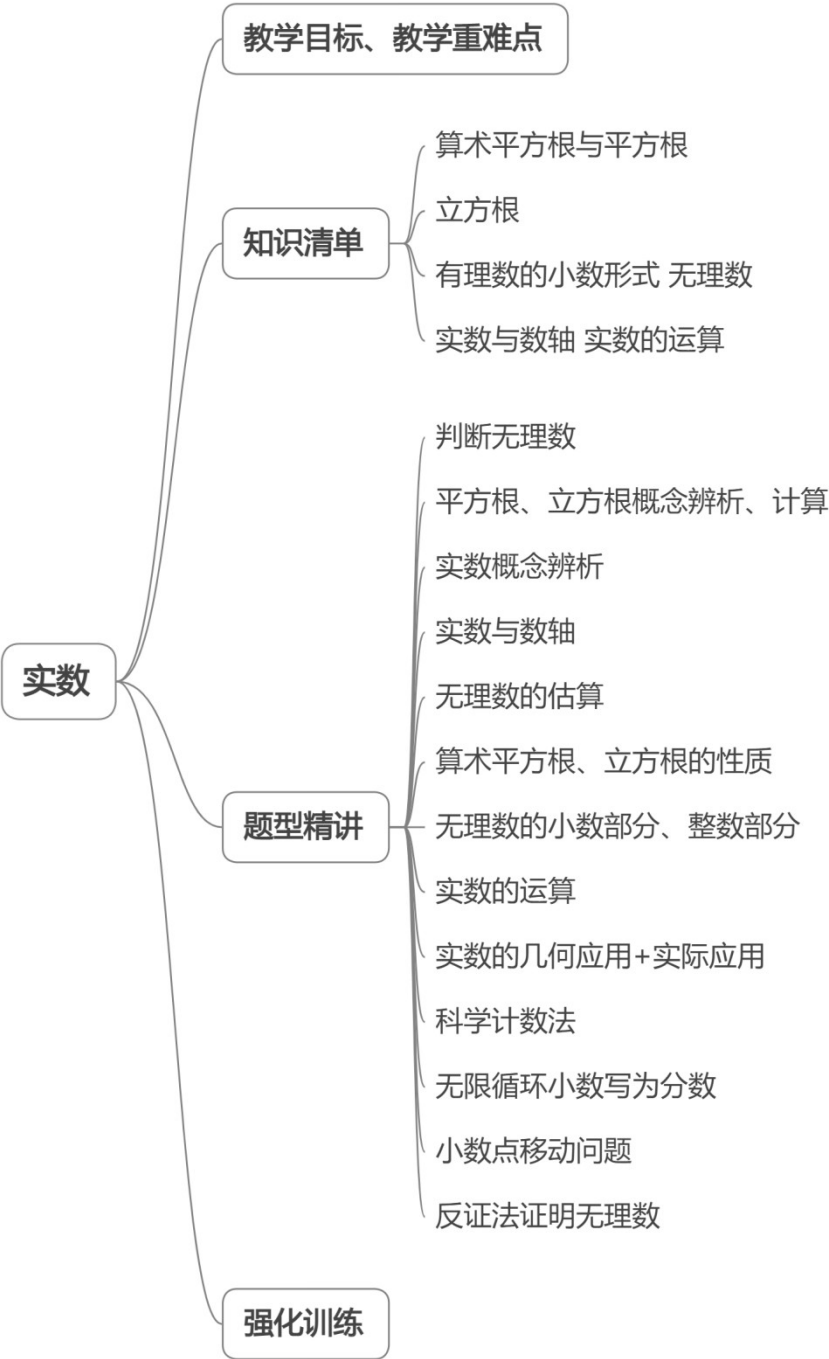


# 第 19 章 实数

## 内容概览



## 教学目标、教学重难点

|      |               |
|------|---------------|
| 教学目标 | 1. 算术平方根与平方根； |
|------|---------------|

|              |                                                                                                                                 |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|              | 2. 立方根；<br>3. 有理数的小数形式、无理数；<br>4. 实数与数轴、实数的绝对值与大小比较；<br>5. 实数的运算，科学计数法。                                                         |
| <b>教学重难点</b> | 1.重点<br>(1) 理解从有理数到无理数，数的范围扩充；<br>(2) 认识并理解实数的有关概念，如平方根、立方根；<br>(3) 会进行实数的运算。<br>2.难点<br>(1) 概念辨析；<br>(2) 性质应用；<br>(3) 实数的综合应用。 |

## 知识清单

### 知识点1 算术平方根与平方根

#### 1.算术平方根

①**算术平方根**：一般地，如果一个正数  $x$  的平方等于  $a$ ，即  $x^2=a$ ，那么这个正数  $x$  叫作  $a$  的**算术平方根**。

②  $a$  的算术平方根记为“ $\sqrt{a}$ ”，读作“**根号  $a$** ”。 $a$  叫作**被开方数**。

③因为 0 的平方是 0，所以规定 0 的算术平方根是 0，记为  $\sqrt{0}=0$ 。

**要点**：当式子  $\sqrt{a}$  有意义时， $a$  一定表示一个非负数，即  $\sqrt{a} \geq 0$ ， $a \geq 0$ ；

可简记为算术平方根的“双重非负性”。

#### 2.算术平方根小数点移动规律

被开方数的小数点**向右或者向左移动两位**，它的算术平方根的小数点**相应地向右或者向左移动一位**。

#### 3.平方根

①**平方根**：一般地，如果一个数  $x$  的平方等于  $a$ ，即  $x^2=a$ ，那么这个数  $x$  叫作  $a$  的**平方根**，也称为**二次方根**。 $a$  叫作**被开方数**。

②**开平方**：求一个数  $a$  的平方根的运算叫作**开平方**。例如，求 64 的平方根，就是要对 64 进行开平方运算，64 是被开方数。

**开平方与平方互为逆运算**。

#### 4.平方根的特点

①正数有两个平方根，它们**互为相反数**，其中**正的平方根**就是这个数的**算术平方根**；

② 0 的平方根是 0;

③ 负数没有平方根.

## 5. 平方根 的表示

正数  $a$  的两个平方根可以用符号“ $\pm\sqrt{a}$ ”表示. 其中, “ $+\sqrt{a}$ ”表示  $a$  的正的平方根, 即  $a$  的算术平方根; “ $-\sqrt{a}$ ”表示  $a$  的负的平方根, 读作“负根号  $a$ ”.

0 的平方根记为“ $\sqrt{0}$ ”,  $\sqrt{0}=0$ .

### 【即学即练】

1. 下列说法错误的是 ( )

A. 4 是 16 的一个平方根

B. 81 的平方根是  $\pm 9$

C. -5 是 25 的一个平方根

D. 25 的平方根是 5

2. 已知正数  $a$  的一个平方根是 2, 则它的另一个平方根是 ( )

A. -2

B.  $-\sqrt{2}$

C. -4

D.  $\pm 2$

3.  $\sqrt{16}$  的算术平方根是 ( )

A. -4

B. 4

C. 8

D. 2

## 知识点 2 立方根

### 1. 立方根

① **立方根**: 一般地, 如果一个数  $x$  的立方等于  $a$ , 即  $x^3=a$ , 那么这个数  $x$  叫作  $a$  的 **立方根**, 也称为**三次方根**.  $a$  叫作**被开方数**.

② **开立方**: 求一个数  $a$  的立方根的运算叫作**开立方**. 例如, 求 64 的立方根, 就是要对 64 进行开立方运算, 64 是被开方数.

**开立方和立方互为逆运算.**

③ **立方根的表示**: 类似平方根, 一个数  $a$  的立方根用符号“ $\sqrt[3]{a}$ ”表示.

### 2. 立方根的特点

① 正数的立方根是正数;

② 0 的立方根是 0;

③ 负数的立方根是负数.

④任何一个数都有立方根，且只有一个立方根.

### 3.立方根的性质

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

立方根等于它本身的数是 0 或  $\pm 1$ .

### 4.立方根小数点移动规律

被开方数的小数点向右或者向左移动三位，它的立方根的小数点相应地向右或者向左移动一位.

#### 【即学即练】

1. 下列说法不正确的是 ( )

A.  $-0.064$  的立方根是  $-0.4$

B.  $8$  的立方根是  $\pm 2$

C. 立方根是  $6$  的数是  $216$

D.  $\frac{1}{27}$  的立方根是  $\frac{1}{3}$

2. 下列各数中，互为相反数的是 ( )

A.  $\sqrt{3^2}$  与  $\sqrt{(-3)^2}$     B.  $\sqrt[3]{27}$  与  $-\sqrt[3]{27}$     C.  $-\sqrt[3]{125}$  与  $\sqrt[3]{-125}$     D.  $\sqrt[3]{1}$  与  $\sqrt{1}$

3. 下列说法正确的是 ( )

A. 任何数的立方根都只有一个

B. 如果一个数有立方根，那么这个数一定有平方根

C. 一个数的立方根比这个数的平方根小

D. 一个数的立方根有两个，它们互为相反数

## 知识点 3 有理数的小数形式 无理数

1. 有理数必为有限小数或无限循环小数；反过来，有限小数或无限循环小数必为有理数.

### 2. 无限循环小数化成分数

#### ① 循环节为 1 位数

将  $0.\dot{5}$  化成分数.

设  $x = 0.\dot{5}$ ，那么  $10x = 5.\dot{5}$ .

因为  $5.\dot{5} = 5 + 0.\dot{5}$ ，所以  $10x = 5 + x$ .

化简，得  $9x = 5$ ，解得  $x = \frac{5}{9}$ .

所以， $0.\dot{5} = \frac{5}{9}$ .

#### ② 循环节为 2 位数

将  $1.5\dot{3}$  化成分数.

设  $x = 0.\dot{5}\dot{3}$ ，那么  $100x = 53.\dot{5}\dot{3}$ .

因为  $53.\dot{5}\dot{3} = 53 + 0.\dot{5}\dot{3}$ ，所以  $100x = 53 + x$ .

化简，得  $99x = 53$ ，解得  $x = \frac{53}{99}$ .

所以， $1.5\dot{3} = 1\frac{53}{99}$ .

### ③循环节为 3 位数

将  $0.1\dot{5}0\dot{3}$  化成分数.

设  $x=0.50\dot{3}$ , 那么  $1\,000x=503.50\dot{3}$ .

因为  $503.50\dot{3}=503+0.50\dot{3}$ , 所以  $1\,000x=503+x$ .

化简, 得  $999x=503$ , 解得  $x=\frac{503}{999}$ .

又因为  $0.1\dot{5}0\dot{3}=0.1+0.0\dot{5}0\dot{3}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\times 0.50\dot{3}=\frac{1+x}{10}$ , 所以  $0.1\dot{5}0\dot{3}=\frac{1+\frac{503}{999}}{10}$ .

$$\frac{1\,502}{9\,990}=\frac{751}{4\,995}.$$

### 3.无理数

无限不循环小数又叫作无理数.例如,  $\sqrt{3}$ 、 $-\sqrt{5}$ 、 $2$  等都是无理数,  $\pi$  也是无理数.

#### 【即学即练】

1. 实数  $\sqrt[3]{-8}$ ,  $0$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\pi$ ,  $0.3030030003\cdots$  (相连两个 3 之间依次多一个 0), 其中无理数的个数为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

2. 下列命题: ①无理数都是实数; ②实数都是无理数; ③无限小数都是无理数; ④带根号的数都是无理数; ⑤不带根号的数都是有理数, 其中错误的命题的个数是 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

3. 我们知道分数  $\frac{1}{3}$  写成小数形式即  $0.\dot{3}$ , 反过来, 无限小数  $0.\dot{3}$  写成分数形式即  $\frac{1}{3}$ . 一般地, 任何一个无限循环小数都可以写成分数形式吗? 先以无限小数  $0.\dot{7}$  为例, 设  $0.\dot{7}=x$ , 由  $0.\dot{7}=0.777\cdots$  可知,  $10x-x=7$ , 解方程, 得  $x=\frac{7}{9}$ . 于是, 得  $0.\dot{7}=\frac{7}{9}$ .

请仿照以上材料中的做法, 将无限循环小数  $0.\dot{6}3$  化成分数为\_\_\_\_\_.

## 知识点 4 实数与数轴 实数的运算

### 1.实数与数轴上的点——对应

任何一个无理数都可以用数轴上的一个点对应表示.这样, 除任意一个有理数在数轴上有唯一的对应点外, 任意一个无理数在数轴上也有唯一的对应点, 从而任意一个实数在数轴上有唯一的对应点.反之, 数轴上任意给定的点可对应一个有理数或一个无理数.所以, 实数与数轴上的点——对应.

## 2.实数的绝对值

①**实数的绝对值**：一个实数在数轴上所对应的点到原点的距离，叫作这个实数的绝对值.实数  $a$  的绝对值记作  $|a|$ .

②**实数绝对值的特点**：绝对值相等、符号相反的两个实数互为相反数；0 的相反数是 0.非零实数  $a$  的相反数是  $-a$ .

③一个正实数的绝对值是它本身，0 的绝对值是 0,一个负实数的绝对值是它的相反数.设  $a$  表示一个实数，则

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

## 3.实数混合运算的顺序

实数之间不仅可以进行加、减、乘、除、乘方运算，而且正数和 0 可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立方运算.实数混合运算的顺序为：**先乘方和开平(立)方，再乘除，最后加减.**

## 4.实数的绝对值和大小比较

①**数轴法**：每一个实数都可以用数轴上唯一的一个点表示.用数轴上的点表示实数时，这些点从左到右的顺序，就是实数从小到大的顺序，即**右边的点表示的数大于左边的点表示的数.**

②**法则比较法**：

两个数比较大小，按数的性质符号分类，情况如下：

|        |               |
|--------|---------------|
| 两数同号   | 同为正号：绝对值大的数大  |
|        | 同为负号：绝对值大的反而小 |
| 两数异号   | 正数大于负数        |
| - 数为 0 | 正数与 0：正数大于 0  |
|        | 负数与 0：负数小于 0  |

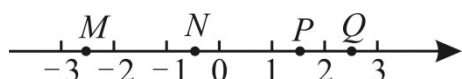
## 5.科学计数法的表示

把一个数表示成  $a \times 10^n$  ( $1 \leq |a| < 10$ ,  $a$  是整数或小数,  $n$  是整数) 的形式, 这种记数方法叫作科学记数法. 当  $a=1$  或  $a=-1$  时, “1” 常省略不写, 如  $0.000000001=10^{-9}$ ,  $-1000000=-10^6$ .

### 【即学即练】

1. 比较大小:  $\sqrt{13}$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{15}$  (填“>”, “<”或“=”).

2. 如图, 数轴上表示  $\sqrt{6}$  的点可能是 ( )



A. 点  $M$

B. 点  $N$

C. 点  $P$

D. 点  $Q$

3.  $-\sqrt{11}$  的绝对值是 \_\_\_\_\_,  $\sqrt{5}-3$  的相反数是 \_\_\_\_\_.

4. 关于  $\sqrt{13}$  的叙述错误的是 ( )

A. 面积为 13 的正方形的边长是  $\sqrt{13}$

B. 在数轴上可以找到表示  $\sqrt{13}$  的点

C.  $\sqrt{13}$  的相反数是  $-\sqrt{13}$

D.  $\sqrt{13}$  的整数部分是 4

5. DNA 分子的直径约为 0.00000019cm, 数据 0.00000019 用科学记数法表示为 \_\_\_\_\_.

6. 计算:  $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \times (5+2\sqrt{6}) + (5-2\sqrt{6})^0$ .

## 题型精讲

### 题型 01 判断无理数

【典例 1】. 实数  $-\sqrt{5}$ ,  $3.14$ ,  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{22}{7}$ ,  $-\sqrt{9}$ ,  $0.1616616661$ , 在这 7 个数中, 无理数的个数是 ( )

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【变式 1】. 在四个实数  $-\frac{14}{3}$ ,  $0$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $3.14$  中, 是无理数的是 ( )

A.  $-\frac{14}{3}$

B. 0

C.  $\sqrt{3}$

D. 3.14

### 题型 02 平方根、立方根概念辨析、计算

【典例 1】. 下列说法中, 正确的是 ( )

A.  $\sqrt{16}$  的平方根是  $\pm 4$

B.  $-3^2$  的平方根是  $\pm 3$

C.  $-\sqrt{5}$  是 5 的一个平方根

D. 8 的立方根是  $\pm 2$

【变式1】. 下列计算正确的是 ( )

- A.  $\sqrt[3]{-8} = -2$       B.  $\sqrt{(-2)^2} = -2$       C.  $\sqrt{-1} = -1$       D.  $\sqrt{4} = \pm 2$

【变式2】. 下列各式正确的是 ( )

- A.  $\sqrt{(-3)^2} = -3$       B.  $-\sqrt{3^2} = -3$       C.  $\sqrt{36} = \pm 6$       D.  $\sqrt[3]{0.08} = 0.2$

【变式3】. 一个正数的平方根分别为  $a+1$  和  $a-2$ ，则这个正数是\_\_\_\_\_.

### 题型 03 实数概念辨析

【典例1】. 下列说法正确的是 ( )

- A. 无理数都是无限小数      B. 有理数只是有限小数  
C. 无限小数都是无理数      D. 实数可以分为正实数和负实数

【变式1】. 学习了无理数之后，对于  $\sqrt{26}$  说法正确的是 ( )

I:  $\sqrt{26}$  表示的意义是 26 的算术平方根；

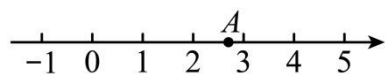
II: 面积是 26 的正方形的边长是  $\sqrt{26}$ ；

III:  $\sqrt{26}$  的大小介于两个连续整数 4 与 5 之间；

- A. 三个都正确      B. 只有I与II正确      C. 只有II与III正确      D. 只有II不正确

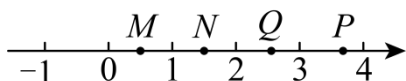
### 题型 04 实数与数轴

【典例1】. 如图，数轴上点 A 表示的数可能是 ( )



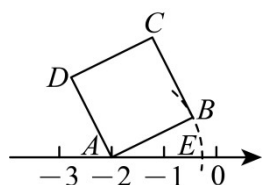
- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\sqrt{7}$       D.  $\sqrt{10}$

【变式1】. 如图，在数轴上的四个点中，对应的数最接近  $\sqrt{13}$  的是 ( )



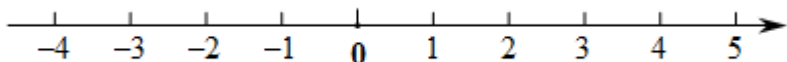
- A. 点 M      B. 点 N      C. 点 Q      D. 点 P

【变式2】. 如图，面积为 3 的正方形  $ABCD$  的顶点 A 在数轴上，点 A 表示的数为 -2，若  $AB = AE$ ，则数轴上点 E 所表示的数为 ( )



- A.  $1+\sqrt{3}$       B.  $\sqrt{3}-1$       C.  $-2+\sqrt{3}$       D.  $\sqrt{3}+2$

**【变式3】** . 数轴上的点  $A$ 、 $B$  依次表示两个实数  $-\sqrt{3}, \pi$  .



(1) 如图，在数轴上描出点  $A$  和点  $B$  的大致位置；

(2) 如果点  $C$  在数轴上，且点  $C$  到点  $A$  的距离是  $2\sqrt{3}$ ，求点  $C$  所对应的实数 .

### 题型 05 无理数的估算

**【典例1】** . 估算  $\sqrt{17}$  的值在 ( )

- A. 2 和 3 之间      B. 3 和 4 之间      C. 4 和 5 之间      D. 5 和 6 之间

**【变式1】** . 估计  $1+\sqrt{6}$  的值在 ( )

- A. 1 和 2 之间      B. 2 和 3 之间      C. 3 和 4 之间      D. 4 和 5 之间

### 题型 06 算术平方根、立方根的性质

**【典例1】** . 若  $|x-1|+\sqrt{y+2}=0$ ，则  $x+y$  的立方根是\_\_\_\_\_ .

**【变式1】** . 已知  $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+1$ ，则  $xy$  值为 ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

**【变式2】** . 下列判断：①  $\sqrt{64}$  的平方根是  $\pm 8$ ；②  $\sqrt[3]{6}$  与  $\sqrt[3]{-6}$  互为相反数；③  $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$ ，则  $x+y=1$ ；④ 0.1 的算术平方根是 0.01，其中正确的有 ( )

- A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

### 题型 07 无理数的小数部分、整数部分

**【典例1】** . 若  $\sqrt{10}$  的整数部分为  $a$ ，小数部分为  $b$ ，则  $b=_____$  .

**【变式1】** . 若  $4-\sqrt{5}$  的整数部分为  $a$ ，小数部分为  $b$ ，则代数式  $2+\sqrt{5}a-b$  的值为 ( )

- A.  $\sqrt{5}$       B. 1      C.  $\sqrt{5}+1$       D.  $2\sqrt{5}-1$

**【变式2】** . 已知 $2a-1$ 的算术平方根是3， $3a+b$ 的立方根是2， $c$ 是 $\sqrt{11}$ 的整数部分 .

(1)求 $a, b, c$ 的值；

(2)求 $\sqrt{4a+b+c}$ 的值 .

### 题型 08 实数的运算

**【典例1】** . 计算：

(1) $|-2| - \sqrt[3]{27} + \sqrt{4}$ ；

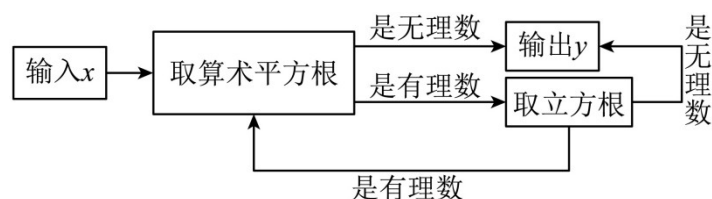
(2) $2\sqrt{2} + \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$  .

**【变式1】** . 计算：

(1) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+2) - (-\sqrt{2})$ ；

(2) $\sqrt{9} - \sqrt[3]{8} - |\sqrt{3} - 2|$

**【变式2】** . 有一个数值转换器，流程如图：当输入的 $x$ 值为64时，输出的 $y$ 值是（ ）



A . 2

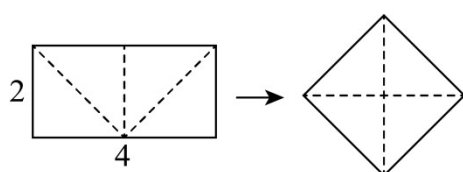
B .  $\sqrt{2}$

C .  $\pm 2$

D .  $\sqrt{4}$

### 题型 09 实数的几何应用+实际应用

**【典例1】** . 将边长分别为2和4的长方形如图剪开，拼成一个与长方形的面积相等的正方形，则该正方形的边长最接近整数（ ）



A . 1

B . 2

C . 3

D . 4

**【变式1】** . 图1是两个完全相同的长方形，长为5，宽为3，将他们沿对角线（图中的虚线）剪开，再拼接成如图2所示的大正方形，中间留有的空隙是一个小正方形，设小正方形的边长为 $a$ ，大正方形的边长为 $b$ ，则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$  .

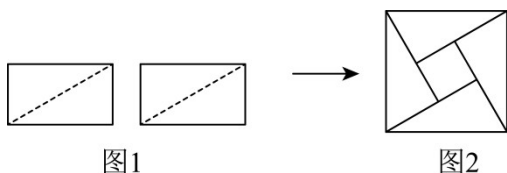


图1

图2

**【变式2】** . 蓄水池（如图）是用人工材料修建、具有防渗作用的蓄水设施．某地准备修建一个容积为  $125\text{m}^3$  的正方体蓄水池，则该正方体蓄水池的棱长为\_\_\_\_\_m．



## 题型10 科学计数法

**【典例1】** . 春季来临，郑州人民公园的鲜花盛开，郁金香的花香更浓．某品种郁金香花粉直径约为  $0.000000032$  米，数据  $0.000000032$  用科学记数法表示为\_\_\_\_\_．

**【变式1】** . *DeepSeek* 是中国深度求索公司研发的高性能 AI 语言模型．截至 2025 年 2 月 22 日，人工智能助手 *DeepSeek* 的累计下载量已达到 1.1 亿次，注册用户达 73300000 个．用科学记数法表示 73300000\_\_\_\_\_．

## 题型11 无限循环小数写为分数

**【典例1】** . 我们知道分数  $\frac{1}{3}$  写为小数的形式即  $0.\dot{3}$ ，反过来，无限循环小数  $0.\dot{3}$  写为分数形式即  $\frac{1}{3}$ ，事实上，任何一个无限循环小数都可以写为分数形式，例如将无限循环小数  $0.\dot{7}$  化成分数时，可设  $0.\dot{7} = x$ ，由  $0.\dot{7} = 0.777\ldots$  可知， $10x = 7.777\ldots$ ，所以  $10x = 7 + x$ ，解得  $x = \frac{7}{9}$ ，即  $0.\dot{7} = \frac{7}{9}$ ，仿此方法，将  $0.0\dot{2}1$  化成分数是\_\_\_\_\_．（写成最简分数）

**【变式1】** . 将下列循环小数化为分数．

(1)  $0.\dot{3}$ ；

(2)  $0.\dot{2}1$ ；

(3)  $0.3\dot{6}$ ；

(4)  $0.3\dot{2}1$ ．

## 题型 12 小数点移动问题

【典例 1】. (1) 已知  $\sqrt{7} \approx 2.646$  , 则  $\sqrt{0.07} \approx$  \_\_\_\_\_ ;

(2) 已知  $\sqrt[3]{0.3} \approx 0.669$  ,  $\sqrt[3]{3} \approx 1.442$  , 则  $\sqrt[3]{300} \approx$  \_\_\_\_\_ .

【变式 1】. 求一个正数的算术平方根, 有些数可以直接求得, 如  $\sqrt{4} = 2$  , 有些数不能直接求得, 如  $\sqrt{7}$  , 但可以利用计算器求得, 还可以通过一组数的内在联系, 运用规律求得. 请同学们观察下表:

|            |      |   |         |       |     |
|------------|------|---|---------|-------|-----|
| $n$        | 0.04 | 4 | 40<br>0 | 40000 | ... |
| $\sqrt{n}$ | 0.2  | 2 | 20      | 200   | ... |

已知  $\sqrt{2.061} \approx 1.436$  ,  $\sqrt{20.61} \approx 4.540$  , 则  $\sqrt{20610} \approx$  \_\_\_\_\_ .

## 题型 13 反证法证明无理数

【典例 1】. 【阅读理解】

定义: 可以表示为两个互素整数的商的形式的数称为有理数, 整数可以看作分母为 1 的有理数; 反之为无理数. 如  $\sqrt{2}$  不能表示为两个互素 (没有相同的因数) 的整数的商, 所以  $\sqrt{2}$  是无理数. 可以这样证明:

解: 设  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  ,  $a$  与  $b$  是互素的两个整数, 且  $b \neq 0$  ,

则  $2 = \frac{a^2}{b^2}$  , 即  $a^2 =$  \_\_\_\_\_ ① .

$\therefore b$  是整数且不为 0 ,

$\therefore a$  是 2 的倍数 .

设  $a = 2n$  (  $n$  是整数, 且  $n \neq 0$  ) ,

则  $a^2 = 4n^2$  .

$\therefore b^2 =$  \_\_\_\_\_ ② .

$\therefore b$  也是 2 的倍数, 与  $a, b$  是互素的整数矛盾 .

$\therefore \sqrt{2}$  是无理数 .

【解决问题】

(1) 写出①, ②表示的代数式, 使证明过程完整;

①\_\_\_\_\_；②\_\_\_\_\_

(2)证明： $\sqrt{3}$ 是无理数．

### 【变式1】．【阅读理解】

定义：可以表示为两个互素整数的商的形式的数称为有理数，整数可以看做分母为1的有理数；反之为无理数．如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素的整数的商，所以 $\sqrt{2}$ 是无理数．可以这样证明：

设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ， $a$ 与 $b$ 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$ ，

$$\text{则 } 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\text{即 } a^2 = \text{①} \text{ ．}$$

因为 $b$ 是整数且不为0，

所以 $a$ 是不为0的偶数．

设 $a = 2n$ （ $n$ 是整数，且 $n \neq 0$ ），

$$\text{则 } a^2 = 4n^2 \text{ ．}$$

$$\text{所以 } b^2 = \text{②} \text{ ．}$$

所以 $b$ 也是偶数，与 $a, b$ 是互素的整数矛盾．

所以 $\sqrt{2}$ 是无理数．

### 【解决问题】

(1)写出①，②表示的代数式，使证明过程完整；

(2)证明： $\sqrt{7}$ 是无理数，

## 强化训练

### 一、单选题

1．在 $\frac{22}{7}$ ，3.14， $\sqrt[3]{-27}$ ， $\frac{\pi}{2}$ ，0.43，0.3030030003...（每两个3之间依次多一个零）中，无理数的个数有（ ）

A．2个

B．3个

C．4个

D．5个

2．下列说法正确的是（ ）

- A.  $-5$  是  $25$  的算术平方根      B.  $6$  是  $-36$  的算术平方根  
C.  $49$  的平方根是  $\pm 7$       D.  $64$  的立方根是  $\pm 4$

3. 下列说法正确的个数是 ( )

- ①最大的负整数是  $-1$  ;      ②所有实数和数轴上的点一一对应 ;  
③  $a^2$  没有平方根 ;      ④任何实数的立方根有且只有一个

- A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

4. 下列各组数中互为相反数的是 ( )

- A.  $-3$  与  $\sqrt{(-3)^2}$       B.  $\sqrt{(-3)^2}$  与  $-\frac{1}{3}$       C.  $-3$  与  $\sqrt[3]{-27}$       D.  $\sqrt[3]{27}$  与  $|-3|$

5. 数轴上的两点  $A$ 、 $B$  分别表示实数  $\sqrt{3}-1$  和  $\sqrt{2}-1$  , 则  $A$ 、 $B$  两点之间的距离为 ( )

- A. 1      B.  $\sqrt{3}+\sqrt{2}$       C.  $\sqrt{3}-\sqrt{2}$       D.  $\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

6. 根据下列表格, 估计  $\sqrt{2.65}$  的大小 ( )

|       |        |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x$   | 1.61   | 1.62   | 1.63   | 1.64   | 1.65   |
| $x^2$ | 2.5921 | 2.6244 | 2.6569 | 2.6896 | 2.7225 |

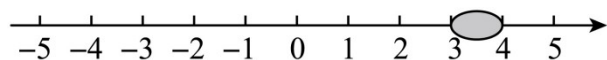
- A. 在  $1.61\sim 1.62$  之间      B. 在  $1.62\sim 1.63$  之间      C. 在  $1.63\sim 1.64$  之间      D. 在  $1.64\sim 1.65$  之间

## 二、填空题

7. 比较大小:  $\sqrt{5}$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{6}$  ;  $\sqrt[3]{10}$  \_\_\_\_\_  $\sqrt{5}$  . ( 填“ $>$ ”或“ $<$ ” )

8.  $\sqrt{81}$  的算术平方根为\_\_\_\_\_ .

9. 把无理数  $\sqrt{11}$  ,  $\sqrt{5}$  ,  $-\sqrt{3}$  表示在数轴上, 在这三个无理数中, 被墨迹 ( 如图所示 ) 覆盖住的无理数是\_\_\_\_\_ .



10. 已知  $x$  是  $\sqrt{10}$  的整数部分,  $y$  是  $\sqrt{10}$  的小数部分, 则  $(y-\sqrt{10})^{x-1}$  的平方根为\_\_\_\_\_ .

11. 对于实数  $x$  , 我们规定  $[x]$  表示不大于  $x$  的最大整数, 如  $[4]=4$  ,  $[\sqrt{3}]=1$  ,  $[-2.5]=-3$  , 现对  $82$  进行如下

操作：82<sup>第一次</sup> $\left[\frac{82}{\sqrt{82}}\right]=9$ <sup>第二次</sup> $\left[\frac{9}{3}\right]=3$ <sup>第三次</sup> $\left[\frac{3}{\sqrt{3}}\right]=1$ ，这样对 82 只需进行 3 次操作后变为 1，类似地，对 400 只需进行\_\_\_\_\_次操作后变为 1。

### 三、解答题

12. 把下列各数分别填在相应的横线上： $-\frac{1}{3}$ ，500%， $\frac{22}{7}$ ， $\sqrt{3}$ ，0，-1.7，21， $\sqrt{9}$ ， $\pi$ 。

整数：\_\_\_\_\_。

分数：\_\_\_\_\_。

无理数：\_\_\_\_\_。

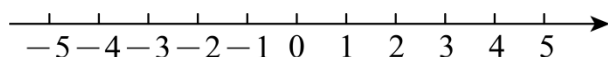
13. (1) 计算： $\sqrt[3]{8}-\sqrt{4}-\sqrt{(-3)^2}+|1-\sqrt{2}|$ ；

(2) 求下列各式的  $x$  值：

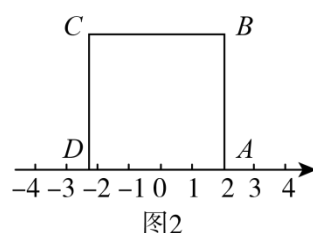
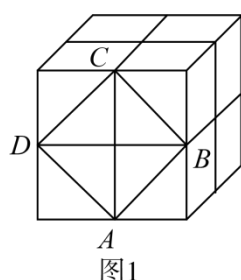
①  $\frac{1}{3}x^2=2$ ；

②  $8(x-1)^3=-\frac{27}{8}$ 。

14. 在数轴上表示下列各数，并用“<”连接： $\frac{8}{3}$ ，1.5， $-\sqrt{3}$ ， $-\pi$ 。



15. 如图 1，这是由 8 个同样大小的立方体组成的魔方，总体积为  $216\text{cm}^3$ 。



(1) 这个魔方的棱长为\_\_\_\_\_ cm。

(2) 图 1 的侧面有一个正方形  $ABCD$ ，求这个正方形的面积和边长。

(3) 将正方形  $ABCD$  放置在数轴上，如图 2 所示，点  $A$  与数 2 表示的点重合，则  $D$  在数轴上表示的数为\_\_\_\_\_。

16. 阅读下面的文字，解答问题：大家知道  $\sqrt{2}$  是无理数，而无理数是无限不循环小数，因此  $\sqrt{2}$  的小数部

分我们不可能全部写出来，于是小明用  $\sqrt{2}-1$  来表示  $\sqrt{2}$  的小数部分，你同意小明的表示方法吗？

事实上，小明的表示方法是有道理的，因为  $\sqrt{2}$  的整数部分是 1，将  $\sqrt{2}$  减去其整数部分，差就是  $\sqrt{2}$  的小数部分．请解答：

(1)  $\sqrt{23}$  的整数部分是\_\_\_\_\_，小数部分是\_\_\_\_\_；

(2) 如果  $\sqrt{7}+1$  的小数部分为  $a$ ,  $9-\sqrt{17}$  的整数部分为  $b$ ，求  $a+b-\sqrt{7}$  的平方根；

(3) 已知  $10+\sqrt{7}=x+y$ ，其中  $x$  是整数，且  $0 < y < 1$ ，求  $x-y$  的相反数．