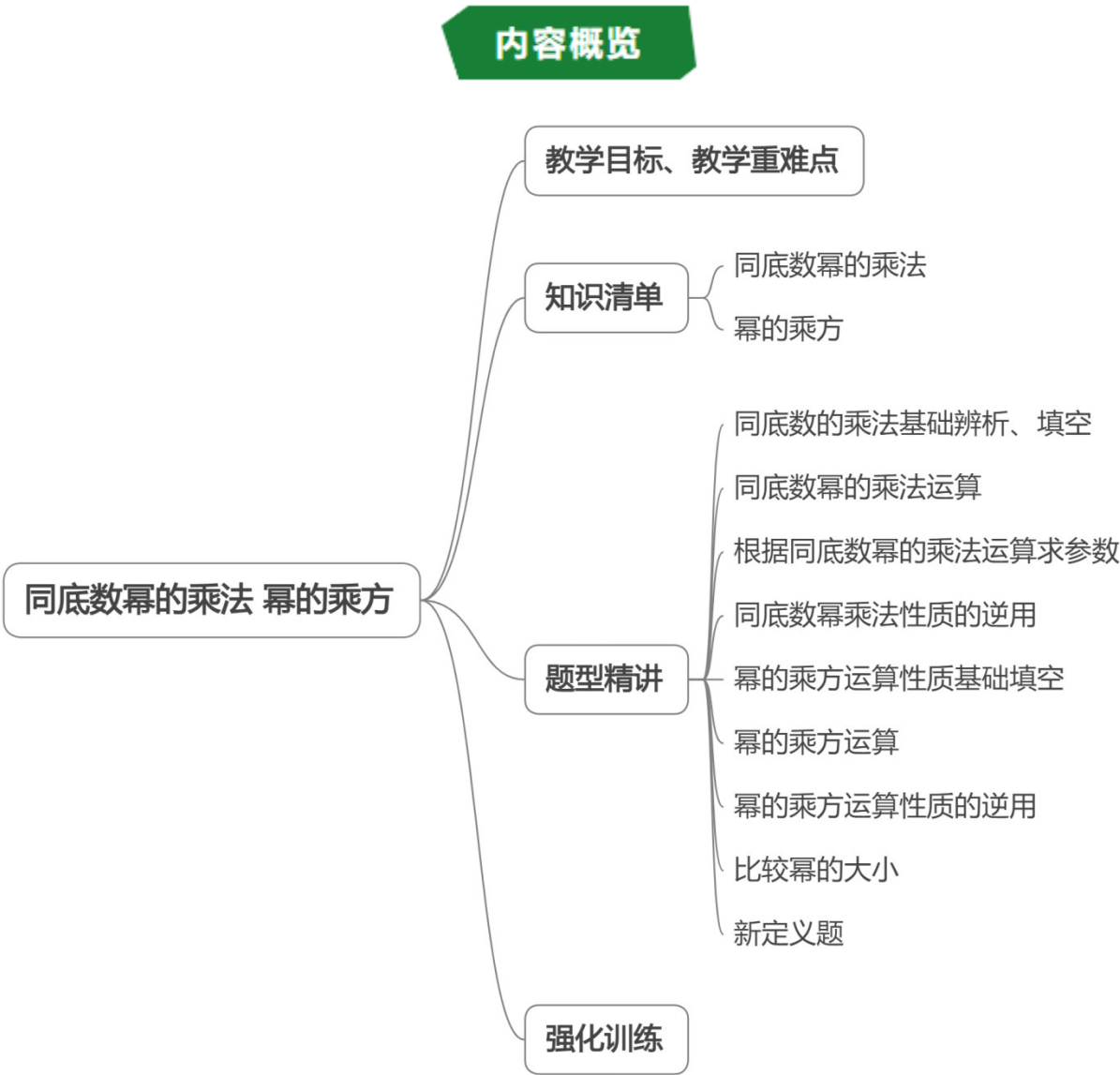


专题 11.1 同底数幂的乘法 幂的乘方



教学目标、教学重难点

教学目标	1. 了解乘方及其有关概念； 2. 掌握同底数幂乘法的性质及其逆用； 3. 知道幂的乘方性质及其逆用。
教学重难点	1.重点 (1) 会利用同底数幂乘法的性质、幂的乘方性质进行运算； (2) 根据同底数幂乘法的性质、幂的乘方性质求值； (3) 同底数幂乘法的性质、幂的乘方性质的综合应用。

	2.难点 (1) 理解幂有关的概念及其应用； (2) 同底数幂乘法的性质、幂的乘方性质的综合应用——比较幂的大小、寻求参数之间的关系等。
--	---

知识清单

知识点1 同底数幂的乘法

1.乘方

我们知道， $a \cdot a \cdot a$ 表示三个 a 相乘，记作 a^3 ，叫作“ a 的立方”或“ a 的三次方”。

一般地，将 n 个 a 相乘的运算叫作**乘方**，

2.幂

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{n \text{ 个 } a}$$
 记作“ a^n ”，乘方的结果叫作**幂**。

3.乘方有关的概念

在 a^n 中， a 叫作**底数**，正整数 n 叫作**指数**。“ a^n ”读作“ a 的 n 次方”，当“ a^n ”被看作是 a 的 n 次方的结果时，也读作“ a 的 n 次幂”。当 $n=1$ 时，我们规定： $a^1=a$ 。

4.同底数幂的乘法

同底数幂的乘法性质：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 是正整数}).$$

同底数幂相乘，底数不变，指数相加。

同底数幂的乘法运算，可以转化为指数的加法运算。

要点：

(1) 同底数幂是指底数相同的幂，底数可以是任意的实数，也可以是整式。

(2) 三个或三个以上同底数幂相乘时，也具有这一性质，

$$\text{即 } a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p} \quad (m, n, p \text{ 都是正整数}).$$

(3) 逆用公式：把一个幂分解成两个或多个同底数幂的积，其中它们的底数与原来的底数相同，它们的指数之和等于原来的幂的指数。即 $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ (m, n 都是正整数)。

【即学即练】

1. 计算：

$$(1) 3^3 \cdot 3^5 ;$$

$$(2) -b^4 \cdot b^5 ;$$

$$(3) (-x) \cdot x^2 \cdot (-x)^4 ;$$

$$(4) (a+b)^3 \cdot (a+b)^4 .$$

2 . 计算 :

$$(1) 2^4 \times 2^3 ;$$

$$(2) x^3 \cdot x^5 ;$$

$$(3) b^m \cdot b^n \text{ (} m, n \text{ 是正整数)} ;$$

$$(4) a^3 \cdot a^m \cdot a^n \text{ (} m, n \text{ 是正整数)} .$$

3 . 计算 :

$$(1) (-2)^{12} \times (-2)^5 ;$$

$$(2) (x-y)^3 \cdot (x-y)^5 ;$$

$$(3) -t^m \cdot t^{m+1} ;$$

$$(4) \left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 ;$$

$$(5) (-a)^{2n+1} \cdot (-a)^{3n+2} \cdot (-a) .$$

4 . a^{m+2} 可以写成 ()

A . $2a^m$

B . $a^m + a^2$

C . $a^m \cdot a^2$

D . $2a \cdot a^{m+1}$

5 . 已知 $x^m = 6$, $x^n = 4$, 则 x^{m+n} 的值为 ()

A . 4

B . 6

C . 10

D . 24

知识点 2 幂的乘方

1 . 观察

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^{3+3} = 2^{3 \times 2} ;$$

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^{3 \times 2} ;$$

$$(am)^2 = a^m \cdot a^m = a^{m+m} = a^{2m} \text{ (} m \text{ 是正整数)} .$$

一般地, 设 m, n 是正整数, 如何计算 $(a^m)^n$?

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \cdots \cdot a^m}_{n \uparrow a^m}$$

事实上， (乘方的意义)

$$= a^{\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n \uparrow m}} \quad (\text{同底数幂的乘法性质})$$

$$= a^{mn}.$$

2. 幂的乘方

幂的乘方性质：

$$(a^m)^n = a^{mn} (m, n \text{ 是正整数}).$$

幂的乘方，底数不变，指数相乘.

幂的乘方运算，可以转化为指数的乘法运算.

要点：

(1) 公式的推广： $((a^m)^n)^p = a^{mnp}$ ($a \neq 0$, m, n, p 均为正整数)

(2) 逆用公式： $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$ ，根据题目的需要常常逆用幂的乘方运算能将某些幂变形，从而解决问题.

【即学即练】

1. 计算：

$$(1) (y^2)^3 \cdot (-y)^2;$$

$$(2) 4(x^2)^6 - (-x^3)^4.$$

2. 计算：

$$(1) (-2^2)^3$$

$$(2) (x^4)^4$$

$$(3) [(x-y)^2]^3$$

$$(4) (y^m)^2 \cdot (-y^3)$$

$$(5) -b \cdot (-b^3)^5$$

$$(6) 2(x^3)^5 - (x^5)^3$$

3. 已知 $x^4 = a$ ，则 x^8 等于 ()

A . $2a$

B . $4a$

C . a^2

D . a^4

4 . 已知 $x^m = 2$, $x^n = 4$ (m , n 是正整数) . 求 :

(1) x^{2m+3n} ;

(2) $x^{2m} + x^{3n}$.

题型精讲

题型 01 同底数幂的乘法基础辨析、填空

【典例 1】 . (1) 同底数幂的乘法运算性质 : 同底数幂相乘 , 底数_____, 指数_____ ;

(2) $a^2 \cdot a^4 =$ _____ ;

(3) $a \cdot a^4 =$ _____ ;

(4) $a^2 \cdot a^{(-----)} = a^7$; 括号内填写 :

【变式 1】 . 计算 : $(-a)^5 \times (-a)^3 \times (-a)^2 =$ _____ .

【变式 2】 . 下列各项中 , 是同底数幂的是 ()

A . x^2 与 a^2

B . $(-a)^2$ 与 $-a^3$

C . $(x-y)^2$ 与 $(y-x)^2$

D . $-x^2$ 与 x

【变式 3】 . 下面的计算对不对 ? 如果不对 , 怎样改正 ?

(1) $x^3 \cdot x^3 = 2x^3$ ()_____ ;

(2) $x^4 \cdot x^2 = x^8$ ()_____ ;

(3) $b^5 + b^5 = b^{10}$ ()_____ ;

(4) $c \cdot c^3 = c^3$ ()_____ .

题型 02 同底数幂的乘法运算

【典例 1】 . 计算 :

(1) $x^2 \cdot x^5$;

(2) $a \cdot a^6$;

(3) $(-2) \times (-2)^4 \times (-2)^3$;

(4) $x^m \cdot x^{3n+1}$.

【变式 1】 . 计算 $\frac{\overset{\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow}{a+a+\cdots+a}}{\underset{\uparrow}{b} \cdot \underset{\uparrow}{b} \cdot \underset{\uparrow}{b} \cdot \underset{\uparrow}{b} \cdot \underset{\uparrow}{b} \cdot \underset{\uparrow}{b} \cdot \underset{\uparrow}{b} \cdot \underset{\uparrow}{b} \cdot \underset{\uparrow}{b} \cdot \underset{\uparrow}{b}} = (\quad)$

A . $\frac{8a}{7b}$

B . $\frac{8a}{b^7}$

C . $\frac{a^8}{b^7}$

D . $\frac{a^8}{7b}$

【变式 2】 . 计算：

(1) $10^8 \times 10^2$;

(2) $(-x)^2 \cdot (-x)^3$;

(3) $a^{n+2} \cdot a^{n+1} \cdot a^n \cdot a$;

(4) $(y-1)^2 \cdot (y-1)$;

(5) $(b+2)^3 \cdot (b+2)^5 \cdot (b+2)$.

题型 03 根据同底数幂的乘法运算求参数

【典例 1】 . 若 $2^a \times 2^a \times 2^a = 16$, 则 $a =$ _____ .

【变式 1】 . 已知 $a^2 \cdot a^{x-4} = a^5$, 那么 x 的值为 ($\quad$)

A . 5

B . 6

C . 7

D . 8

【变式 2】 . 若 $10^2 \times 10^m = 10^{2017}$, 则 $m =$ ____ .

题型 04 同底数幂乘法的逆用

【典例 1】 . x^{3m+1} 可以写成 ($\quad$)

A . $x^3 \cdot x^{(m+1)}$

B . $x^3 + x^{(m+1)}$

C . $x \cdot x^{3m}$

D . $x^m + x^{(2m+1)}$

【变式 1】 . 计算 $(-2)^{2023} + (-2)^{2024}$ 的结果是 ($\quad$)

A . -2

B . 2^{2023}

C . 0

D . $(-2)^{4047}$

【变式 2】 . 若 $a^m = 3$, $a^n = 2$, 则 a^{m+n} 的值为 ($\quad$)

A . 6

B . 8

C . 5

D . 9

【变式 3】 . 已知 $2^{x+3} = m$, 用含 m 的代数式表示 2^x 正确的是 ($\quad$)

A. $\frac{m}{3}$

B. $\frac{m}{8}$

C. $m-3$

D. $3m$

题型 05 幂的乘方运算性质基础填空

【典例 1】. 填空题：

(1) 幂的乘方运算性质：幂的乘方，底数_____，指数_____；

(2) $(a^2)^3 =$ _____；

(3) $(a^3)^{(\text{---})} = a^{12}$ ，横线上应填_____；

(4) $[a^{(\text{---})}]^2 = a^{12}$ ，横线上应填_____；

(5) $(a^3)^4 = a^2 \cdot a^{(\text{---})}$ ，横线上应填_____；

(6) $(a^4)^3 = [a^{(\text{---})}]^4$ ，横线上应填_____。

【变式 1】. 填空：

(1) $10^{12} = (\text{---})^3$ ；括号内应填入：

(2) $b^{27} = (b^3)^{(\text{---})}$ ；括号内应填入：

(3) $(y^m)^3 = (\text{---})^m$ ；括号内应填入：

(4) $p^{3n+3} = (\text{---})^3$ 。括号内应填入：

题型 06 幂的乘方运算

【典例 1】. 计算：

(1) $-(x^3)^5$ ；

(2) $(-m^2)^5$ ；

(3) $[(-m)^2]^5$ ；

(4) $(a^5)^2 \cdot (a^4)^4$ ；

(5) $-[(a-b)^2]^3$ ；

(6) $3^2 \times 9^3$.

【变式 1】 . 计算：

(1) $(x+y)^2 \cdot [(x+y)^3]^2$;

(2) $[-(a-b)^3]^4$;

(3) $(-x^n)^4 \cdot x^{2n} + (-x^{2n})^3$;

(4) $3[(x-y)^2]^n + [(y-x)^n]^2$.

【变式 2】 . 计算：

(1) $(a^2)^3 \cdot (-a^3)^2 \cdot (-a^2)^3$;

(2) $(y^2)^3 + (y^3)^2 - y \cdot y^5$;

(3) $(-a^2)^3 + (-a^3)^2 - a^2 \cdot a^4$;

(4) $[(a+b)^2]^3 \cdot [(a+b)^2]^4$.

题型 07 幂的乘方性质的逆用

【典例 1】 . 已知 $a^m = 2$, $a^n = 3$, 求 a^{2m+3n} 的值 .

【变式 1】 . 已知 $2^m = x$, $2^{2n} = y$, m, n 为正整数 , 则 $4^{m+2n} = (\quad)$

- A . $4xy$ B . x^2y^2 C . $x^2 + y^2$ D . $2x + 2y$

【变式 2】 . 若 $\underbrace{9^2 \times 9^2 \times \cdots \times 9^2}_{m\uparrow} = \underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_{100\uparrow} \times 3$, 则 m 的值为 ()

- A . 100 B . 50 C . 25 D . 4

【变式 3】 . 若 $2x + 5y - 3 = 0$, 求 $4^x \cdot 32^y$ 的值 .

题型 08 比较幂的大小

【典例 1】 . 探究题：

(1) 计算下列算式的结果： $(2^2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$, $2^6 = \underline{\hspace{2cm}}$;

发现 $(2^2)^3 = 2^6$, 小浦猜想会有如下规律： $(a^m)^n = \underline{\hspace{2cm}}$ (用 a, m, n 表示) ;

(2)利用上述规律，你能帮助小浦解决下列问题吗？

①若 $a^{2^n} = 3$ ，求 $(a^{3^n})^2$ 的值；

②比较 3^{555} ， 4^{444} ， 5^{333} 的大小，并用“<”号连接．

【变式1】．已知 $a = 9^{61}$ ， $b = 81^{31}$ ， $c = 27^{41}$ ，则 a ， b ， c 的大小关系是 ()

A . $a > b > c$

B . $a > c > b$

C . $b > c > a$

D . $c > b > a$

【变式2】．阅读理解：我们在学习了幂的有关知识后，对两个幂 a^m 与 b^n (a ， b 都是正数， m ， n 都是正整数) 的大小进行比较，并归纳总结了如下两个结论：

①若 $a = b$ ， $m > n$ ，则 $a^m > b^n$ ．(底数相同，指数大的幂大)

②若 $a > b$ ， $m = n$ ，则 $a^m > b^n$ ．(指数相同，底数大的幂大)

尝试应用：试比较 2^{100} 与 3^{75} 的大小．

解：因为 $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$ ，

$3^{75} = (3^3)^{25} = 27^{25}$ ，…… (第1步)

又 $16 < 27$ ，

所以 $2^{100} < 3^{75}$ …… (第2步)

问题解决：

(1)在尝试应用的解题过程中，第1步的思路是将底数和指数都不相同的两个幂转化化归为_____；第2步的依据是_____．

(2)请比较下面各组中两个幂的大小：

① 4^{50} 与 8^{33} ；

② 3^{100} 与 5^{60} ．

题型09 新定义题

【典例1】．如果 $x^n = y$ ，那么我们规定 $(x, y) = n$ ．例如：因为 $3^2 = 9$ ，所以 $(3, 9) = 2$ ．根据上述规定，若 $(m, 8) = p$ ， $(m, 4) = q$ ， $(m, t) = r$ ，且满足 $p + 2q = r$ ，则 $t =$ _____．

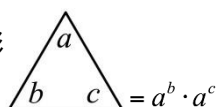
【变式1】．我们知道，一元二次方程 $x^2 = -1$ 没有实数根，即不存在一个实数的平方等于 -1 ，如果我们规定一个新数“ i ”使它满足 $i^2 = -1$ ，即 $x^2 = -1$ 有一个根为 i ，并且进一步规定：一切实数可以与新数“ i ”进行

运算，且原有的运算律和运算法则仍然成立，于是有： $i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \dots\dots$ 那么

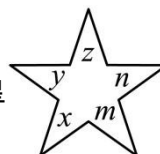
i^{2023} 的值为 ()

- A . 1 B . -1 C . i D . $-i$

【变式2】 . 新考法我们定义：三角形

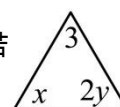


，五角星



$$= z \cdot (x^m \cdot y^n)$$

；若



，则 = _____ .

= 4

强化训练

一、单选题

1 . $b^3 \cdot b^3$ 的值是 ()

- A . b^9 B . $2b^3$ C . b^6 D . $2b^6$

2 . $(-c)^3 \cdot (-c)^5$ 的值是 ()

- A . $-c^8$ B . $(-c)^{15}$ C . c^{15} D . c^8

3 . 运算结果为 a^6 的是 ()

- A . $a^3 \cdot a^2$ B . $(a^4)^2$
C . $a \cdot a \cdots a$ (6 个 a 相乘) D . $a + a + \cdots + a$ (6 个 a 相加)

4 . 结果等于 a^{2k} 的有 ()

- A . $a^k + a^k$ B . $a^k - a^k$ C . $a^k \cdot a^k$ D . $(a^k)^k$

5 . 下列等式中正确的个数是 ()

① $a^5 + a^5 = a^{10}$; ② $(-a)^6 \cdot (-a)^3 \cdot a = a^{10}$; ③ $-a^4 \cdot (-a)^5 = a^{20}$; ④ $2^5 + 2^5 = 2^6$

- A . 1 个 B . 2 个 C . 3 个 D . 4 个

6 . 计算 $(x-y)^3 \cdot (y-x) =$ ()

- A . $(x-y)^4$ B . $-(x-y)^4$ C . $(y-x)^4$ D . $(x+y)^4$

7. 计算 $x^{m+n} \cdot x^{-2m+3n}$ 的结果正确的是 ()

$$A \quad x^{3m+4n}$$

$$B \quad x^{-m+n}$$

$$C \quad x^{-m+4n}$$

$$D \quad x^{-6mn}$$

8. 如果 $a^m = 4$, $a^n = 2$, 那么 a^{2m+3n} 的值是 ()

A 128

B 32

C 96

D. 无法确定

9. 若 m, n 是正整数, 且满足 $4^m + 4^m + 4^m + 4^m = 2^n \times 2^n \times 2^n \times 2^n$, 则 m 与 n 的关系正确的是 ()

A $m = n$

B $m+1=2n$

C $m+1 = n^2$

D $2m = n^2$

10. 已知 $x = 2^{12}$, $y = 6^6$, $z = 8^5$, 则 x , y , z 的大小关系是 ()

A $x < z < y$

B $y < x < z$

C $x < y < z$

D $z < y < x$

二、填空题

$$11. \quad (1) \quad a^2 \cdot \underline{\hspace{2cm}} = a^7 ;$$

(2) $a^3 \cdot a^6 = \underline{\hspace{2cm}} \cdot a^5$.

12. (1) $(10^2)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $(a^4)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$; (3) $(3^n)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$;

(4) $\left[(-2)^2\right]^3 =$ _____ ; (5) $\left[(-n)^3\right]^3 =$ _____ ; (6) $\left(-3^2\right)^5 =$ _____ .

13. 若 $7^2 \times 7^1 \times 7^0 = 7^p$, 则 p 的值为_____.

14. 已知 $3^x = 6$, 则 $3^{x+2} =$ _____ .

15. 已知 $x+y-2=0$, 则 $4^x \cdot 2^{2y}$ 的值是_____.

16. 如果 a, b, c 满足 $2^a = 3, 2^b = 5, 2^c = 675$, 那么 a, b, c 满足的等式是_____.

三、解答题

17. 计算：

$$(1) x^2 \cdot x^6 \quad ;$$

$$(2) a^{2n} \cdot a^{n+1} :$$

$$(3)(-y) \cdot y^2 \cdot (-y)^3 ;$$

$$(4)(p-q)^5 \cdot (q-p)^2 :$$

$$(5)(s-t)^m \cdot (s-t)^{m+n} \cdot (t-s) \quad (m, n \text{ 是正整数}) ;$$

$$(6)x^n \cdot x^{n+1} + x^{2n} \cdot x \quad (n \text{ 是正整数}) .$$

18 . 计算 :

$$(1)-p \cdot (p^2)^3 ;$$

$$(2)(y^n)^2 \cdot y^{n-1} (n > 1, n \text{ 为整数}) ;$$

$$(3)2a^3 \cdot (a^2)^3 - (-a^4)^2 \cdot a + a^2 \cdot a^7 ;$$

$$(4)2(a-b) \cdot [(b-a)^3]^3 .$$

$$19 . \text{ 已知 } a^x = 2, a^y = 3, \text{ 求 } a^{2x+y} \text{ 的值} .$$

$$20 . \text{ 已知 } 10^a = 5, 10^b = 2, \text{ 求} :$$

$$(1)10^{2a} + 10^{3b} \text{ 的值} ;$$

$$(2)10^{2a+3b+1} \text{ 的值} .$$

21 . 按要求答题

$$(1)\text{ 已知 } m + 4n - 3 = 0, \text{ 求 } 2^m \times 16^n \text{ 的值} .$$

$$(2)\text{ 已知 } n \text{ 为正整数, 且 } x^{2n} = 4, \text{ 求 } (x^{3n})^2 - 2(x^2)^{2n} \text{ 的值} .$$

22 . 阅读理解：我们在学习了幂的有关知识后，对两个幂 a^m 与 b^n (a, b 都是正数， m, n 都是正整数) 的大小进行比较，并归纳总结了如下两个结论：

①若 $a = b, m > n$ ，则 $a^m > b^n$. (底数相同，指数大的幂大)

②若 $a > b, m = n$ ，则 $a^m > b^n$. (指数相同，底数大的幂大)

尝试应用：试比较 2^{100} 与 3^{75} 的大小 .

$$\text{解：因为 } 2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25},$$

$$3^{75} = (3^3)^{25} = 27^{25}, \dots\dots (\text{第 1 步})$$

$$\text{又 } 16 < 27,$$

$$\text{所以 } 2^{100} < 3^{75} \dots\dots (\text{第 2 步})$$

问题解决：

(1)在尝试应用的解题过程中，第 1 步的思路是将底数和指数都不相同的两个幂转化化归为_____；第 2 步的依据是_____。

(2)请比较下面各组中两个幂的大小：

① 4^{50} 与 8^{33} ；

② 3^{100} 与 5^{60} 。

23 . 如果 $x^n = y$ ，那么我们规定 $(x, y) = n$ 。例如：因为 $4^2 = 16$ ，所以 $(4, 16) = 2$ 。

(1) $(-2, 16) =$ _____ ；若 $(2, y) = 6$ ，则 $y =$ _____ ；

(2)已知 $(4, 12) = a$ ， $(4, 5) = b$ ， $(4, y) = c$ ，若 $a + b = c$ ，求 y 的值；

(3)若 $(5, 10) = a$ ， $(2, 10) = b$ ，令 $t = \frac{2ab}{a+b}$ 。

①求 $\frac{25^a}{16^b}$ 的值；

②求 t 的值 。