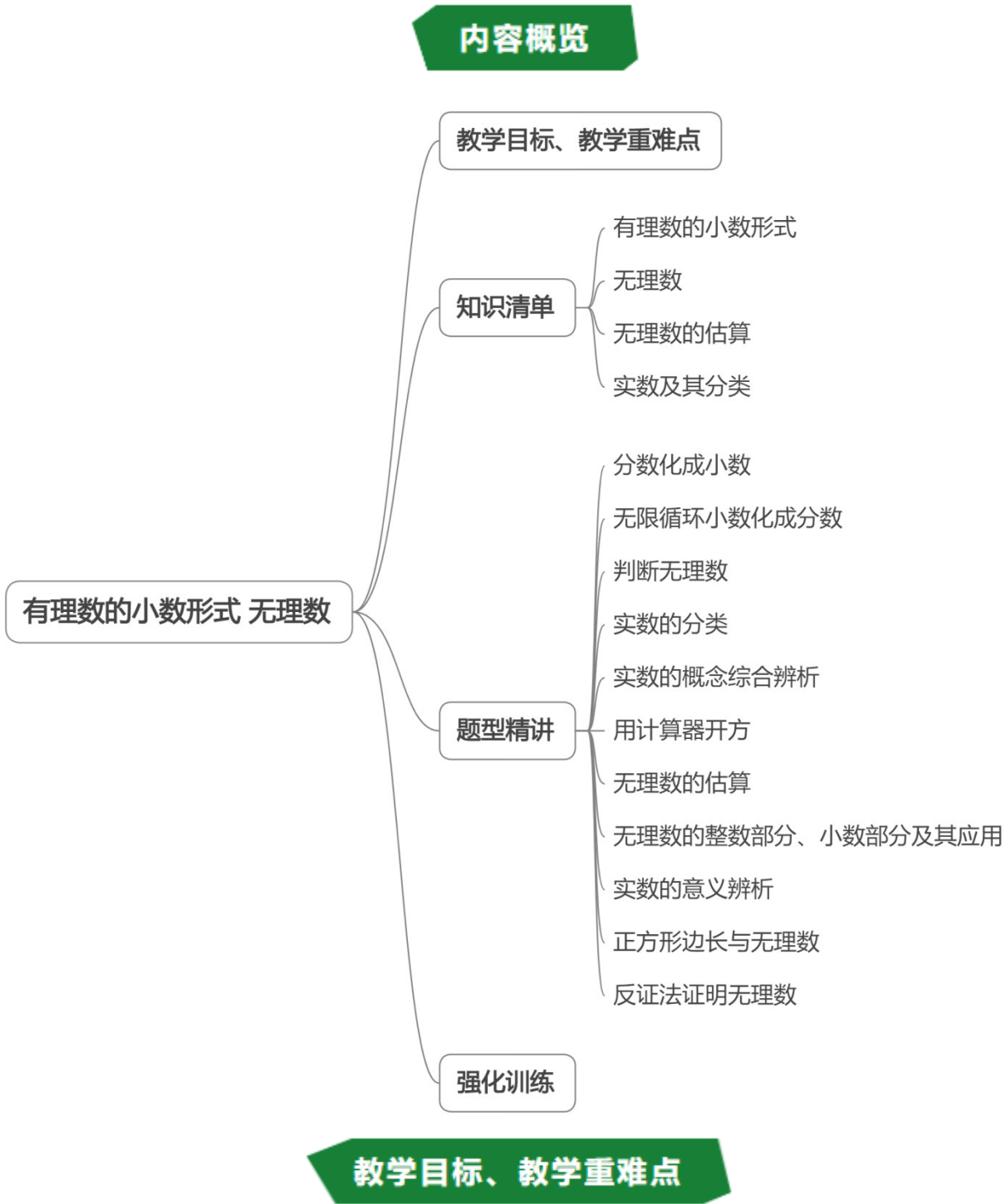


专题 19.3 有理数的小数形式 无理数



教学目标	1. 进一步深化理解有理数的概念； 2. 掌握无限循环小数化成分数的方法； 3. 认识无理数、无理数的估算；实数的概念与分类； 4. 理解被开方数越大，它的算术平方根也越大；用计算器开方。
------	--

教学重难点	1.重点 (1) 掌握设参(未知数)解决一些抽象数学的问题,达到转化的目的; (2) 继七年级下册用反证法证明几何问题后,本册用它证明代数问题; (3) 数的概念范围进一步扩大,目前已学习到实数;体验教材这个探索过程,感受其中所用的数学工具及思想的多元化。 2.难点 (1) 概念辨析;限循环小数化成分数; (2) 反证法; (3) 抽象问题具体化。
--------------	---

知识清单

知识点1 有理数的小数形式

1.有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式

①引入:我们知道,有理数是能够写成分数 $\frac{b}{a}$ (a, b 是整数, $a \neq 0$) 的数,请把下列有理数写成小数的形式,你有什么发现?

$$\frac{5}{2}, -\frac{4}{5}, \frac{22}{7}, -\frac{16}{9}, \frac{3}{22}.$$

我们发现,这些有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式,即

$$\frac{5}{2}=2.5, -\frac{4}{5}=-0.8, \frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}, -\frac{16}{9}=-1.\dot{7}, \frac{3}{22}=0.1\dot{3}\dot{6}.$$

在小学,我们曾经学习过分数与小数的互化,知道分数化成小数即用分子除以分母.当分子除以分母能够除尽时,分数可以化成有限小数,例如,

$$\frac{5}{2}=5 \div 2=2.5.$$

②当分子除以分母除不尽时,分数一定能化成无限循环小数:

当分子除以分母除不尽时,分数为什么一定能化成无限循环小数呢?我们以 $\frac{3}{22}$ 为例加以说明,下面是

$\frac{3}{22}$ 化成小数的过程:

$$\begin{array}{r}
 0.13636 \\
 22 \overline{) 3.0} \\
 \underline{22} \\
 80 \\
 \underline{66} \\
 14 \\
 \underline{132} \\
 80 \\
 \underline{66} \\
 14 \\
 \underline{132} \\
 8
 \end{array}$$

由于除法中余数一定小于除数，因此在除数确定的情况下，出现的余数只有有限种可能，如除数是 22 时，出现的余数只有 0、1、2、...、21，共 22 种可能。如果永远除不尽，那么相同的余数一定会重复出现，如 $3 \div 22$ ，相同的余数 8 和 14 依次重复出现。一旦出现相同的余数，补 0 后再继续相除，商也一定会出现循环，如 $\frac{3}{22} = 3 \div 22 = 0.1\dot{3}\dot{6}$ ，在相同的余数 8 和 14 依次重复出现后，商相应出现循环节 36。所以当分子除以分母除不尽时，分数一定能化成无限循环小数。

③任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式

可以把整数看成小数点后是 0 的小数，于是任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式。

2. 无限循环小数化成分数

反过来，任何有限小数或无限循环小数也都是有理数。在小学，我们已经学习了如何把有限小数化成分数，

$$0.9 = \frac{9}{10}, \quad 2.12 = 2 \frac{12}{100} = 2 \frac{3}{25}.$$

如

那么，无限循环小数如何化成分数呢？

①“单循环”（即循环节为 1 位数）

将 $0.\dot{5}$ 化成分数。

$$\text{设 } x = 0.\dot{5}, \text{ 那么 } 10x = 5.\dot{5}.$$

$$\text{因为 } 5.\dot{5} = 5 + 0.\dot{5}, \text{ 所以 } 10x = 5 + x.$$

$$\text{化简, 得 } 9x = 5, \text{ 解得 } x = \frac{5}{9}.$$

$$\text{所以, } 0.\dot{5} = \frac{5}{9}.$$

②“双循环”（即循环节为 2 位数）

将 $1.\dot{5}\dot{3}$ 化成分数。

$$\text{设 } x = 1.\dot{5}\dot{3}, \text{ 那么 } 100x = 153.\dot{5}\dot{3}.$$

$$\text{因为 } 153.\dot{5}\dot{3} = 153 + 0.\dot{5}\dot{3}, \text{ 所以 } 100x = 153 + x.$$

$$\text{化简, 得 } 99x = 153, \text{ 解得 } x = \frac{153}{99}.$$

$$\text{所以, } 1.\dot{5}\dot{3} = 1 \frac{53}{99}.$$

③“三循环”（即循环节为 3 位数）

将 $0.\dot{1}\dot{5}0\dot{3}$ 化成分数.

设 $x=0.\dot{1}\dot{5}0\dot{3}$, 那么 $1\,000x=503.\dot{1}\dot{5}0\dot{3}$.

因为 $503.\dot{1}\dot{5}0\dot{3}=503+0.\dot{1}\dot{5}0\dot{3}$, 所以 $1\,000x=503+x$.

化简, 得 $999x=503$, 解得 $x=\frac{503}{999}$.

又因为 $0.\dot{1}\dot{5}0\dot{3}=0.1+0.0\dot{5}0\dot{3}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\times 0.\dot{5}0\dot{3}=\frac{1+x}{10}$, 所以 $0.\dot{1}\dot{5}0\dot{3}=\frac{1+x}{10}$

$$\frac{1\,502}{9\,990}=\frac{751}{4\,995}.$$

至此我们知道：有理数必为有限小数或无限循环小数；反过来，有限小数或无限循环小数必为有理数.

【即学即练】

1. 判断下列说法是否正确，并说明理由：

- (1)有限小数一定是有理数；
- (2)有理数一定是有限小数；
- (3)无限循环小数一定是有理数；
- (4)有理数一定是无限循环小数.

2. 将无限循环小数 $2.\dot{3}33\dots$ 化成分数是_____.

3. 将无限循环小数 $0.1\dot{3}33\dots$ 化成分数是_____.

4. 用如下方法可以将 $0.\dot{1}$ 化为分数形式.

步骤① 设 $x=0.\dot{1}$

步骤② $10x=10\times 0.\dot{1}$

步骤③ $10x=1.\dot{1}$, 则 $10x=1+0.\dot{1}$

步骤④ $10x=1+x$, 解得： $x=\frac{1}{9}$.

(1)用以上方法将 $0.\dot{3}$ 化为分数形式；

(2) $0.0\dot{3}$ 化为分数形式是_____. (直接写出结果)

知识点2 无理数

1.引入

如图 19-2-1,把边长为 1 的两个正方形分别沿着它们的一条对角线剪开,得到四个形状、大小都相同的等腰直角三角形,它们的面积都是 $\frac{1}{2}$ 再把这四个等腰直角三角形拼成一个四边形 ABCD,那么我们就得到一个面积为 2 的正方形.

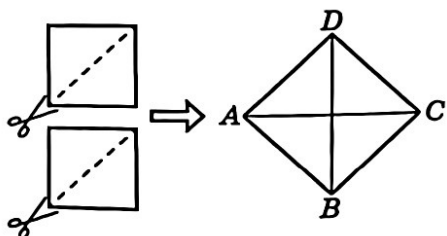


图 19-2-1

图 19-2-1 中,正方形 ABCD 的边长是多少?

设正方形 ABCD 的边长为 x , 则
 $x^2=2$.

由算术平方根的意义,得 $x = \sqrt{2}$

所以正方形 ABCD 的边长是 $\sqrt{2}$

正方形 ABCD 的边长是一条线段的长,即 $\sqrt{2}$ 表示一个数,那么 $\sqrt{2}$ 是有理数吗?

2.反证法证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数

事实上, $\sqrt{2}$ 不是有理数.可以用反证法证明如下:

假设 $\sqrt{2}$ 是一个有理数,那么存在互素的正整数 a 、 b ,使两边平方,得于是 $a^2=2b^2$.

于是 a^2 是 2 的倍数,所以 a 也是 2 的倍数.

设 $a=2m$, 其中 m 是正整数,就有 $(2m)^2=2b^2$, 即 $b^2=2m^2$.

于是 b^2 是 2 的倍数,所以 b 也是 2 的倍数.

由此可见, a 与 b 不是互素的,与假设的 a 与 b 互素相矛盾.

因此 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

3.无理数

这样,我们就得到了 $\sqrt{2}$ 不是有理数,也就是说, $\sqrt{2}$ 既不是有限小数,也不是无限循环小数,那么 $\sqrt{2}$ 一定是无限不循环小数.实际上,很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数.

无限不循环小数又叫作无理数.例如, $\sqrt{3}$ 、 $-\sqrt{5}$ 、 2 等都是无理数, π 也是无理数.

【即学即练】

1. 下列实数中,是无理数的是 ()

A. -2

B. 2

C. 0.2

D. $\sqrt{2}$

2. 实数 $\sqrt[3]{-8}$, 0 , $\frac{3}{5}$, π , 0.3030030003... (相连两个 3 之间依次多一个 0) , 其中无理数的个数为 ()

- A . 1 B . 2 C . 3 D . 4

3. 【阅读理解】

定义：可以表示为两个互素整数的商的形式的数称为有理数，整数可以看作分母为 1 的有理数；反之为无理数．如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素（没有相同的因数）的整数的商，所以 $\sqrt{2}$ 是无理数．可以这样证明：

解：设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, a 与 b 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$,

则 $2 = \frac{a^2}{b^2}$, 即 $a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ① .

$\therefore b$ 是整数且不为 0 ,

$\therefore a$ 是 2 的倍数 .

设 $a = 2n$ (n 是整数，且 $n \neq 0$) ,

则 $a^2 = 4n^2$.

$\therefore b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ② .

$\therefore b$ 也是 2 的倍数，与 a , b 是互素的整数矛盾 .

$\therefore \sqrt{2}$ 是无理数 .

【解决问题】

(1) 写出①，②表示的代数式，使证明过程完整；

① $\underline{\hspace{2cm}}$; ② $\underline{\hspace{2cm}}$

(2) 证明： $\sqrt{3}$ 是无理数 .

知识点 3 无理数的估算

$\sqrt{2}$ 究竟有多大?

虽然 $\sqrt{2}$ 是无理数，但我们可以用有理数估计它的大致范围.

我们知道，边长越大的正方形的面积越大；反之，面积越大的正方形的边长也越大. 所以被开方数越大，对

应的算术平方根也越大，即如果 $a > b \geq 0$, 那么 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

利用这个结论，我们可以估计 $\sqrt{2}$ 的大小：

表 19-1

2 所在的范围	$\sqrt{2}$ 所在的范围
$1^2 < 2 < 2^2$	$1 < \sqrt{2} < 2$
$1.4^2 < 2 < 1.5^2$	$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$
$1.41^2 < 2 < 1.42^2$	$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$
$1.414^2 < 2 < 1.415^2$	$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$
$1.4142^2 < 2 < 1.4143^2$	$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$
$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$	$1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$
$1.414213^2 < 2 < 1.414214^2$	$1.414213 < \sqrt{2} < 1.414214$
...	...

如果表 19-1 继续下去，可以得到 $\sqrt{2}$ 的更精确的近似值.我们可以用计算器求出一个数的平方根或其近似值.

记忆常用数的近似值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ $\sqrt{3} \approx 1.732$ $\sqrt{5} \approx 2.236$

注意：用计算器求一个数的平方根时，按键顺序与计算器的型号有关，具体操作可以参考计算器的使用说明书.

【即学即练】

1. 请你写出一个比 -3 小且比 -4 大的无理数_____.
2. b 为 $\sqrt{34}$ 的整数部分，则 b 的值为_____.
3. 某一正方体的体积是 100 ，则它的棱长 a 的整数部分是_____.
4. $6 + \sqrt{17}$ 的整数部分是_____，小数部分是_____.
5. 关于“ $\sqrt{10}$ ”，下面说法不正确的是 ()
 - A. 它是 10 的平方根
 - B. 它是一个无理数
 - C. 若 $a < \sqrt{10} < a+1$ ，则整数 a 为 3
 - D. 它表示面积为 10 的正方形的边长

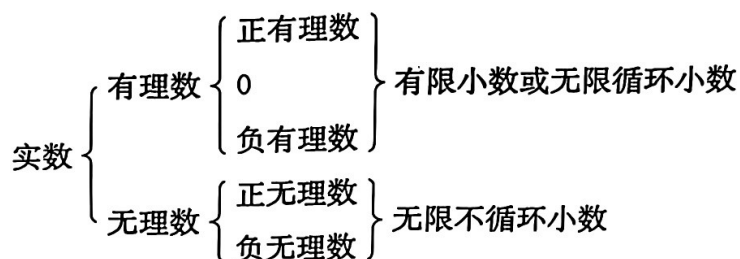
知识点 4 实数及其分类

1. 实数：有理数和无理数统称为实数。

2. 实数的分类

① 有理数为有限小数或无限循环小数，无理数为无限不循环小数.不是有理数的实数就是无理数.

实数可以这样分类：



②实数也可以分为正实数、0、负实数.

【即学即练】

1. 把下列各实数的序号填在相应的大括号内 .

① $\sqrt{25}$, ② -5π , ③ 0.31 , ④ $2.181881888\cdots$ (相邻两个 1 之间依次增加一个 1) , ⑤ $\sqrt[3]{9}$, ⑥ $-3.141592\dot{6}$, ⑦ $\frac{22}{7}$, ⑧ 0 .

整数 : { ... };

非负实数 : { ... };

无理数 : { ... };

2. 在下列各数中, 选择合适的数填入相应的集合中 .

$-\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\sqrt[3]{8}$, 0 , $-2.123456\cdots$, $-\left(-\sqrt{0.49}\right)$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

有理数集合 : { ... } ;

无理数集合 : { ... } ;

负实数集合 : { ... } .

3. 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 无理数一定是实数 B. 实数都是有理数
C. 一个正数的平方根一定是正数 D. 无理数包括了 0

4. 下列命题 : ①无理数都是实数 ; ②实数都是无理数 ; ③无限小数都是无理数 ; ④带根号的数都是无理数 ; ⑤不带根号的数都是有理数 , 其中错误的命题的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

题型精讲

题型 01 分数化成小数

【典例 1】 . 将下列分数化成小数：

(1) $\frac{5}{9}$ ；

(2) $\frac{9}{5}$ ；

(3) $\frac{11}{12}$ ；

(4) $\frac{43}{11}$.

【变式 1】 . 把下列分数化成化成小数，不能化为有限小数的，保留三位小数 .

$\frac{3}{8}$, $\frac{8}{18}$, $\frac{9}{48}$, $4\frac{29}{30}$.

题型 02 无限循环小数化成分数

【典例 1】 . 将下列循环小数化为分数 .

(1) $0.\dot{3}$ ；

(2) $0.\dot{2}\dot{1}$ ；

(3) $0.3\dot{6}$ ；

(4) $0.3\dot{2}\dot{1}$.

【变式 1】 . 将下列小数化为分数 .

(1) $0.\dot{6}$

(2) $0.\dot{3}\dot{7}\dot{2}$

(3) $0.1\dot{8}$

(4) $0.2\dot{6}\dot{3}$

题型 03 判断无理数

【典例 1】 . 下列各数中，是无理数的是 ()

A . $\sqrt{9}$

B . $\sqrt{8}$

C . $\frac{11}{9}$

D . -0.3030030003

【变式 1】 . 实数 0.6 , $4\frac{2}{3}$, $-\sqrt[3]{9}$, 0 , $\sqrt{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $0.0121121112\ldots$ (相邻每个 2 之间依次多一个 1) , 其

中无理数的个数为 ()

- A . 3 B . 4 C . 5 D . 6

【变式 2】 . 在下列各数 0 、 0.2 、 3π 、 $\frac{22}{7}$ 、 $6.1010010001\dots$ (相邻两个 1 之间的 0 的个数依次加 1)、

$\frac{131}{11}$ 、 $\sqrt{27}$ 中，无理数的个数为 ()

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

题型 04 实数的分类

【典例 1】 . 把下列各数进行分类： 0 ， $-\pi$ ， 3.14 ， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， 250% ， $-\frac{2}{3}$ ， -2025 ， $\sqrt[3]{-4}$ ， $0.\dot{9}$

负实数：

正有理数：

无理数：

【变式 1】 . 把下列各数填入相应的括号里 .

$3\frac{1}{2}$ ， $\sqrt{27}$ ， 0 ， $\sqrt[3]{-8}$ ， $\frac{\pi}{3}$ ， -0.5 ， 3.14 ， -0.2121121112 ， $\dots$.

(1)正实数： $\{ \quad \quad \quad , \dots \}$ ；

(2)负实数： $\{ \quad \quad \quad , \dots \}$ ；

(3)有理数： $\{ \quad \quad \quad , \dots \}$ ；

(4)无理数： $\{ \quad \quad \quad , \dots \}$.

【变式 2】 . 把下列各实数的序号填在相应的大括号内 .

① $\frac{\pi}{2}$ ，② $\sqrt{4}$ ，③ 0 ，④ $3.2121121112\dots$ (相邻两个 2 之间依次增加一个 1)，⑤ $\sqrt[3]{-9}$ ，⑥ $-|-3|$ ，⑦ $\frac{22}{7}$ ，

⑧ $3.\dot{1}$.

整数 $\{ \quad \quad \quad \}$ ；

分数 $\{ \quad \quad \quad \}$ ；

无理数 $\{ \quad \quad \quad \}$.

题型 05 实数的概念综合辨析

【典例 1】. 下列说法正确的是 ()

- A. 正实数和负实数统称实数 B. 正数、0 和负数统称有理数
C. 带根号的数和负数统称实数 D. 无理数和有理数统称实数

【变式 1】. 下列说法正确的是 ()

- A. 无理数都是无限小数 B. 有理数只是有限小数
C. 无限小数都是无理数 D. 实数可以分为正实数和负实数

【变式 2】. 下列说法中，错误的是 ()

- A. 实数可分为有理数和无理数 B. 无理数可分为正无理数和负无理数；
C. 无理数都是无限小数 D. 无限小数都是无理数 .

【变式 3】. 下列说法正确的是 ()

- A. 实数分为正实数和负实数 B. 实数分为整数和分数
C. 实数分为有理数和无理数 D. 带根号的数都是无理数

【变式 4】. 有下列说法：①带根号的数是无理数；②无理数是开方开不尽的数；③无理数是无限小数；

④所有实数都是分数 . 其中正确的有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

题型 06 用计算器开方

【典例 1】. 用计算器求下列各式的值 (结果精确到 0.01) :

- (1) $\sqrt{75}$;
(2) $-\sqrt{28.8}$;
(3) $\sqrt[3]{15.4}$;
(4) $\sqrt[3]{1150}$;
(5) $-\sqrt{8000}$.

【变式 1】. 用计算器求下列各式的值 (精确到 0.001) :

(1) $-\sqrt{94.3}$; (2) $\sqrt[3]{0.43}$; (3) $\sqrt{55225}$; (4) $\sqrt[3]{34012224}$.

题型 07 无理数的估算

【典例 1】. 估计 $\sqrt{20}$ 的值在 ()

- A. 2 和 3 之间 B. 3 和 4 之间 C. 4 和 5 之间 D. 5 和 6 之间

【变式 1】. 写一个大于 2 小于 3 的无理数_____.

【变式 2】. 若 n 为正整数, 且满足 $n < \sqrt{26} < n+1$, 则 $n =$ _____.

题型 08 无理数的整数部分、小数部分及其应用

【典例 1】. $\sqrt{27}$ 的小数部分为_____.

【变式 1】. $\sqrt{5}+1$ 的整数部分为 ()

- A. 2 B. 6 C. 3 D. 5

【变式 2】. $\sqrt{17}-2$ 的整数部分是_____, 小数部分是_____.

【变式 3】. 已知正数 m 两个不同的平方根分别为 $3a-7$ 和 $a+3$, $b+12$ 的立方根为 2, c 是 $\sqrt{11}$ 的整数部分.

(1) 求 m 的值;

(2) 求 $5a+b+2c$ 的平方根.

题型 09 实数表示的意义辨析

【典例 1】. 下列说法中, 错误的是 ()

- A. $\sqrt{16}$ 的平方根是 ± 2 B. $\sqrt{7}$ 是无理数
C. $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$ 是有理数 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是分数

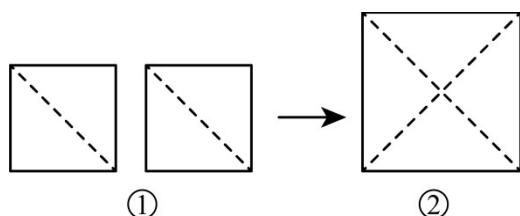
【变式 1】. 关于“ $\sqrt{21}$ ”, 下列说法不正确的是 ()

- A. 它可以表示面积为 21 的正方形的边长
B. 它表示 21 的算术平方根
C. 它的小数部分是 $\sqrt{21}-4$

D. 方程 $x^2 = 21$ 的解是 $x = \sqrt{21}$

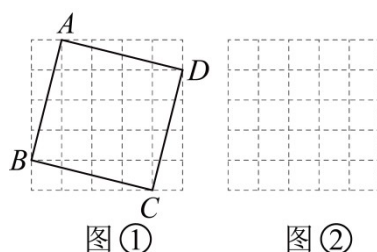
题型 10 正方形边长与无理数

【典例 1】 . 如图，把两个面积均为 50cm^2 的小正方形纸片分别沿图①中的虚线裁剪后拼成一个大正方形纸片，如图② .



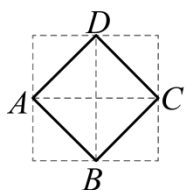
- (1) 大正方形纸片的边长为_____cm ;
- (2) 若沿此大正方形纸片边的方向裁剪出一个长方形纸片，能否使裁剪出的长方形纸片的长是宽的²倍，且面积为 72cm^2 ? 若能，求剪出的长方形纸片的长和宽；若不能，请说明理由 .

【变式 1】 . 如图①，正方形网格中每个小正方形的边长都为 1，正方形 $ABCD$ 的顶点都在格点上 .

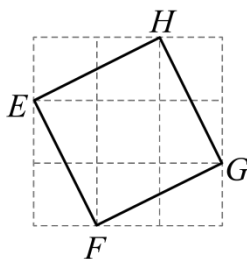


- (1) 正方形 $ABCD$ 的面积是多少？边长是多少？
- (2) 正方形 $ABCD$ 的边长是有理数还是无理数？它在哪两个整数之间？
- (3) 在图②中画一个与图①面积不相等的正方形，要求它的边长为无理数，并写出它的边长 .

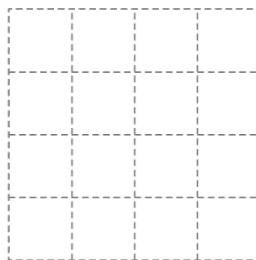
【变式 2】 . **【阅读理解】** 在数学学习中，我们常常借助由边长为 1 的小正方形组成的网格来解决问题，并把由格点（小正方形的顶点）组成的正方形成为格点正方形 . 图①是由四个边长为 1 的小正方形组成的网格，容易发现格点正方形 $ABCD$ 的面积为 2，则这个格点正方形的边长为 $\sqrt{2}$.



图①



图②



图③

【问题解决】

(1) 图②是由9个小正方形网格组成的图形，那么格点正方形 $EFGH$ 的面积为_____，边 EH = _____；

(2) 在由16个小正方形网格组成的图③中，画出边长为 $\sqrt{8}$ 的格点正方形。

题型 11 反证法证明无理数

【典例 1】 . 【阅读理解】

定义：可以表示为两个互素整数的商的形式数称为有理数，整数可以看做分母为1的有理数；反之为无理数。如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素的整数的商，所以 $\sqrt{2}$ 是无理数。可以这样证明：

设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ， a 与 b 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$ ，

$$\text{则 } 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\text{即 } a^2 = \text{①}$$

因为 b 是整数且不为0，

所以 a 是不为0的偶数。

设 $a = 2n$ (n 是整数，且 $n \neq 0$)，

$$\text{则 } a^2 = 4n^2$$

$$\text{所以 } b^2 = \text{②}$$

所以 b 也是偶数，与 a, b 是互素的整数矛盾。

所以 $\sqrt{2}$ 是无理数。

【解决问题】

(1) 写出①，②表示的代数式，使证明过程完整；

(2)证明： $\sqrt{7}$ 是无理数，

【变式1】 . **【阅读理解】** 公元前⁵世纪，毕达哥拉斯学派中的一名成员希伯索斯发现了无理数 $\sqrt{2}$ ，导致了第一次数学危机 .

定义：可以表示为两个互素整数的商的形式数称为有理数，整数可以看做分母为¹的有理数；反之为无理数 . 如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素的整数的商，所以 $\sqrt{2}$ 是无理数 . 可以这样证明：

设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ， a 与 b 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$ ，

则 $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ，即 $a^2 = \text{①}$.

因为 b 是整数且不为⁰，

所以 a 是不为⁰的偶数 .

设 $a = 2n$ （ n 是整数，且 $n \neq 0$ ），则 $a^2 = 4n^2$.

所以 $b^2 = \text{②}$.

所以 b 也是偶数，与 a, b 是互素的整数矛盾 .

所以 $\sqrt{2}$ 是无理数 .

【解决问题】

(1)写出①，②表示的代数式，使证明过程完整；

(2)证明： $\sqrt[3]{6}$ 是无理数 .

强化训练

一、单选题

1 . 在给出的一组数 $0, 2\pi, \sqrt{12}, 3.14, \frac{22}{7}$ 中无理数有 ()

- A . 1个 B . 2个 C . 3个 D . 4个

2 . 下列分数中，不能化为有限小数的是 ()

- A . $\frac{7}{10}$ B . $\frac{8}{25}$ C . $\frac{11}{35}$ D . $\frac{5}{8}$

3 . 下列说法正确的有 ()

(1)所有无限小数都是无理数;(2)所有无理数都是无限小数;(3)有理数都是有限小数;(4)不是有限小数的不是有理数

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

4 . 下列几种说法正确的有 ()

①无理数都是无限小数；②带根号的数是无理数；③实数分为正实数和负实数；④无理数包括正无理数、
0 和负无理数 .

- A . ①②③④ B . ②③ C . ①④ D . ①

5 . 估算 $\sqrt{28}-3$ 的值 ()

- A . 在 1 到 2 之间 B . 在 2 到 3 之间 C . 在 3 到 4 之间 D . 在 4 到 5 之间

6 . 下列关于 $\sqrt{27}$ 的描述正确的是 ()

- A . 它是一个有理数 B . 27 的平方根
C . 体积为 27 的正方体的棱长 D . 面积为 27 的正方形的边长

二、填空题

7 . 将下列各数进行分类 (填序号即可) :

① 1 , ② $\sqrt{5}$, ③ 0 , ④ -3.2 , ⑤ $\sqrt[3]{27}$, ⑥ $-\frac{2}{7}$, ⑦ 1.202002... (每个“2”之间依次多一个“0”) .

正整数 : _____ ; 分数 : _____ ; 无理数 : _____ .

8 . 已知 $a < \sqrt{19} < b$, 且 a, b 为两个连续整数 , 则 $a+b=$ _____ . $\sqrt{19}$ 的小数部分是 _____ .

9 . 观察 : 因为 $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$, 即 $2 < \sqrt{5} < 3$, 所以 $\sqrt{5}$ 的整数部分为 2 , 小数部分为 $\sqrt{5}-2$. 请你观察上述

规律后解决问题 : 规定用符号 $[m]$ 表示实数 m 的整数部分 , 例如 : $\left[\frac{2}{3}\right]=0$, $[\sqrt{6}]=2$. 按此规定 , 那么

$[\sqrt{10}+1]$ 的值为 _____ .

三、解答题

10 . 在下列各数中 , 选择合适的数填入相应的集合中 .

$$-\frac{1}{2}, \sqrt[3]{9}, \frac{\pi}{3}, 3.14, -\sqrt[3]{8}, 0, -2.123456\cdots, \sqrt{0.49}, -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

有理数集合：{ ... }；

无理数集合：{ ... }；

正实数集合：{ ... }；

负实数集合：{ ... }；.

11. 把下列分数化为小数：

$$(1) \frac{3}{4}, \frac{13}{8}, \frac{13}{25}; \quad (2) \frac{2}{9}, \frac{3}{11}, \frac{4}{33}; \quad (3) \frac{5}{6}, \frac{5}{22}, \frac{7}{90}; \quad (4) \frac{2}{7}, \frac{3}{13}, \frac{4}{37}.$$

12. 用计算器求下列各式的值 (精确到^{0.01})

$$(1) \sqrt{3.62}; \quad (2) -\sqrt{\frac{7}{8}}; \quad (3) \sqrt[3]{-0.81}; \quad (4) \sqrt[3]{327.8}; \quad (5) -\sqrt{512}.$$

13. 已知 $2a-1$ 的平方根是 ± 3 ， $a+3b-1$ 的立方根是 -2 ， c 是 $\sqrt{46}$ 的整数部分.

(1) 求 a, b, c 的值；

(2) 求 $a+2b+c$ 的平方根.

14. $\sqrt{2}$ 是无理数，而 $1 < \sqrt{2} < 2$ ，所以 $\sqrt{2}$ 的整数部分是1，于是可用 $\sqrt{2}-1$ 来表示 $\sqrt{2}$ 的小数部分. 根据

以上材料，完成下列问题：

(1) $\sqrt{17}$ 的整数部分是_____，小数部分是_____；

(2) $3+\sqrt{3}$ 也是夹在相邻两个整数之间的，可以表示为 $a < 3+\sqrt{3} < b$ ，求 $a+b$ 的平方根.

15. (1) 如图1是 3×3 方格，其中每个小正方形的边长为1，中间阴影部分正方形的边长为_____；面积为_____.

(2) 如图2是 4×4 方格，请在方格中画出边长为 $\sqrt{10}$ 的正方形 (顶点在格点上)，并涂上阴影；

(3) 若两个连续整数 x, y 满足 $x < \sqrt{10}+1 < y$ ，求 $x+y$ 的算术平方根.

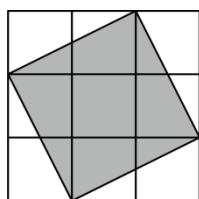


图1

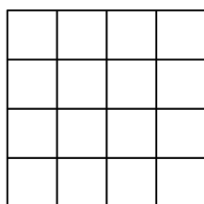


图2

16. 阅读材料：我们已经学会了把有限小数化成分数，现在让我们来探究如何将 $0.\dot{5}$ 化为分数：

【解析】解：设 $x = 0.\dot{5} = 0.5555\cdots$ ，

那么 $10x = 5.\dot{5} = 5 + 0.5$ （利用倍数关系构造了另一个有同样循环节的数），

所以 $10x - x = 5.\dot{5} - 0.5 = 5$ ，解得 $x = \frac{5}{9}$ 。

所以， $0.\dot{5} = \frac{5}{9}$ 。这样我们就将无限循环小数 $0.\dot{5}$ 化为了分数。

(1) 试着用上述方法将无限循环小数 $0.\dot{2}5$ 分别化为分数；

(2) 将无限循环小数 $2.\dot{5}$ 化为分数。

17. 探究问题

(1) 阅读操作，在小学阶段我们学过，任何有限位小数都可以转化成分数的形式。

请你将下列各数化成分数形式：

① $-3.14 = \underline{\hspace{1cm}}$ ② $-5.6 = \underline{\hspace{1cm}}$

(2) 发现问题，我们小学阶段的小数，除有限位小数外，还有无限位的小数，那就是 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

(3) 提出问题，对于 $\underline{\hspace{1cm}}$ ？

(4) 分析问题：例如：如何将 $0.\dot{1}4$ 化成分数的形式？

分析：假设 $x = 0.\dot{1}4$ ，由等式的基本性质得， $100x = 14.\dot{1}4$ ，

即 $100x = 14 + 0.\dot{1}4$ ，也就是 $100x = 14 + x$ ，

解这个关于 x 的一元一次方程，得 $x = \frac{14}{99}$ ，所以 $0.\dot{1}4 = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

说明可以将 $0.\dot{1}4$ 化成分数的形式。

(5) 解决问题。请你类比上面的做法，将下列的无限循环小数化成整数或分数的形式：

① $0.\dot{9} = \underline{\hspace{1cm}}$ ，② $-0.\dot{1}0 = \underline{\hspace{1cm}}$ ，③ $2.40\dot{5} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(6) 归纳结论：_.

18. 根据表格回答问题：

x	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
x^2	9	9.61	10.24	10.89	11.56	12.25	12.96	13.69	14.44	15.21	16

(1) 11.56 的平方根是多少？

(2) $\sqrt{1444} =$ _____.

(3) 估计 $\sqrt{1150}$ 在哪两个整数之间.

19. 定义：可以表示为两个互素整数的商的形式的数称为有理数，整数可以看作分母为 1 的有理数；反之

为无理数. 如 $\sqrt{2}$ 不能表示为两个互素的整数的商，所以 $\sqrt{2}$ 是无理数. 可以这样证明：

设 $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ ， a 与 b 是互素的两个整数，且 $b \neq 0$ ，则 $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ，所以 $a^2 = 2b^2$.

因为 b 是整数且不为 0，所以 a 是不为 0 的偶数. 设 $a = 2n$ (n 是整数)，

所以 $b^2 = 2n^2$ ，所以 b 也是偶数，与 a 与 b 是互素的整数矛盾，

所以 $\sqrt{2}$ 是无理数.

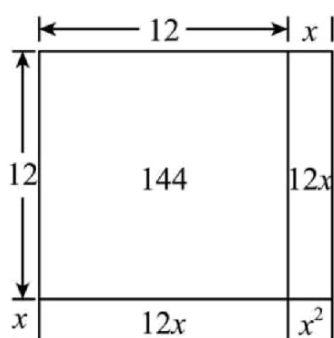
仔细阅读上文，然后请证明： $\sqrt{5}$ 是无理数.

20. 小李同学探索 $\sqrt{150}$ 的近似值的过程如下：

$\because$ 面积为 150 的正方形边长为 $\sqrt{150}$ ，且 $12 < \sqrt{150} < 13$ ，

$\therefore$ 设 $\sqrt{150} = 12 + x$ ，其中 $0 < x < 1$ ，

画出示意图，如图所示.



根据示意图，可得图中正方形的面积

为 $S_{\text{正方形}} = 12^2 + 2 \times 12x + x^2$

又 $\because S_{\text{正方形}} = 150$,

$\therefore 12^2 + 2 \times 12x + x^2 = 150$,

当 $x^2 < 1$ 时, 可忽略 x^2 , 得 : $144 + 24x \approx 150$, 解得 : $x \approx 0.25$,

$\therefore \sqrt{150} \approx 12.25$.

(1) $\sqrt{176}$ 的整数部分为_____ ;

(2) 仿照小李的探索过程, 求 $\sqrt{176}$ 的近似值 . (画出示意图, 标注数据, 并写出求解过程)