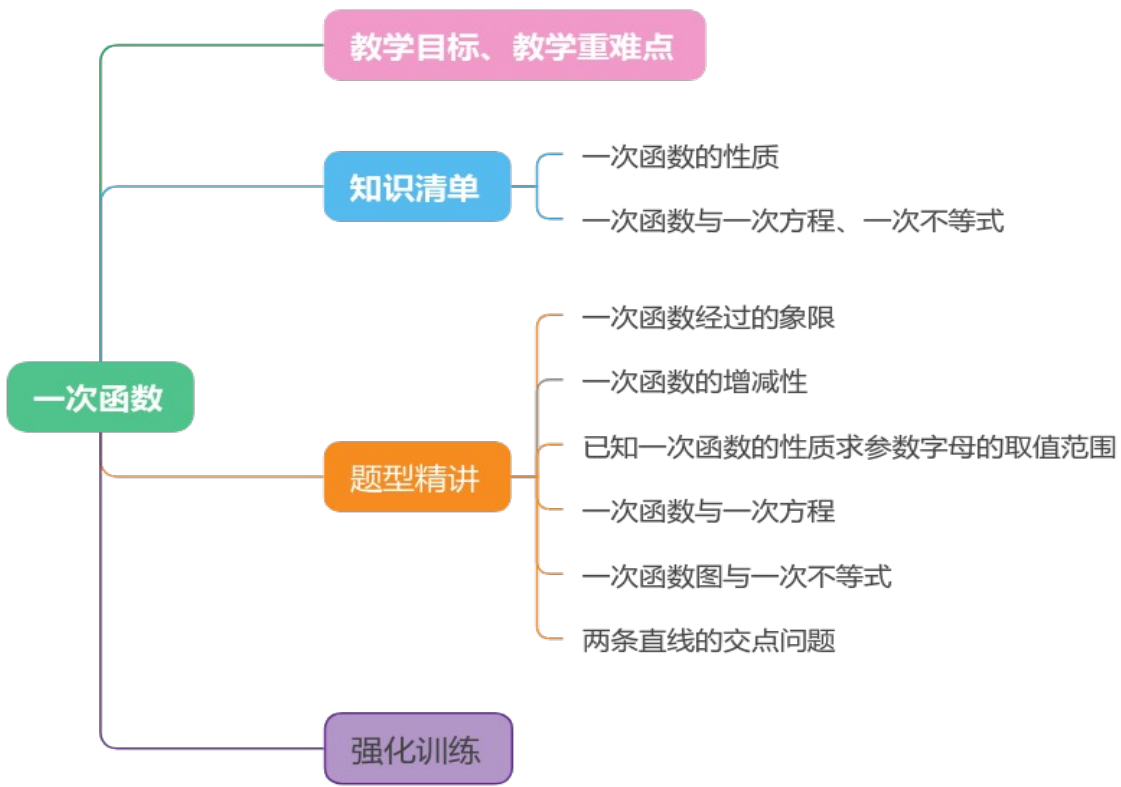


专题 25.4 一次函数(性质及与一次方程、一次不等式的关系)

内容概览



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 理解一次函数的性质，当 $k > 0$ 时，直线必过第一、三象限， y 随 x 增大而增大； 当 $k < 0$ 时，直线必过第二、四象限， y 随 x 增大而减小； 2. 理解一次函数与一次方程、一次不等式的关系，会用方程的思想求直线上的点以及两条直线的交点坐标，反之会根据函数的图像和性质来解答特殊的方程（组）与不等式；
教学重难点	1.重点 理解一次函数的性质，一次函数与一次方程一次不等式的关系； 2.难点 利用一次函数的性质解答有关方程、不等式的问题.

知识清单

知识点 01 一次函数的性质

1. 直线经过的象限

(1) $k > 0$

直线 $y=kx+b$ 必过第_____象限，若 $b > 0$ ，直线 $y=kx+b$ 与 y 轴交于_____半轴，若 $b < 0$ ，与 y 轴交于_____半轴；

(2) $k < 0$

直线 $y=kx+b$ 必过第_____象限，直线 $y=kx+b$ 与 y 轴交于_____半轴，若 $b < 0$ ，与 y 轴交于_____半轴；

【即学即练】

例 1 填空

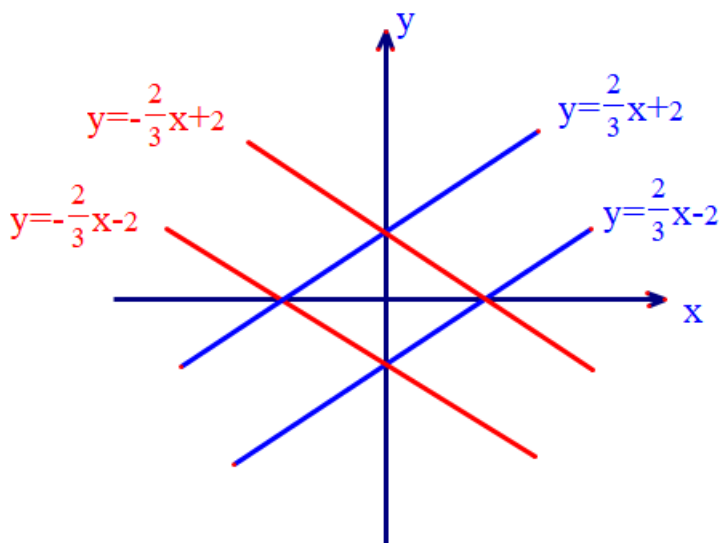
(1) 直线 $y=\frac{2}{3}x+2$ 经过第_____象限；

(2) 直线 $y=-\frac{2}{3}x+2$ 经过第_____象限；

(3) 直线 $y=-\frac{2}{3}x-2$ 经过第_____象限；

(4) 直线 $y=\frac{2}{3}x-2$ 经过第_____象限；

【点睛】直线经过的象限类型较多，不要死记硬背，只要理解正比例函数性质及直线上下平移规律即可。



2.一次函数的增减性

(1) $k > 0$

函数的图像从左往右看图像是_____的， y 随着 x 的增大而_____；

(2) $k < 0$

函数的图像从左往右看图像是_____的， y 随着 x 的增大而_____；

3.延伸：斜率 k 对直线的影响

(1) 在一次函数中， k 叫作一次函数的**斜率**，它不经决定了函数的**增减性**和直线的**趋势**，还决定了直线与 y 轴夹角的大小。 $|k|$ 越大，图像越“**陡**”与 y 轴的**夹角越小**； $|k|$ 越小，图像越“**平缓**”与 y 轴的**夹角越大**；

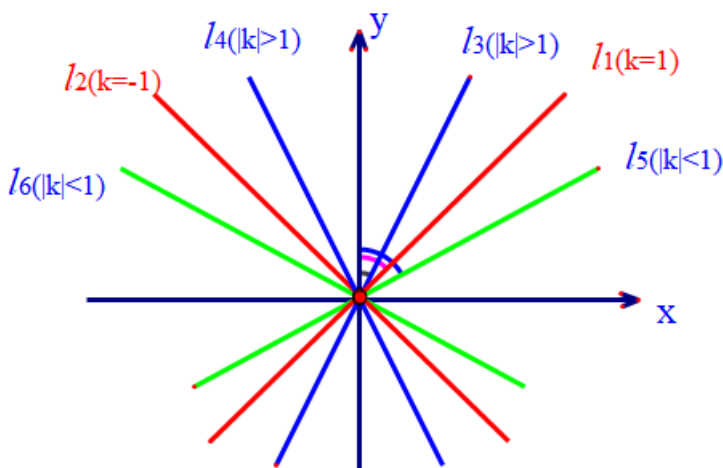
其中，当 $k=1$ 、 $k=-1$ 时，直线 $y=x$ 为一、三象限的角平分线，直线 $y=-x$ 为二、四象限的角平分线，直线 $y=x+b$ 和直线 $y=-x+b$ 与 y 轴夹角都为 45° ，如图中的 l_1 与 l_2 。

(2) k 相等

如果两条直线的 k 相等，意味着斜率相同，所以这两条直线是_____或重合的。

(3) k 相反

如果两条直线的 k 相反， b 相等，意味着这两条直线关于 y 轴成**轴对称**。如图中的 l_1 与 l_2 ， l_3 与 l_4 ， l_5 与 l_6 。



4.b 对直线的影响

b 叫作一次函数的_____，它决定了直线与_____轴交点的_____。

【即学即练】

例2 已知一次函数 $y = kx - m - 2x$ 的图象与 y 轴的负半轴相交，且函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，则下列结论正确的是（ ）

- A. $k < 0$, $m < 0$ B. $k < 2$, $m < 0$ C. $k > 2$, $m > 0$ D. $k < 2$, $m > 0$

解： $y = kx - m - 2x = (k - 2)x - m$,

$\because$ 一次函数的图象与 y 轴的负半轴相交，且函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，

$\therefore -m < 0$, $k - 2 < 0$,

$\therefore m > 0$, $k < 2$,

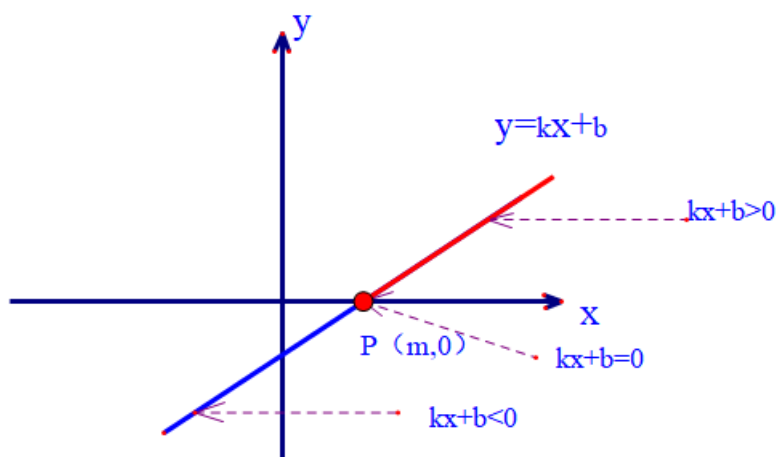
故选：D.

知识点 02 一次函数与一次方程、一次不等式的关系

1. 与一次方程和一次不等式的关系

如图所示，直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交于点 P ，则

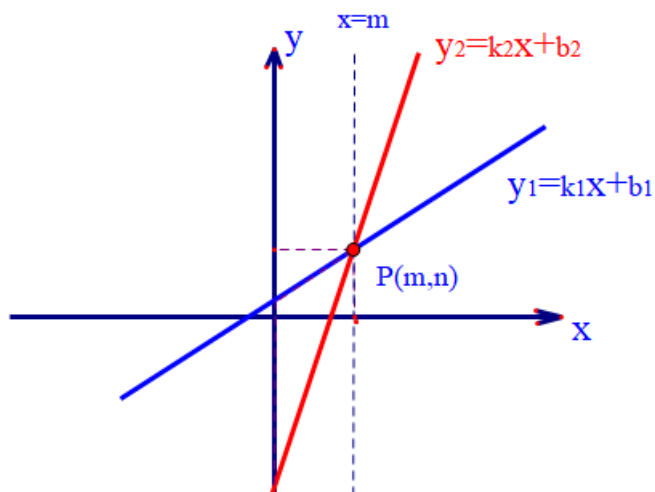
- (1) P 点的横坐标 $x=$ _____ 就是方程 $kx+b=0$ 的解；
- (2) 直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上方的部分（图中红线）它所对应的 x 的范围 _____ 就是不等式 $kx+b>0$ 的解集；
- (3) 直线 $y=kx+b$ 在 x 轴下方的部分（图中蓝线）它所对应的 x 的范围 _____ 就是不等式 $kx+b<0$ 的解集；



2. 两条直线相交（与一次方程组和不等式组的关系）

如图所示，

- (1) 两条直线交于点 $P(m,n)$ ，表示方程组 $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ 的解是 _____；
- (2) 直线 $x=m$ 右侧部分的图像表示，当自变量 $x>m$ 时，无论 x 取何值，(比较大小的) y_2 _____ y_1 ；
- (3) 直线 $x=m$ 左侧部分的图像表示，当自变量 $x<m$ 时，无论 x 取何值，(比较大小的) y_2 _____ y_1 ；

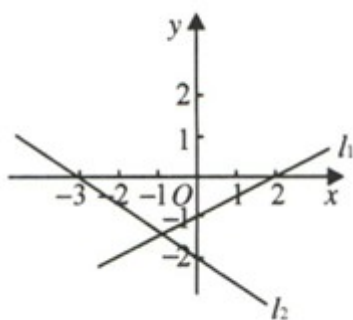


说明：

我们可以利用一次函数的图像来解答一次方程（组）和一元一次不等式（组），反之也可以利用方程和不等式来帮助解答函数的有关问题.

例2 如图所示，已知一次函数 $y_1 = k_1x + b_1$ 和 $y_2 = k_2x + b_2$ 的图象分别是直线 l_1 和 l_2 ，根据图象填空：

- (1) 方程 $k_1x + b_1 = 0$ 的根是____；不等式 $k_1x + b_1 > 0$ 的解集是_____；
- (2) 不等式 $k_2x + b_2 < 0$ 的解集是_____；
- (3) l_1 与 l_2 的交点坐标是_____；
- (4) 如果 $y_1 < y_2$ ，自变量的取值范围是_____.



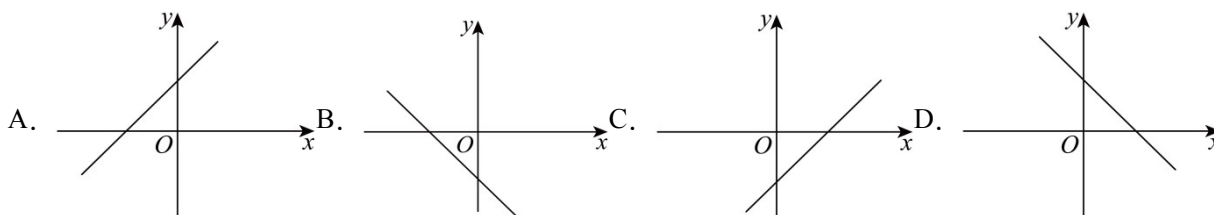
题型精讲

题型 01 一次函数图像经过的象限

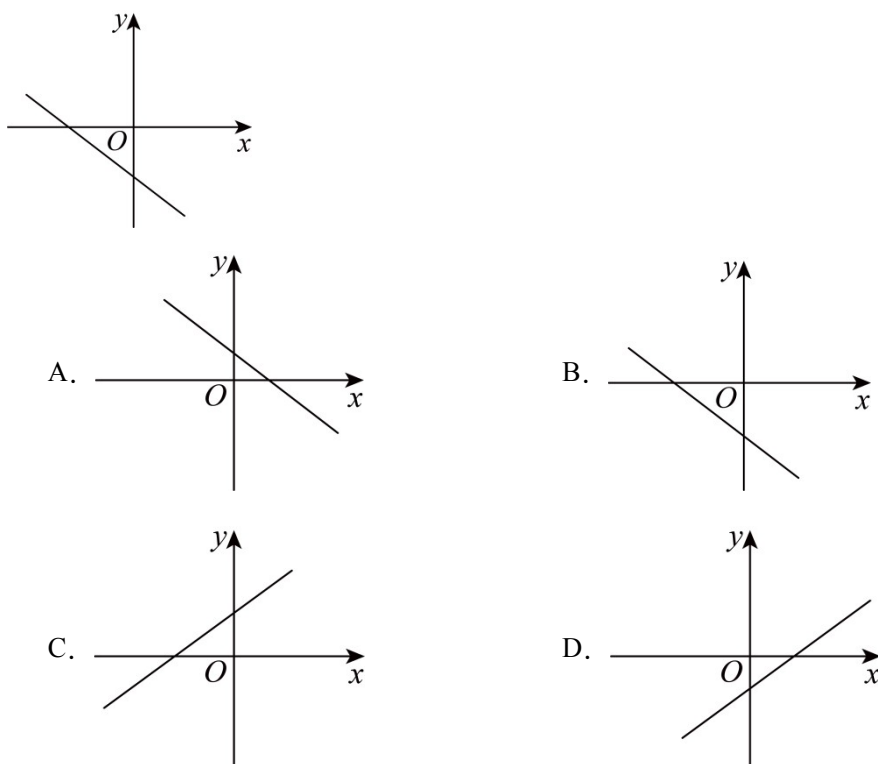
【典例1】在平面直角坐标系中，直线 $y = -3x + 12$ 经过的象限有（ ）

- A. 第一、二、三象限 B. 第一、二、四象限
C. 第二、三、四象限 D. 第一、三、四象限

【变式1】在平面直角坐标系中，一次函数 $y = x - 1$ 的图象大致是（ ）



【变式2】如图，是函数 $y = kx + b$ 的图象，则函数 $y = bx - k$ 的图象可能是（ ）



【变式3】一次函数 $y = -4x + 3$ 的图象不经过（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【变式4】一次函数 $y = 2x + b$ （ b 是常数， $b > 0$ ）的图象不经过第_____象限.

题型 02 一次函数的增减性

【典例1】函数 $y = -7x + 1$ 中，图象经过第_____象限，图象自左向右呈_____（填“上升”或“下降”）趋势， y 随 x 的增大而_____（填“增大”或“减小”）.

【变式1】一次函数 $y = -3x - 2$ 的图象和性质，说法正确的是（ ）

- A. y 随 x 的增大而增大 B. 截距为2

C. 与 x 轴交于点 $(-2, 0)$

D. 函数图象不经过第一象限

【变式 2】 一次函数 $y = -2x + 3$ ，当 x 满足 $-2 \leq x \leq 5$ 时， y 的最大值是_____.

【变式 3】 关于函数 $y = -2x - 3$ 下列说法不正确的是 ()

A. 图象是一条直线

B. 当直线经过 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点，且 $x_1 < x_2$ 时， $y_1 > y_2$

C. 图象不经过第三象限

D. 与 y 轴的交点坐标为 $(0, -3)$

【变式 4】 已知 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 为直线 $y = -3x + b (b > 0)$ 上的三个点，且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，以下判断正确的是 ()

A. 若 $x_2 x_3 > 0$ ，则 $y_1 y_3 > 0$

B. 若 $x_1 x_3 < 0$ ，则 $y_1 y_2 > 0$

C. 若 $x_2 x_3 < 0$ ，则 $y_1 y_2 > 0$

D. 若 $x_1 x_2 > 0$ ，则 $y_1 y_3 > 0$

题型 03 已知一次函数的性质求参数字母的取值范围

【典例 1】 一次函数 $y = (m + 4)x + m - 2$ 的图象不经过第二象限，则 m 的范围是_____.

【变式 1】 一次函数 $y = (2m - 1)x + m - 7$ 的图象经过第一、三、四象限，则 m 的取值范围是_____.

【变式 2】 若点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 都在 $y = (k + 1)x + 5$ (k 为常数) 的图象上，且当 $x_1 < x_2$ 时， $y_1 < y_2$ ，则 k 的值可能是 ()

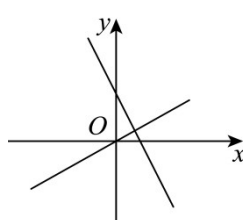
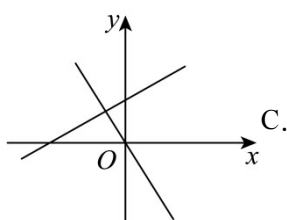
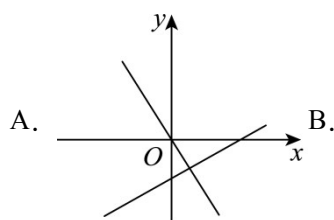
A. -3

B. -2

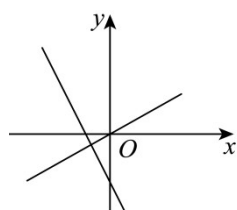
C. -1

D. 1

【变式 3】 在同一平面直角坐标系中，函数 $y = -x + a$ 与 $y = ax (a \neq 0)$ 的图像大致是 ()



D.



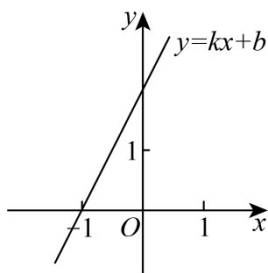
【变式 4】 1. 已知一次函数的图象经过点 $A(-8, 0)$ ， $B(0, 6)$.

(1)求一次函数的表达式；

(2)若点 $C(2a, y_1)$, $D(1-a, y_2)$ 在一次函数的图象上, $y_1 < y_2$. 求 a 的取值范围.

题型 04 一次函数与一次方程

【典例 1】如图, 一次函数 $y = kx + b (k > 0)$ 的图象过点 $(-1, 0)$, 则方程 $kx + b = 0$ 的解是 ()

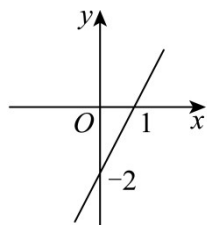


- A. $x = -1$ B. $x = 0$ C. $x = 1$ D. $x = 2$

【变式 1】已知直线 $y = ax + b$ 过点 $A(-2, \frac{2}{3})$, 则关于 x 的方程 $ax + b = \frac{2}{3}$ 的解是 ()

- A. $x = \frac{2}{3}$ B. $x = 0$ C. $x = -1$ D. $x = -2$

【变式 2】如图, 这是一次函数 $y = kx - 2$ 的图象, 则关于 x 的方程 $kx - 2 = 0$ 的解为 ()



- A. $x = -1$ B. $x = 0$ C. $x = -2$ D. $x = 1$

【变式 3】一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 中, x 与 y 的部分对应值如下表: 那么一元一次方程 $kx + b = 0$ 的解为 ()

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-6	-4	-2	0

- A. $x = -2$ B. $x = 0$ C. $x = 1$ D. $x = 2$

【变式 4】45. 在平面直角坐标系中, 直线 $y = 2x - 3$ 与 $y = kx + b$ (k, b 为常数, $k \neq 0$) 交于点 $P(m, 5)$,

则关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = kx + b \end{cases}$ 的解是 ()

A. $\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$

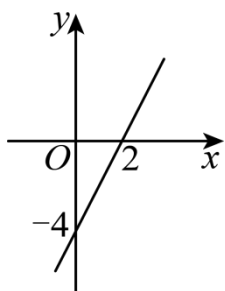
B. $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-4 \\ y=5 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

题型 05 一次函数与一次不等式

【典例 1】一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象与 x 轴的交点的横坐标为 2，与 y 轴的交点的纵坐标为 -4，则不等式 $kx+b > 0$ 的解集为 ()



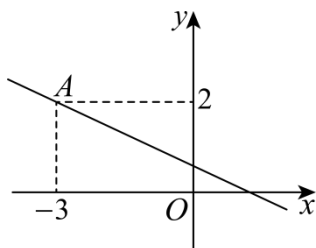
A. $x > -4$

B. $x < -4$

C. $x > 2$

D. $x < 2$

【变式 1】如图，若函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(-3, 2)$ ，则关于 x 的不等式 $kx+b < 2$ 的解集为 () .



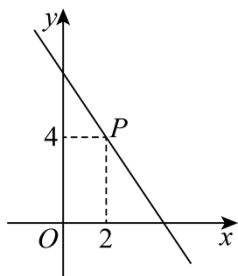
A. $x > -3$

B. $x < -3$

C. $x > 2$

D. $x < 2$

【变式 2】如图，点 P 在直线 $y=kx+b$ 上，则当 $y < 4$ 时， x 的取值范围是 () .



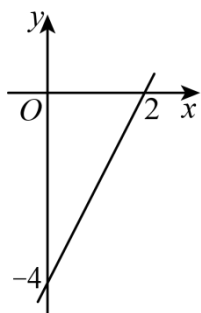
A. $x > 2$

B. $x \leq 2$

C. $x < 0$

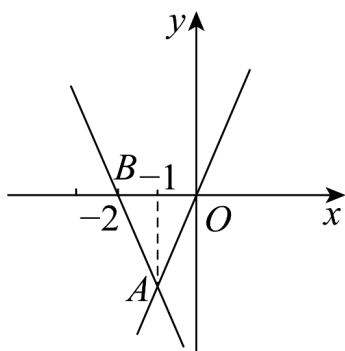
D. $x \leq 0$

【变式 3】一次函数 $y=kx+b$ 的图象，当 $0 < x < 2$ 时， y 的取值范围是 ()



- A. $-4 < y < 0$ B. $-2 < y < 0$ C. $y < -2$ D. $y < -4$

【变式4】如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 $A(-1, -2)$ 和点 $B(-2, 0)$ ，正比例函数 $y = 2x$ 的图像经过点 A ，则不等式 $2x < kx + b < 0$ 的解集为 ()

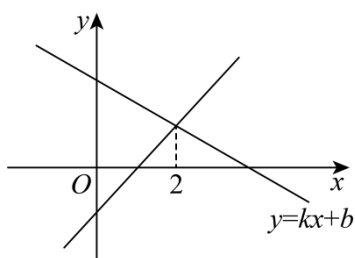


- A. $x < -2$ B. $-2 < x < -1$ C. $-2 < x < 0$ D. $-1 < x < 0$

题型 06 两条直线的交点问题

【典例1】如图，直线 $y = x - 1$ 与 $y = kx + b$ (k, b 为常数, $k \neq 0$) 交点的横坐标为 2，则关于 x, y 的二元

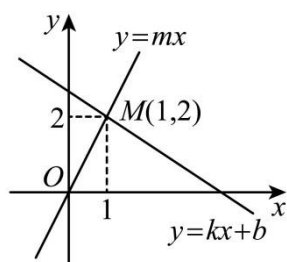
一次方程组 $\begin{cases} y = kx + b \\ y = x - 1 \end{cases}$ 的解为 ()



- A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

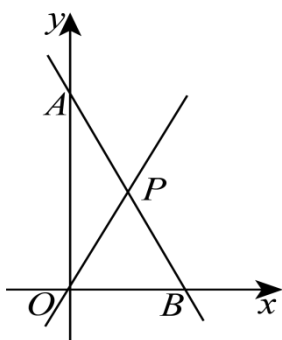
【变式1】如图所示，一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与正比例函数 $y = mx$ ($m \neq 0$) 的图象相交于点 $M(1, 2)$ ，下

列判断错误的是()



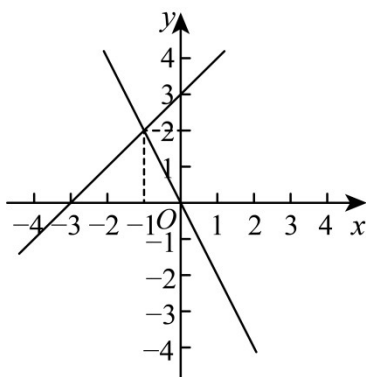
- A. 关于 x 的方程 $mx = kx + b$ 的解是 $x = 1$
- B. 关于 x 的不等式 $mx < kx + b$ 的解集是 $x \leq 1$
- C. 当 $x < 0$ 时, 函数 $y = kx + b$ 的值比函数 $y = mx$ 的值大
- D. 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} y - mx = 0 \\ y - kx = b \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

【变式2】如图一次函数 $y = k_1x + b$ 经过点 $A(0, 4)$, 与 x 轴交于点 B , 与正比例函数 $y = k_2x$ 交于点 $P(1, 2)$, 则下列结论正确的是 ()



- A. $k_1 - k_2 > 0$
- B. P 为 AB 的中点
- C. 方程 $k_1x + b = k_2x$ 的解是 $x = 2$
- D. 当 $x < 1$ 时, $k_1x + b < k_2x$

【变式3】如图, 以两条直线的交点坐标为解的方程组是 ()

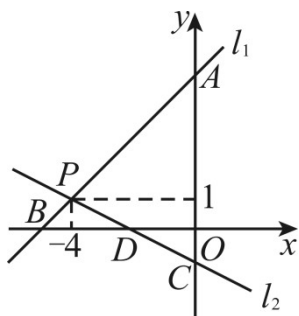


- A. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

C.
$$\begin{cases} x-y=-3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x-y=-3 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

【变式4】如图，直线 $l_1: y=kx+5$ (k 是常数且 $k \neq 0$) 分别交 y 轴， x 轴于 A ， B 两点，直线 $l_2: y=-\frac{1}{2}x+b$ (b 是常数) 分别交 y 轴， x 轴于 C ， D 两点，直线 l_1, l_2 相交于点 $P(-4,1)$.

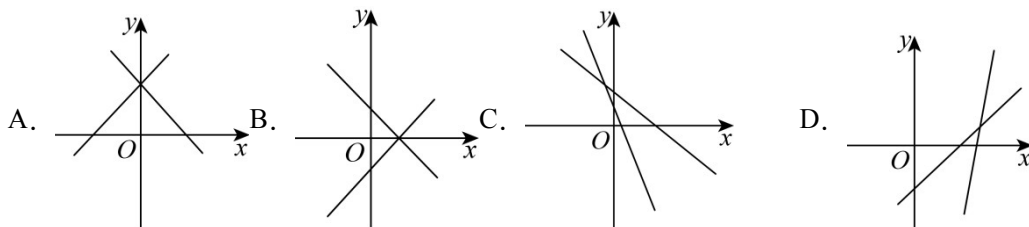


(1)直接写出方程组
$$\begin{cases} y=kx+5 \\ y=-\frac{1}{2}x+b \end{cases}$$
 的解为_____;

(2)求直线 l_1, l_2 与 x 轴围成的三角形的面积.

强化训练

1. 关于 x 的一次函数 $y=ax+b$ 和 $y=bx+a$ (其中 $a \neq 0, b \neq 0$) 的图象可能是 ()



2. 已知一次函数 $y=kx+6$ ($k \neq 0$), 且 y 随着 x 的增大而减小, 则它的图象不经过第_____象限.

3. 如果直线 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 过第二、三、四象限, 与 x 轴的交点为 $(-2,0)$, 那么关于 x 的不等式 $kx+b < 0$ 的解集是_____.

4. 如果一次函数 $y=kx+2$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $(1,0)$, 那么 y 的值随 x 的增大而_____.
(填“增大”或“减小”)

5. 关于一次函数 $y=-3x+6$ 的图象, 下列说法正确的是 ()

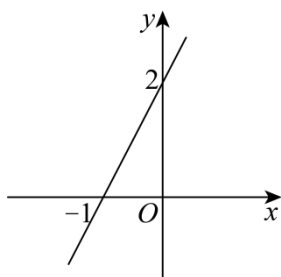
- A. y 随 x 的增大而增大
- B. 经过一、二、三象限
- C. 与 x 轴的交点坐标为 $(2,0)$

D. 可由 $y = -3x$ 向左平移 2 个单位得到

6. 已知一次函数 $y = kx - m - 2x$ 的图象与 y 轴的负半轴相交，且函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，则下列结论正确的是 ()

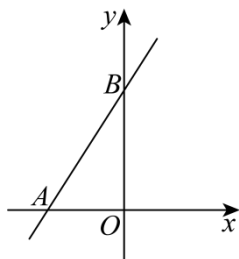
A. $k < 0, m < 0$ B. $k < 2, m < 0$ C. $k > 2, m > 0$ D. $k < 2, m > 0$

7. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图象分别与 x 轴， y 轴交于 $(-1, 0)$ ， $(0, 2)$ ，则 $kx + b = 0$ 的解为 $x =$ ()



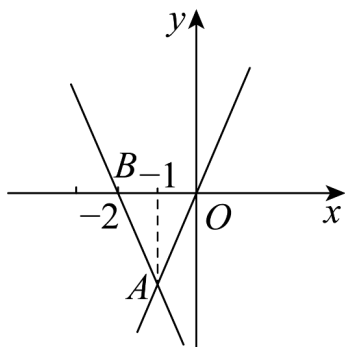
A. 2 B. -2 C. 0 D. -1

8. 如图，直线 $y = kx + b$ 与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ ，与 y 轴交于点 $B(0, 3)$ ，那么不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 ()



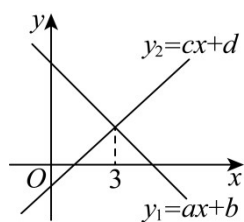
A. $x > -2$ B. $x > 3$ C. $x < -2$ D. $x < 3$

9. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过点 $A(-1, -2)$ 和点 $B(-2, 0)$ ，正比例函数 $y = 2x$ 的图像经过点 A ，则不等式 $2x < kx + b < 0$ 的解集为 ()



A. $x < -2$ B. $-2 < x < -1$ C. $-2 < x < 0$ D. $-1 < x < 0$

10. 一次函数 $y_1 = ax + b$ 与 $y_2 = cx + d$ 的图象如图所示，下列结论中正确的有 ()



① $ab < 0$ ；②函数 $y = ax + d$ 的图象经过一、三、四象限；③ $a - c = \frac{d - b}{3}$ ；④当 $x < 0$ 时， $y_1 > y_2$ 。

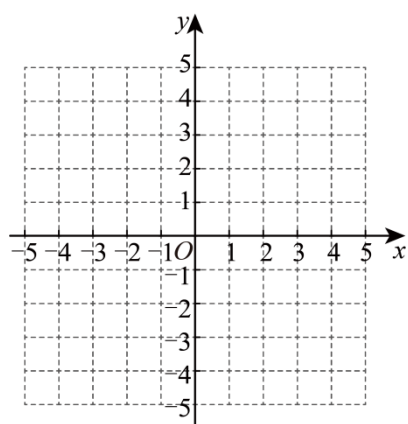
A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

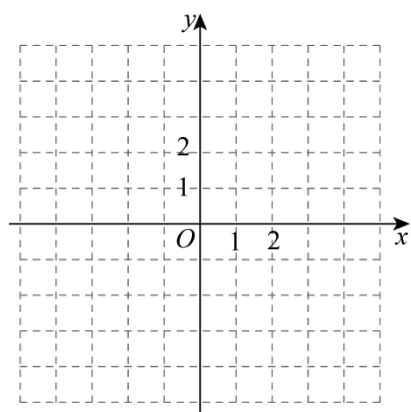
11. 在如图所示的坐标系下，



(1)画出函数 $y = -x + 4$ 与 $y = x - 2$ 的图象；

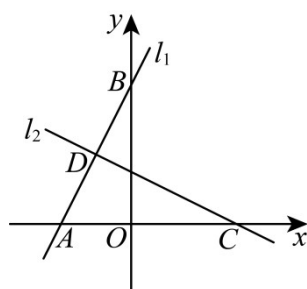
(2)求方程组 $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

12. 已知函数 $y_1 = 2x - 3$ 与 $y_2 = -\frac{1}{2}x + 4$ 。



- (1)画这两个函数的图象；
- (2)求这两个函数的图象交点的坐标；
- (3)当 $y_1 > y_2$ 时， x 的范围为_____。（直接写结果）

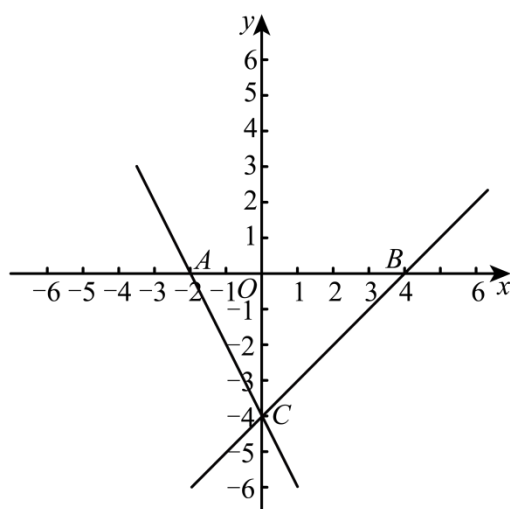
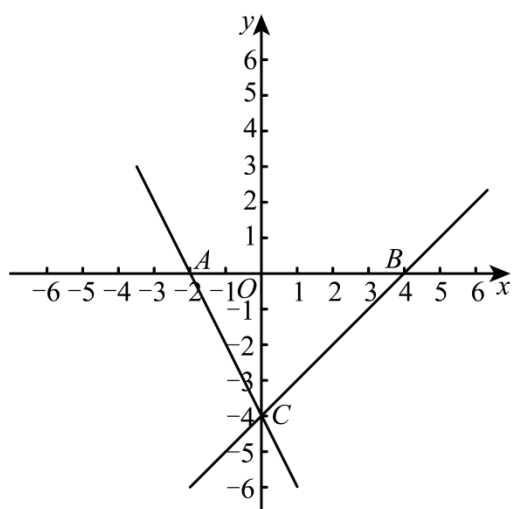
13. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $l_1: y = 2x + 4$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，直线 $l_2: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 与 x 轴交于点 C ，且直线 l_1 与直线 l_2 交于点 D 。



- (1)求点 D 的坐标.
- (2)求 $\triangle ADC$ 的面积.

14. 如图，二元一次方程组 $\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$ 中的两个方程对应的两个一次函数的图象与 x 轴负半轴交于点 A ，

与 x 轴正半轴交于点 B ，与 y 轴负半轴交于点 C 。



备用图

(1) 两个一次函数图象的交点坐标为_____，二元一次方程组 $\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -2x - 4 \end{cases}$ 的解是_____；

(2) 若点 D 为 x 轴上一点，连接 CD ，当 $\triangle ACD$ 为等腰三角形时，请求出点 D 的横坐标；