

专题 02 二次函数压轴题 十八大题型全归纳

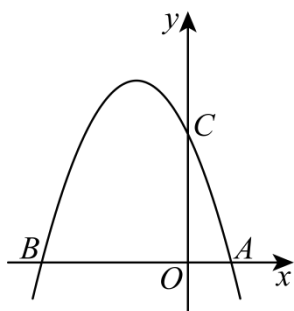
考点归纳

- 考点 01 根据平行关系求解
- 考点 02 根据垂直关系求解
- 考点 03 根据数量关系求解
- 考点 04 存在性问题—梯形
- 考点 05 存在性问题—特殊平行四边形
- 考点 06 相似问题
- 考点 07 角度问题
- 考点 08 特殊三角形问题
- 考点 09 含参数的二次函数对称性综合问题
- 考点 10 平移问题
- 考点 11 旋转问题
- 考点 12 翻折问题
- 考点 13 对称问题
- 考点 14 定点问题
- 考点 15 定值问题
- 考点 16 取值范围、最值问题
- 考点 17 证明恒等式
- 考点 18 新定义题

考点专练

考点 01 根据平行关系求解

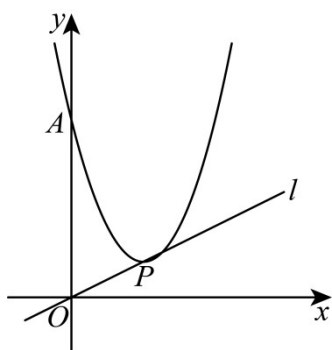
1. (2025·上海杨浦·模拟预测) 如图, 已知平面直角坐标系 xOy , 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(1,0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 $C(0,3)$, 对称轴是直线 $x = -1$.



- (1) 求该抛物线的表达式;
- (2) 将该抛物线平移得到新抛物线, 点 A 的对应点记作点 E , 点 C 的对应点记作点 F .
 - ① 若点 E 、 F 分别落在 y 轴的负半轴和线段 BC 上, 求 $BF:BC$ 的值;
 - ② 若点 F 落在第二象限的原抛物线上, 连接 FB 、 CE , 如果 $FB \parallel CE$, 求点 F 的坐标.

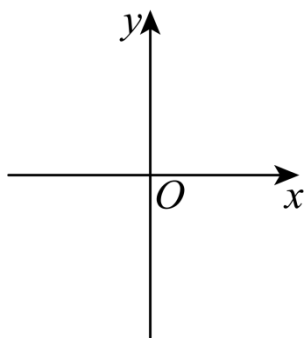
考点 02 根据垂直关系求解

2. (2025·上海奉贤·二模) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $A(0,5)$, 抛物线顶点 P 在第一象限且在直线 $l: y = \frac{1}{2}x$ 上.



- (1) 求抛物线的表达式;
 - (2) 向上平移直线 l , 交抛物线于 C 、 D 两点 (C 在 D 左侧), 当 $CD = OP$ 时, 求 C 点坐标;
 - (3) 将抛物线向右平移 m 个单位, 平移后的抛物线与原抛物线交于点 M , 顶点为 N , 如果 $MN \perp l$, 求 m 的值.
3. (2023·上海虹口·一模) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中. 已知抛物线 $y = x^2 + 2x + m$ 经过点 $A(-3,0)$,

与 y 轴交于点 C ，连接 AC 交该抛物线的对称轴于点 E 。



(1) 求 m 的值和点 E 的坐标；

(2) 点 M 是抛物线的对称轴上一点且在直线 AC 的上方。

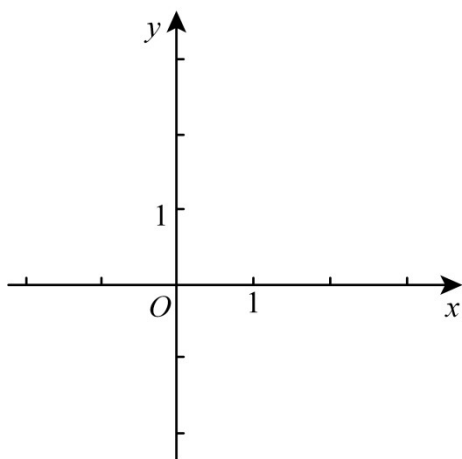
① 连接 AM 、 CM ，如果 $\angle AME = \angle MCA$ ，求点 M 的坐标；

② 点 N 是抛物线上一点，连接 MN ，当直线 AC 垂直平分 MN 时，求点 N 的坐标。

考点 03 根据数量关系求解

4. (2025·上海金山·一模) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图)，已知抛物线 $f(x) = x^2 + (b+1)x + b$ ($b < 0$)，

$f(x)$ 的图像与 x 轴的两个交点为点 P 、点 Q (其中点 P 在点 Q 左侧)。



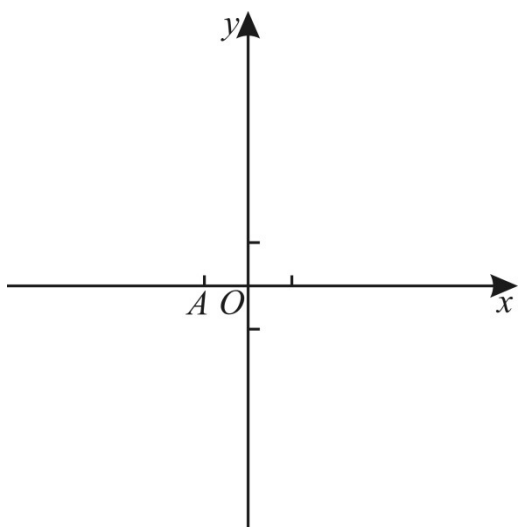
(1) 若将 $f(x)$ 的图像向上平移 2 个单位，得到的新抛物线 $g(x)$ 经过点 $(1, -3)$ ，求抛物线 $g(x)$ 的表达式；

(2) 若 $f(x)$ 的图像在直线 $x = 1$ 的右侧呈上升趋势，求 b 的取值范围；

(3) 在 (1) 中所求的 $g(x)$ 的图像与 y 轴的交点记为点 B ，与 x 轴的正半轴交点记为点 A ，点 M 在 $g(x)$ 的图

像上。当直线 MQ 与直线 PB 垂直，且 $QP = \frac{3}{5}QA$ 时，求点 M 的坐标。

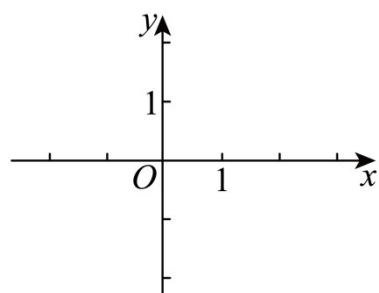
5. (2025·上海虹口·二模) 如图, 已知抛物线 $y = mx^2 + 2nx - 3$ 交 x 轴于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 交 y 轴于点 C .



- (1) 求直线 AC 的表达式, 并用含 n 的代数式表示该抛物线的对称轴;
- (2) 已知直线 $x = -4$ 与抛物线交于点 D , 与直线 AC 交于点 E , 如果 $m < 0$ 且 $DE = 12$, 求抛物线的表达式;
- (3) 已知抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 点 P 在抛物线上且位于第一象限, 连接 AP 、 BC , 线段 AP 与 y 轴相交于点 E , 点 F 在线段 BC 上, 连接 PF 、 EF , 如果 $\angle PFE = 90^\circ$, 且 $S_{\triangle PEF} = 4AE^2$, 求点 P 的坐标.

考点 04 存在性问题—梯形

6. (2025·上海金山·二模) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $C(m, -1)$ 在直线 $y = -x + 2$ 上, 已知抛物线 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 1$ (k 为常数), 抛物线与 x 轴的两个交点为点 E 、点 F (其中点 E 在点 F 左侧), 顶点为 D .

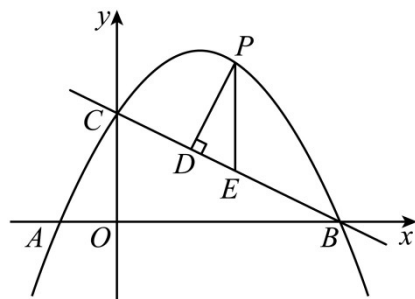


- (1) 若抛物线经过点 C , 求抛物线的表达式;
- (2) 求证: $\triangle DEF$ 的面积是一个定值, 并求出这个值;
- (3) 已知点 $N\left(\frac{3}{5}, 0\right)$, 抛物线的顶点 D 恰好落在 $\angle CNO$ 的平分线上, 点 G 在抛物线上, 若四边形 $DEGF$ 为梯

形，求点 G 的坐标．

考点 05 存在性问题—特殊平行四边形

7. (23-24 九年级下·内蒙古通辽·期中) 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 过点 $(1, 3)$ ，且交 x 轴于点 $A(-1, 0)$ ， B 两点，交 y 轴于点 C ．



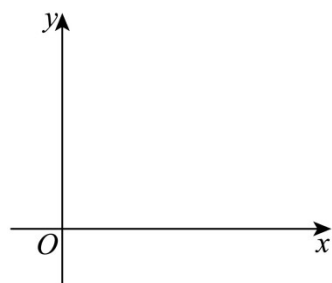
(1) 求抛物线的表达式；

(2) 点 P 是直线 BC 上方抛物线上的一动点，过点 P 作 $PD \perp BC$ 于点 D ，过点 P 作 y 轴的平行线交直线 BC 于点 E ，求 $\triangle PDE$ 周长的最大值及此时点 P 的坐标；

(3) 在(2)中 $\triangle PDE$ 周长取得最大值的条件下，将该抛物线沿射线 CB 方向平移 $\sqrt{5}$ 个单位长度，点 M 为平移后的抛物线的对称轴上一点，在平面内确定一点 N ，使得以点 A ， P ， M ， N 为顶点的四边形是菱形，直接写出所有符合条件的点 N 的坐标．

考点 06 相似问题

8. (2025·上海浦东新·二模) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图)，顶点为 $A(6, 6)$ 的抛物线 C_1 经过原点，直线 $y = 6$ 交 y 轴于点 B ．



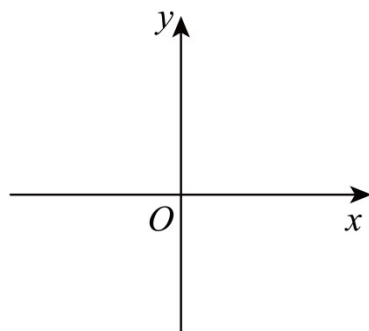
(1) 求抛物线 C_1 的表达式；

(2) 将抛物线 C_1 先向右平移 $m(m > 0)$ 个单位，再向下平移 $n(n > 0)$ 个单位，使得新抛物线 C_2 的顶点 D 恰好落在抛物线 C_1 上．抛物线 C_2 的对称轴交直线 AB 于点 E ．连接 BD ．

- ①连接 AD ，当线段 BD 的中垂线经过点 A 时，求 $\sin \angle DAE$ 的值；
- ②线段 BD 交抛物线 C_1 的对称轴于点 F ，当 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ADB$ 相似时，求代数式 $m^3 - 36m$ 的值。

考点 07 角度问题

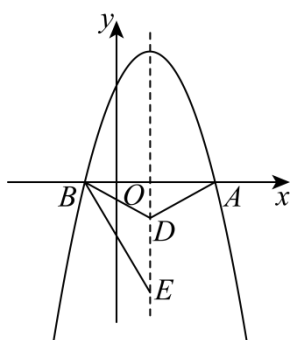
9. (2025·上海长宁·一模) 如图，在直角坐标平面 xOy 内，以点 C 为顶点的抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(4, 3)$ ，且与 y 轴交于点 B ，对称轴为直线 $x = 2$ 。



- (1) 求抛物线的表达式；
- (2) 平移上述抛物线，所得的新抛物线的对称轴为直线 $x = t$ ，顶点为点 P 。
- ①联结 AB ，如果点 P 在 x 轴上且新抛物线与线段 AB 有公共点，求 t 的取值范围；
- ②设新抛物线与直线 $x = 2$ 交于点 D ，如果点 P 在原抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 上，且在直线 $x = 2$ 的右侧， $\angle CPD = 2\angle CBO$ ，求点 P 的坐标。

考点 08 特殊三角形问题

10. (2022·上海金山·三模) 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴相交于点 $A(3, 0)$ ， $B(-1, 0)$ 两点。

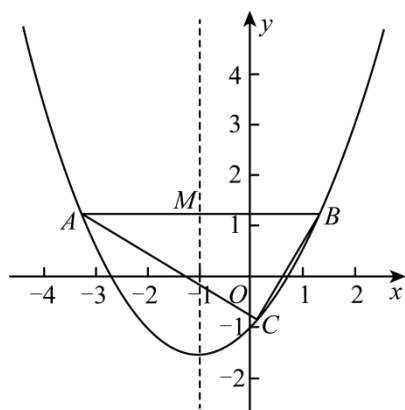


- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 点 D 在抛物线的对称轴上，且位于 x 轴的下方，将 $\triangle ABD$ 沿直线 BD 翻折得到 $\triangle BED$ ，若点 E 恰好落在抛物线的对称轴上，求点 E 和点 D 的坐标；

(3) 设点 P 是抛物线上位于第一象限的一点且位于对称轴右侧， Q 是抛物线对称轴上的一点，当 $\triangle PAQ$ 为等边三角形，求直线 BP 的解析式。

考点 09 含参数的二次函数对称性综合问题

11. (2025·上海嘉定·一模) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx - 1$ 经过点 $(2, 3)$ 和点 $(-4, 3)$ 。



(1) 求该抛物线的表达式；

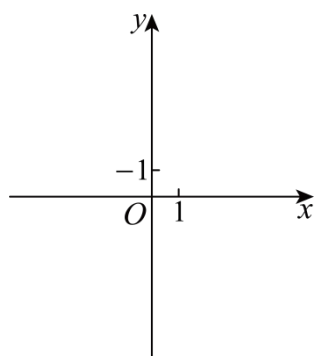
(2) 如图，该抛物线上有三个点 A 、 B 、 C ， $AB \parallel x$ 轴， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， AB 与抛物线的对称轴交于点 M （点 A 在对称轴的左侧）。

① 如果点 C 到抛物线对称轴的距离为 t ，请用含 t 的代数式表示点 B 的横坐标；

② 求点 C 的横坐标。

考点 10 平移问题

12. (2025·上海·二模) 在平面直角坐标系 xOy 中，顶点为 A 的抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$ 与 y 轴交于点 B 。



(1) 如果抛物线经过点 $(2, -1)$ ，且不经第二象限，求抛物线的表达式；

(2) 如果抛物线与坐标轴共有两个公共点，且在 y 轴右侧是下降的，求 m 的值；

(3) 点 A 在第一象限，点 B 关于抛物线对称轴的对称点为点 C ，将抛物线沿着射线 CA 方向平移，点 A 、 B 、

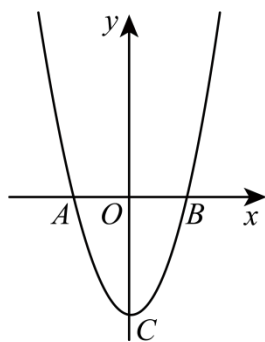
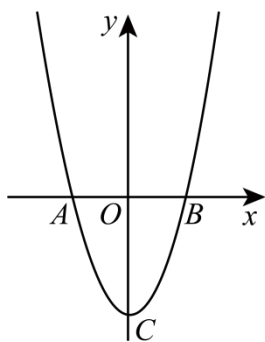
C 的对应点分别为点 A' 、 B' 、 C' ，线段 $B'C'$ 与线段 AB 交于点 D ，如果 $\tan \angle A'DB' = 4$ ， $\frac{S_{\triangle ADC'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9}$ ，求点

A 的坐标。

考点 11 旋转问题

13. (2025·上海崇明·一模) 已知在直角坐标平面 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点

$A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $C(0, -4)$ 三点。



备用图

(1) 求该抛物线的表达式；

(2) 点 P 是抛物线上在第一象限内的动点，点 P 的横坐标为 m

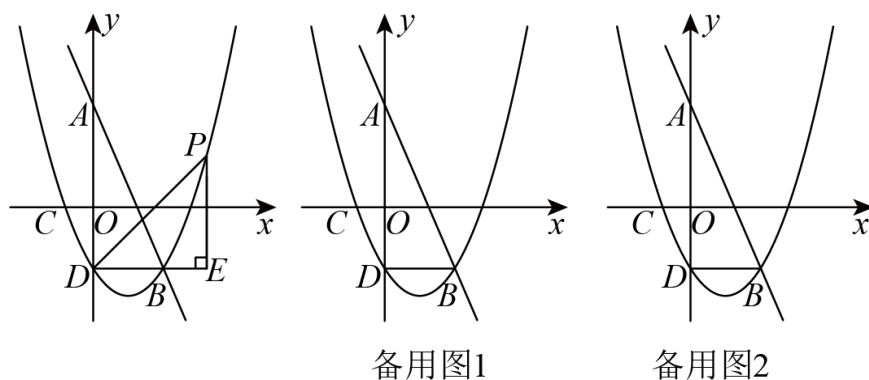
① 如果 $\triangle PAC$ 是以 PC 为斜边的直角三角形，求 m 的值；

② 在 y 轴正半轴上存在点 H ，当线段 PH 绕点 H 逆时针方向旋转 90° 时，恰好与抛物线上的点 Q 重合，此时点 Q 的横坐标为 n ($n > 0$)，求 $n - m$ 的值。

考点 12 翻折问题

14. (2024·上海·模拟预测) 如图，直线 $y = -2x + 4$ 交 y 轴于点 A ，交抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 于点 $B(3, -2)$ ，

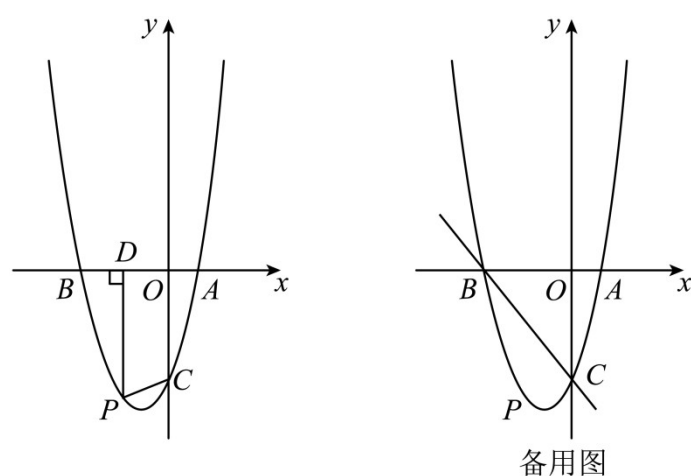
抛物线经过点 $C(-1, 0)$ ，交 y 轴于点 D ，点 P 是抛物线上的动点，作 $PE \perp DB$ 交 DB 所在直线于点 E 。



- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 当 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形时，求：P 点坐标；
- (3) 在 (2) 的条件下，连接 PB ，将 $\triangle PBE$ 沿直线 AB 翻折，直接写出翻折后点 E 的对称点坐标。

考点 13 对称问题

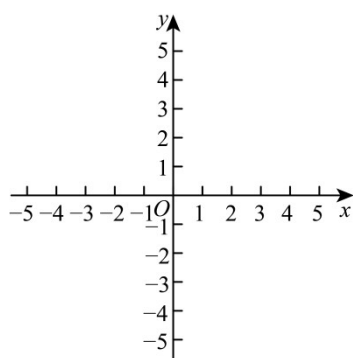
15. (2023·内蒙古通辽·中考真题) 在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y = ax^2 + \frac{8}{3}x + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0, -4)$ 。



- (1) 求这条抛物线的函数解析式；
- (2) P 是抛物线上一动点 (不与点 A, B, C 重合)，作 $PD \perp x$ 轴，垂足为 D ，连接 PC 。
- ① 如图，若点 P 在第三象限，且 $\tan \angle CPD = 2$ ，求点 P 的坐标；
- ② 直线 PD 交直线 BC 于点 E ，当点 E 关于直线 PC 的对称点 E' 落在 y 轴上时，请直接写出四边形 $PECE'$ 的周长。

考点 14 定点问题

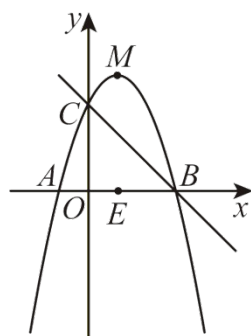
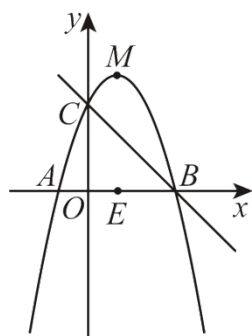
16. (2025·上海杨浦·二模) 已知平面直角坐标系 xOy ，抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a (a > 0)$ 与 x 轴交于点 A 和点 B (点 A 在点 B 左侧)，与 y 轴交于点 C ，顶点为 D ，过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴交抛物线于点 E 。



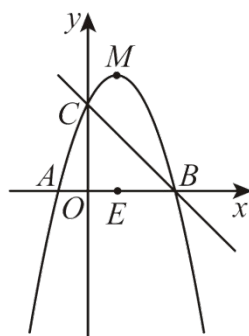
- (1) 直接写出抛物线的对称轴及点 A 、 B 的坐标；
- (2) 联结 AE ，如果 AE 平分 $\angle BAC$ ，求 a 的值；
- (3) 点 P 是抛物线上一点，线段 PD 、 AE 交于点 F ，如果 $S_{\triangle AFD} = S_{\triangle PFE}$ ，那么直线 PD 是否一定会经过一个定点？如果会，求出这个定点的坐标；如果不会，请说明理由。

考点 15 定值问题

17. (2023·上海普陀·三模) 如图，已知二次函数 $y = ax^2 + 2x + c$ 的图象与 x 轴交于 A ， B 两点。点 A 坐标为 $(-1, 0)$ ，与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，点 M 为抛物线顶点，点 E 为 AB 中点。



备用图1

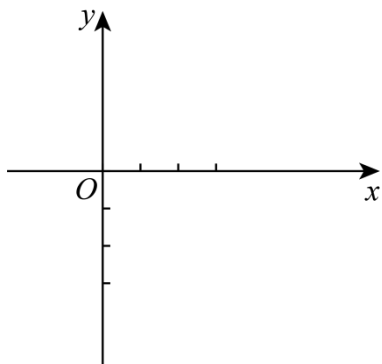


备用图2

- (1) 求：二次函数的表达式；
- (2) 在直线 BC 上方的抛物线上存在点 Q ，使得 $\angle QCB = 2\angle ABC$ ，求点 Q 的坐标；
- (3) 已知 D ， F 为抛物线上不与 A ， B 重合的相异两点，若直线 AD ， BF 交于点 P ，则无论 D ， F 在抛物线上如何运动，只要 D ， E ， F 三点共线， $\triangle AMP$ ， $\triangle MEP$ ， $\triangle ABP$ 中必存在面积为定值的三角形。请直接写出其中面积为定值的三角形及其面积，不必说明理由。

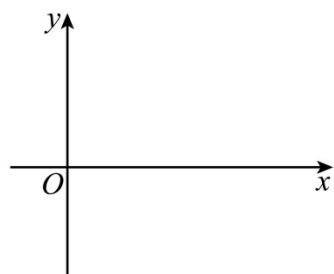
考点 16 取值范围、最值问题

18. (2025·上海普陀·一模) 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图). 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$) 的顶点 A 的坐标为 $(1, -2)$, 与 y 轴交于点 B . 将抛物线沿射线 BA 方向平移, 平移后抛物线的顶点记作 M , 其横坐标为 m . 平移后的抛物线与原抛物线交于点 N , 且设点 N 位于原抛物线对称轴的右侧, 其横坐标为 n .



- (1) 求原抛物线的表达式;
- (2) 求 m 关于 n 的函数解析式;
- (3) 在抛物线平移过程中, 如果 $\angle NBM$ 是锐角, 求平移距离的取值范围.

19. (2025·上海闵行·一模) 已知抛物线 $C_1: y = -x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $A(0, 3)$, 顶点 P 在直线 $x = 1$ 上.



- (1) 求抛物线 C_1 的解析式及顶点 P 的坐标;
- (2) 将抛物线 C_1 向右平移 m ($m > 0$) 个单位, 再向下平移 n ($n > 0$) 个单位, 得到新抛物线 C_2 , 新抛物线 C_2 的顶点为 Q , 与抛物线 C_1 的交点为点 B , 如果四边形 $PABQ$ 是平行四边形, 求 m 、 n 之间的关系式;
- (3) 在 (2) 的条件下, 抛物线 C_2 的对称轴与直线 AP 交于点 E , 与抛物线 C_1 交于点 F , 且 $S_{\triangle PEQ} : S_{\triangle BFQ} = 3:1$, 求此时抛物线 C_1 上落在平行四边形 $PABQ$ 内部的点 (不包括与平行四边形的交点) 的横坐标 t 的取值范围.

20. (2025·上海·中考真题) 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 过 $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, 与 y 轴交于点

C ，顶点为 P 。

(1) 求 b, c 的值。

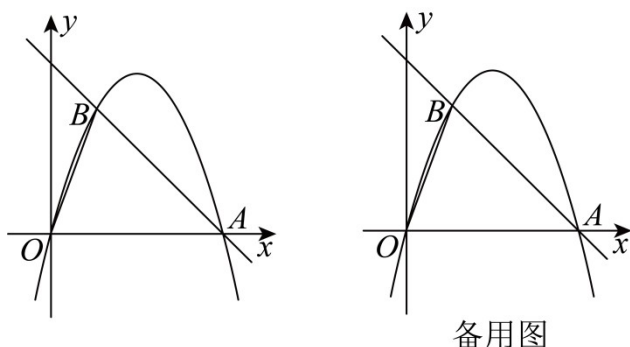
(2) 设抛物线 $y = ax^2 + mx + n (a \neq 1)$ 过点 A, B ，且与 y 轴交于点 D ，顶点为 Q 。

① 求 $\frac{CD}{PQ}$ 的值；

② 当四边形 $CDPQ$ 是直角梯形时，求该直角梯形中最小内角的正弦值。

考点 17 证明恒等式

21. (2024·上海普陀·三模) 如图，在直角坐标平面内，抛物线经过原点 O 、点 $B(1, 3)$ ，又与 x 轴正半轴相交于点 A ， $\angle BAO = 45^\circ$ ，点 P 是线段 AB 上的一点，过点 P 作 $PM \parallel OB$ ，与抛物线交于点 M ，且点 M 在第一象限内。



(1) 求抛物线的表达式；

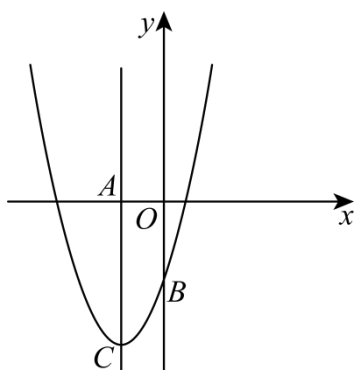
(2) 若 $\angle BMP = \angle AOB$ ，求点 P 的坐标；

(3) 过点 M 作 $MC \perp x$ 轴，分别交直线 AB 、 x 轴于点 N, C ，若 $\triangle ANC$ 的面积等于 $\triangle PMN$ 的面积 2 倍，求证：

$$\frac{NC}{MN} = \cos \angle BAO.$$

考点 18 新定义题

22. (2025·上海闵行·二模) 定义：如果一条抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的顶点坐标满足条件 (t, at^2) ，那么称该抛物线为“优雅”抛物线。例如：抛物线 $y = 2x^2 - 4x + 4$ 的顶点坐标为 $(1, 2)$ ，此时由于 $t = 1, a = 2$ ，顶点坐标符合定义的条件，所以这条抛物线是“优雅”抛物线。



(1) 如果抛物线 $C_1: y = x^2 + 4x + m$ 是“优雅”抛物线，求 m 的值。

(2) 如图，把 (1) 中的抛物线 C_1 向下平移得到抛物线 C_2 ，抛物线 C_2 与 y 轴负半轴交于点 B ，顶点为点 C ，对称轴与 x 轴交于点 A 。

① 点 E 在 CB 延长线上，点 D 是 x 轴上一点，且四边形 $ABDE$ 是矩形，求点 E 的坐标。

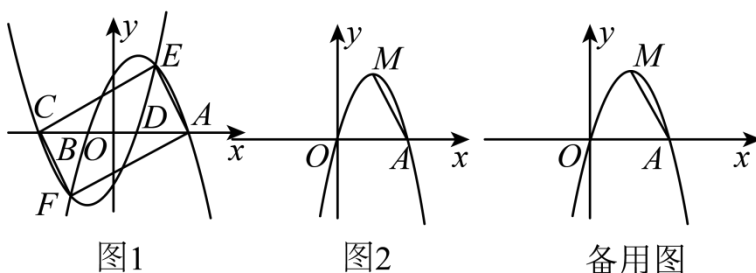
② 如果抛物线 $C_3: y = 2x^2 + px + q$ 为“优雅”抛物线，它的顶点 G 在 x 轴上，抛物线 C_2 与 C_3 交于点 M ，且 $AM \parallel BC$ ，求抛物线 C_2 的解析式。

23. (2024·湖南长沙·一模) 定义：把抛物线 C_1 上任意点 $P(a, b)$ 的横坐标和纵坐标乘以 k 后变为点

$P'(ka, kb)$ ，若点 P' 都在抛物线 C_2 上，则称抛物线 C_2 为抛物线 C_1 的“ k 倍抛物线”。例如：抛物线 $y = x^2$ 的任

意一点 $P(n, n^2)$ ，乘以 $-\frac{1}{2}$ 后变为 $P'(-2n, -2n^2)$ ，点 P' 都在抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 上，所以抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 是抛

物线 $y = x^2$ 的“ -2 倍抛物线”。已知抛物线 $C: y = -mx^2 + 2mx + n$ ，根据所给条件完成下列问题：



(1) 当 $m = 1$ ， $n = -1$ 时，求 C_1 的“2 倍抛物线” C_2 的解析式；

(2) 如图 1，当 $n = 3m$ ，且 $m > 0$ 时， C_1 与 x 轴交于点 A 、 B ， C_1 的“ -1 倍抛物线” C_3 与 x 轴交于点 C 、 D ，与 C_1 交于点 E 、 F ，是否存在合适的 m 值，使得四边形 $AECF$ 是矩形，如果存在求出 m 的值；如果不存在请说明理由；

(3) 如图 2，当 $m = \sqrt{3}$ ， $n = 0$ 时，抛物线 C_1 的顶点记为 M ，与 x 轴的正半轴交于点 A ，抛物线 C_1 的“ k 倍抛物

线" C_4 顶点为 N ，点 P 在抛物线 C_4 上，满足 $S_{\triangle PMN} = S_{\triangle AMN}$ ，且 $\angle PNM = 90^\circ$ 。当 $|k| > 1$ 时，求 k 的值。